Étude de motifs

Richard Choulet

Le point de départ de cette étude, qui se termine en conjectures, est un exercice d'arithmétique de Terminale S.

Nous suivrons le plan suivant :

Partie I. Recherches à partir d'un énoncé classique

A. Étude préliminaire : polynôme à valeurs entières.

B. Examen d'une suite d'entiers (u_n) : $u_n = \overline{a\underbrace{b\cdots b}_{n-1}c\underbrace{d\cdots d}_{n-1}e}$, $a \neq 0$ qui reconduit au point de départ.

Partie II. Puissance de motifs ; conjectures

Partant du constat de l'invariance de la structure des carrés obtenus dans la partie I, je me suis amusé à calculer les carrés de nombres que j'appelle « à motif », où une même séquence de chiffres est répétée ad libitum. Comme « la tête et la queue » des nombres obtenus bougeaient peu, en coupant convenablement ces deux extrémités, j'ai trouvé un cœur central où se passaient des choses !

Partie III. En guise de conclusion.

I. Recherches à partir d'un énoncé classique

L'exercice d'arithmétique de Terminale S évoqué propose de démontrer que tout nombre écrit en base dix sous la forme $\underbrace{1\cdots1}_{n}\underbrace{5\cdots5}_{n-1}6$ *est le carré de l'entier* $\underbrace{3\cdots3}_{n-1}4$ *car les questions de l'exercice amènent finalement que :*

$$\underbrace{1\cdots1}_{n}\underbrace{5\cdots5}_{n-1}6 = \left(\frac{10^n+2}{3}\right)^n.$$

A. Étude préliminaire : polynôme à valeurs entières

Ce résultat dit en gros que tout polynôme de $\mathbf{Q}[x]$ qui prend pour valeurs des carrés d'entiers sur $\{q^n, n \in \mathbf{N}\}$ où $q > 1$ est entier, est lui-même un carré dans $\mathbf{Q}[x]$. Plus précisément nous énonçons le théorème suivant :

Théorème : *Soit* $q \in \mathbf{N}$ $(q > 1)$ *et* $\mathrm{P}(x) = \lambda x^2 + \mu x + \nu \in \mathbf{Q}[x]$ $(\lambda \neq 0)$. *On suppose que pour tout entier* $n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{P}(q^n)$ *est le carré d'un entier* d_n. *Alors existent* r *et* ρ *dans* $\mathbf{Q}$ *tels que :*

$$\mathrm{P}(x) = \left[r(x-\rho)\right]^2.$$

Tout d'abord $\lambda > 0$ car sinon on a $P(q^n) < 0$ dès que n est assez grand.
Considérons alors $Q_k(x) = P(x)P(q^k x)$ qui est un polynôme de degré quatre commençant par $\lambda^2 q^{2k} x^4$ et qui satisfait

$$Q_k(q^n) = (d_n d_{n+k})^2.$$

Nous écrivons :

$$Q_k(x) = \lambda^2 q^{2k} x^4 \, R_k(x)$$

avec

$$\sqrt{R_k(x)} = 1 + \frac{b_k}{x} + \frac{c_k}{x^2} + \frac{\varepsilon_k(x)}{x^2}$$

où $b_k \in \mathbf{Q}$, $c_k \in \mathbf{Q}$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \varepsilon_k = 0$.

Revenant à $\sqrt{Q_k(x)}$, on obtient :

$$\sqrt{Q_k(x)} = \lambda q^k x^2 + \lambda q^k b_k x + \lambda q^k c_k + \lambda q^k \varepsilon_k(x).$$

En particulier

$$d_n d_{n+k} = \lambda q^{2n+k} + \lambda q^{n+k} b_k + \lambda q^k c_k + \lambda q^k \varepsilon_k(q^n).$$

Ceci prouve que $\varepsilon_k(q^n)$ est nul pour tout n.

En effet les nombres λq^{2n+k}, $\lambda q^{n+k} b_k$ et $\lambda q^k c_k$ sont dans $\mathbf{Q}$, donc, en les multipliant par un entier approprié M_k, on construit des entiers, mais alors :

$$M_k \lambda q^k \varepsilon_k(q^n) = d_n d_{n+k} M_k - \left(\lambda q^{2n+k} + \lambda q^{n+k} + \lambda q^k c_k\right) M_k \in \mathbf{Z}$$

avec bien sûr : $\lim\limits_{n\to+\infty} M_k \lambda q^k \varepsilon_k(q^n) = 0$. Ainsi $M_k \lambda q^k \varepsilon_k(q^n)$ est nul à partir d'un certain rang et on obtient que pour tout n :

$$Q_k(q^n) = \left(\lambda q^k q^{2n} + \lambda q^k b_k q^n + \lambda q^k c_k\right)^2.$$

Par suite on déduit

$$Q_k(x) = \left(\lambda q^k x^2 + \lambda q^k b_k x + \lambda q^k c_k\right)^2.$$

Il résulte de cette expression que P ne peut avoir deux racines distinctes car alors pour k assez grand on aurait : Q_k a quatre racines distinctes.

Donc en fait $P(x) = \left[r(x-\rho)\right]^2$ avec ρ rationnel puisque $\rho = \dfrac{q^m d_p - q^p d_m}{d_m - d_p}$ $(m \neq p)$

et $\lambda = \left(\dfrac{d_m}{q^m - \rho}\right)^2$, donc carré d'un rationnel r.

En résumé nous avons obtenu $P(x)=\left[r(x-\rho)\right]^2$. D'ailleurs l'examen des premières valeurs de n donne en posant $r-\rho r=\alpha\in\mathbf{N}$ et $qr-\rho r=\beta\in\mathbf{N}$ que $r=\dfrac{\beta-\alpha}{q-1}$ et $\rho r=\dfrac{\beta-q\alpha}{q-1}$, ce qui fait : $P(x)=\left[\dfrac{\beta-\alpha}{q-1}x+\dfrac{q\alpha-\beta}{q-1}\right]^2$.

$$\boxed{P(q^n)\text{ est alors le carré de l'entier }\frac{\beta-\alpha}{q-1}x+\frac{q\alpha-\beta}{q-1}.}$$

B. Examen de suites d'entiers (u_n)

Nous essayons de généraliser le problème de terminale en considérant la suite d'entiers (un) telle que $u_n=\overline{a\underbrace{c\cdots c}_{n-1}\underbrace{d\cdots d}_{n-1}b}$, $a\neq 0$ *et en cherchant à quelle condition nécessaire et suffisante,* u_n *est le carré d'un entier naturel pour tout* n.

On pose $u_1=\overline{ab}$. Nous calculons directement u_n par :

$$u_n=\frac{9a+c}{9}10^{2n-1}+\frac{d-c}{9}10^n+\frac{9b-10d}{9}.$$

Pour que u_n soit un carré d'entier quel que soit l'entier n, il faut et il suffit que, avec le théorème de la partie A, $a=c=9$ ou $a=c=4$ ou $a=c=1$ avec la nullité du discriminant associé, $9b-10d$ étant un carré.
On ne trouve alors que deux solutions : $a=c=4$, $d=8$ et $b=9$ ce qui conduit à $u_n=\left(\dfrac{2\times 10^n+1}{3}\right)^2$ et $a=c=1$ avec $d=5$ et $b=6$; dès lors $u_n=\left(\dfrac{10^n+2}{3}\right)^2$. Sous forme décimale on obtient les nombres respectifs dont le carré est $\underbrace{6\cdots 6}_{n-1}7$ et $\underbrace{3\cdots 3}_{n-1}4$.

Nous retrouvons donc là la suite proposée dans l'exercice de baccalauréat et une autre ayant la même structure.

II. Puissance de motifs ; conjectures

1) Un exemple simple : carré de $1\underbrace{3\cdots 3}_{n}2$

Nous proposons de calculer les carrés successifs des termes de la suite précédente et de ne nous intéresser qu'à ce qui est différent d'une écriture décimale à la suivante : cela veut dire qu'on enlève d'abord à droite ce qui a été déjà écrit, puis on fait la même chose à gauche. Reste donc une suite « cœur » : (C_n).

$12^2 = 144$
$132^2 = 1\,\underline{742}\,4$; $C_1 = 742$
$1\,332^2 = 17\,\underline{742}\,24$; $C_2 = 742$
$13\,332^2 = 177\,\underline{742}\,224$; $C_3 = 742$.
Il est clair que le cœur semble constant dès le rang 1.
Pour cet exemple la démonstration de la constance du cœur vient de ce que $1\underbrace{3\cdots3}_{n}2 = \frac{40}{3}10^n - \frac{4}{3}$, puis $1\underbrace{3\cdots3}_{n}2^2 = \frac{16}{9}10^{2n+2} - \frac{32}{9}10^{n+1} + \frac{16}{9}$ qui est encore $10^{2n+2} + 7\frac{10^{2n+2}-1}{9} - 3\frac{10^{n+1}-1}{9} + 2$, soit finalement $1\underbrace{7\cdots7}_{n}4\underbrace{2\cdots2}_{n}4$. Donc le cœur est constant et égal à 742.

2) Sur la piste de curiosités

J'ai modifié la place et la longueur du motif dans l'écriture du nombre et j'ai fait cette remarque curieuse que la suite des cœurs semble périodique, à partir d'un certain rang toutefois, mais que la période ne paraît pas prévisible. J'ai démontré le résultat en explicitant la suite « cœur » pour quelques exemples ; je suis loin d'une démonstration générale ! Par ailleurs j'ai recherché également la forme des nombres à cœur constant fixé au préalable (le cas le plus facile est celui de la périodicité un) et essayé de voir ce qui subsistait lorsqu'on considérait les cubes.
À la lumière (faible) de ces exemples et calculs, j'en suis arrivé aux conjectures :
« **Tout carré d'une suite à motif est une suite à cœur périodique.** »
« **Tout carré d'une suite à motif est une suite à cœur constant si et seulement si le motif n'est constitué que de 3, de 6 ou de 9.** »

Quant aux cubes c'est encore plus subtil : ce n'est que lorsque le motif n'est constitué que de 3, 6 ou 9 que les suites extraites des exposants multiple de trois, ou multiple de trois plus un ou multiple de trois plus deux sont à cœur constant. Dans les autres cas c'est l'anarchie !

III. En guise de conclusion

D'autres pistes pourraient être abordées en travaillant dans une base plus simple mais pas trop – trois par exemple – ; les démonstrations y seront peut-être plus abordables. Par ailleurs il ne semble pas qu'on puisse mener des études similaires avec des rationnels (des réels ?) non décimaux, en greffant un motif au beau milieu d'une écriture décimale illimitée, du fait qu'il n'y a pas de « queue ». Par ailleurs il y a convergence de la suite obtenue vers un rationnel tandis qu'avec ce qui est étudié plus haut il y a divergence vers $+\infty$.
J'ai peut-être enfoncé des portes ouvertes en étudiant un thème qui traîne dans la littérature ; je n'en ai pas eu connaissance et n'ai donc aucune bibliographie à proposer.
Les calculs, effectués sur TI 92® et sur ordinateur muni de MAPLE® sont disponibles présentés en LATEX.