Naissance de la dimension quatre

Jean-Marc Cahen

Voici un texte de devoir maison « sur trois ans » (si on a la chance de pouvoir suivre un peu certains de ses élèves) avec la résolution des deux premières parties par une élève rentrant en Première en 2004 (ses réponses sont en « Arial 9 », le texte du devoir en « Times 10 » et les questions du devoir sont en italiques).
On trouvera en annexe une introduction à ce devoir (pourquoi un tel devoir, attendus, bagage des élèves), des remarques sur d'autres textes d'élèves ainsi qu'une conclusion générale.

Introduction

0) Le point est de dimension 0, la droite de dimension 1, le plan 2 et l'espace 3. Ces nombres sont réglés par :
   - à l'intersection de deux droites il y a un point,
   - à l'intersection de deux plans il y a une droite,
   - à l'intersection de deux espaces il y a un plan.

   D'où la « montée en dimension » : une dimension est définie via la dimension inférieure ; et il y a un point de départ : « le point est de dimension 0 ».
   La dimension 4 (tout comme les dimensions supérieures) n'est pas donnée dans le monde sensible ; mais on notera qu'à l'intersection de deux dimensions 4 il y a un espace. J'appelle « dimension 4 » – faute de mot dans la langue française – ce qui est au nombre 4 ce qu'espace est au nombre 3, plan à 2 et droite à 1 (en mathématiques).

1) Nous noterons T_2 un triangle et T_3 un tétraèdre. Pourquoi ces nombres ? Parce qu'un triangle (un vrai triangle, i.e. trois points non alignés) est un objet planaire (d'où le 2). Et que de même, un tétraèdre, (un « vrai » tétraèdre, i.e. la donnée de quatre points non coplanaires) est un objet spatial (d'où le 3). Attention ! Je ne sous-entends aucunement par ces nombres que T_2 est de dimension deux (cf. 2) ci-dessous) !

1') De même, nous noterons C_2 un carré et C_3 un cube, pour les même raisons que ci-dessus. Il reste à définir ce qu'est un carré et ce qu'est un cube.

2) T_2 est délimité par des arêtes (3 en tout), chacune d'elles est délimitée par des sommets (3 en tout). De même C_2 (4 arêtes et 4 sommets).
   T_3 est lui aussi délimité par des faces (4 en tout), chacune d'elles étant délimitée par des arêtes (6 en tout), lesquelles sont à leur tour délimitées par des sommets (4 en tout). De même C_3 (6 faces, 12 arêtes et 8 sommets).
   De plus, une face est de dimension 2, une arête de dimension 1 et un sommet de dimension 0.

I. Questions pour des élèves de seconde

a) *Qu'est-ce alors que* T_1 *?* T_4 *?*

– T_1 est la donnée deux points non confondus, donc un objet de dimension 1, délimité par deux points.
– T_4 est un tétraèdre de dimension 4, i.e. cinq points n'appartenant pas au même « espace » : on aurait quatre points formant un T_3, et un point situé dans un autre espace, relié à chacun des autres points. Un T_4 est délimité par des volumes, eux-mêmes délimités par des faces, lesquelles sont délimitées par des arêtes, enfin délimitées par des points.

b) T_2 *a* $(3 \times 2)/2$ *arêtes et* T_3 *en a* $(4 \times 3)/2$. *Expliquez cette façon de compter.*

– Un T_n a x sommets, d'où partent à chaque fois m arêtes. Il faudrait donc compter m fois chaque sommet pour obtenir le nombre d'arêtes, d'où la multiplication par m. Mais chaque arête relie deux sommets, donc si on compte m fois chaque arête, on aura en fait compté deux fois chaque arête, ce qui explique la division par deux.

$$A = \frac{x \times m}{2}.$$

• Dans un T_2, $x = 3$, $m = 2$.
• Dans un T_3, $x = 4$, $m = 3$.

c) *En déduire combien* T_1 *et* T_4 *ont d'arêtes, s'ils en ont.*

• Dans T_1, $x = 2$, $m = 2$, donc T_1 a une arête.
• Dans T_4, $x = 5$, puisqu'on a cinq points et $m = 4$, puisque, par définition, un T_n est la plus simple figure de sa dimension, donc tous les points sont reliés entre eux. Dans un T_4, chaque point est relié aux quatre autres, donc de chaque sommet partent quatre arêtes. Un T_4 a donc 10 arêtes.

d) *Combien* T_4 *a-t-il de faces ?*

$$F = \frac{3A}{n},$$

n nombre de cotés des polygones de base
En effet chaque arête « délimite » trois faces(*). Il faut donc compter trois fois chaque arête, puis diviser le tout par le nombre de côtés du polygone de base, ici 3.
$FT_4 = (3A)/3 = 10$ faces.

(*) Pourquoi trois faces ? Parce que pour obtenir un objet de la quatrième dimension, tout doit être en quatre dimensions.

• Transposons dans la dimension 3 :
  – 3 points étant forcément coplanaires, il faut donc au moins 4 sommets (non coplanaires) pour faire un polyèdre,
  – 2 arêtes sécantes étant forcément coplanaires, il en faut 3 à chaque sommet,
  – enfin, il faut 2 faces par arête.

• De même dans la dimension 4 :

4 points, 3 arêtes, 2 faces, 1 volume appartiennent au même espace. Pour former un « hyperpolyèdre », on a donc besoin d'au moins :
– 5 sommets,
– 4 arêtes à chaque sommet,
– 3 faces à chaque arête,
– 2 volumes à chaque face.

e) *On peut en dire plus (pensez par exemple aux objets concernés par la formule « S – A + F = 2 »). À quoi pensez-vous ?*

Je pense qu'il doit exister pour la plupart des « hyperpolyèdres » une formule homologue à la formule d'Euler, qui s'applique à la plupart des polyèdres. Cependant, cette formule comportera une nouvelle donnée : le nombre V de volumes, ou hyperfaces, qui délimitent l'objet.

T_4 a : S = 5, A = 10, F = 10, V = 5 (V = (2F)/4, 4 : nombre de faces d'un tétraèdre). Dans la deuxième dimension, S – A = 0. Dans la troisième, S – A + F = 2. La formule mettant en rapport les quatre données d'un objet de quatrième dimension devrait donc être : S – A + F – V = ?

II. Questions pour des élèves de première

Il va s'agir de décrire ce qu'est C_4. L'idée fondamentale est de descendre en dimensions, chemin inverse de celui proposé pour décrire T_4. Notons immédiatement que « dimension quatre » est l'ensemble des points ayant quatre coordonnées.
On a : $x = 1$ est l'équation d'un point sur une droite ; $x = 1$ est l'équation d'une droite sur un plan et $x = 1$ est l'équation d'un plan dans l'espace.
Je dis que C_2 est la frontière de la surface délimitée par les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ et $y = 1$. Et que C_3 est la frontière du volume qui est délimité par les plans d'équation $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ et $z = 1$.

a) *Combien C_4 a-t-il d'hyperfaces ?*

C_4 a 8 hyperfaces, incluses dans les « hyperplans » suivants : $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$, $w = 0$ et $w = 1$.

b) *Combien C_4 a-t-il de faces, d'arêtes et de sommets ?*

– Comme les faces d'un cube sont des carrés, les hyperfaces des hypercubes sont des cubes, donc ont chacune 6 faces. Mais chaque face est commune à 2 hyperfaces.
Donc F = (6V)/2 = $(6 \times 8)/2 = 24$.
– Les faces sont des carrés, donc sont délimitées par 4 arêtes, et chaque arête est commune à 3 faces.
Donc A = (4F) /3 = $(4 \times 24)/3 = 32$.
– Les arêtes sont délimitées par 2 sommets, et de chaque sommet partent 4 arêtes.
Donc S = (2A)/4 = (2×32) 4 = 16.

C_4 a : V = 8, F = 24, A = 32, S = 16.

c) *On peut en dire plus (pensez à « S – A + F = 2 »).*

Dans T4, S – A + F – V = 0.
Dans C4, S – A + F – V = 0.
Cette formule est également valable :

- Pour les « hyperprismes » à base n-prisme (j'appelle ainsi la donnée de deux prismes dont la base est un polygone à n côtés superposables et perpendiculaires selon une quatrième dimension) :

  n-prisme : $S' = 2n$, $A' = 3n$, $F' = n + 2$.
  hyperprisme : $S = 2S' = 4n$, $A = 2A' + S' = 8n$, $F = 2F' + A' = 5n + 4$, $V = 2 + F' = n + 4$.
  $S - A + F - V = 0$.

- Pour les « hyperpyramides » à base n-pyramide (objet de dimension 4 constitué d'une pyramide dont la base est un polygone à n côtés et d'un point situé dans un autre « espace » relié à tous les points de la pyramide) :

  n-pyramide : $S' = n + 1$, $A' = 2n$, $F' = n + 1$.
  hyperpyramide : $S = S' + 1 = n + 2$, $A = A' + S' = n + 2$,
  $F = F' + A' = 3n + 1$, $V = 1 + F' = n + 2$.
  $S - A + F - V = 0$.

- etc.

Cette formule serait donc l'équivalent pour la dimension 4 de
• S – A = 0 pour la dimension 2,
• S – A + F = 2 pour la dimension 3.

III. Questions pour des élèves de Terminale.

Soit n un entier ≥ 1.

a) Décrire T_n et C_n.

b) Donner une formule d'Euler en dimension n, et la vérifier pour ces deux objets.

FIN DU DEVOIR

ANNEXES

Introduction générale.

Ce texte de devoir-maison est une réponse aux programmes de Seconde concernant l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Ces programmes, avec notamment leur alinéa concernant les « Puzzles 3D » sont très clairement orientés du côté de l'intuition visuelle et de la manipulation d'objets. Outre qu'un tel point de départ me semble élitiste (il y a ceux qui savent s'orienter dans l'espace et les autres, je caricature, qui n'auront qu'à renoncer totalement à cette mathématique), il part de deux parti-pris contestables :

1) l'enseignement est la transmission (sous forme de jeux si possible) d'un savoir, lequel sera d'autant mieux absorbé par l'élève qu'on lui préparera un savoir léger, très digeste et surtout : immédiatement accessible ;
2) les structures (ici : espace vectoriel de dimension finie et dénombrement (i.e. bijection et quotient)) sont à enseigner le plus tard possible.

Devant ce qui me semble un renoncement devant la tâche enseignante, j'ai pris un cheminement non pas opposé (cf. paragraphe suivant), mais qui tient compte d'un principe fondamental : la notion de dimension, au cœur des mathématiques et fondamentale dans notre vie quotidienne (regarde-toi dans la glace pour voir !), fait se tenir ensemble certains aspects des géométries planes et « dans l'espace ». Plus précisément, la notion d'hyperplan (objet de co-dimension un) est centrale et la géométrie cartésienne (avec coordonnées) s'étend naturellement. Mon devoir, en plus de son aspect d'introduction aux raisonnements de dénombrement, cherche à montrer de manière effective la raison qui *s'écrit* dans la montée (ou la descente, c'est une question de point de vue qu'il faut pratiquer) en dimensions. Il est attendu des élèves qu'ils réagissent *en raison* devant un texte mathématique vu en classe (question I. e)) :

$$S - A = 0\ ;$$
$$S - A + F = 2.$$

Au passage, les analogies euclidiennes du type « le plan est à l'espace ce que la droite est au plan » (particularisation de la notion d'hyperplan), en plus d'être très bien perçues par les élèves de bonne volonté, sont très efficaces pour régler en quelques secondes certains passages du programme (« positions relatives de deux plans », « propriétés de la relation de parallélisme entre deux plans », « caractérisation d'un plan de l'espace par trois points alignés », pages 16-17 de l'*accompagnement des programmes classe de seconde*).

Préliminaires au devoir.

Ce texte de devoir-maison est donné aux élèves de Seconde après avoir observé et/ou démontré la formule d'Euler-Poincaré pour les polyèdres convexes (ou simplement connexes) et longuement discuté du *comment* compter les nombres d'arêtes, faces et sommets de polyèdres « simples » (e.g. les platoniciens).

Il est donné aux élèves de Première après avoir introduit les équations cartésiennes de plans. Enfin, il est donné aux élèves de Terminale comme introduction aux dénombrements (combinaisons), après avoir signalé à ceux qui ne l'auraient pas deviné seuls que T_n est complet (autant d'arêtes, de faces, … que possible).

Remarques sur les textes d'élèves.

1) À propos de la solution de l'élève ici reproduite (c'est elle qui l'a fait par elle-même sur une disquette prêtée), je constate qu'elle commet l'erreur « classique » de penser T_1 comme un segment (et donc s'interdit par là même une formule d'Euler-Poincaré triviale pour l'unique objet concerné), qu'elle n'exprime pas (I. b)) la relation $x = n + 1$ et va bien au-delà de mes espérances en parlant d'hyperprismes et d'hyperpyramides (et ce faisant elle m'instruit).
2) Concernant d'autres solutions, je dois admettre que les élèves de Seconde ont généralement été très embarrassés par ce devoir. Comment pourrait-il en être autrement ? Un devoir « à la maison », au Lycée, devrait le plus souvent être un temps de recherche avec une ou des séances de questions en classe avant de rendre son texte. Ceci est la chose la plus difficile à obtenir des élèves. La difficulté de ce devoir fait pour moi détail relativement à ce problème plus fondamental : attendre des élèves une réflexion de plusieurs semaines ainsi que la capacité à poser des questions.

Ceci étant, voilà ce que j'ai lu :

– dans une copie très touffue de deux élèves, deux réponses contradictoires sont données au sujet de T_1 : c'est un triangle aplati $3k$–$2k$–k (cette erreur ne m'étonne pas car j'ai enseigné dans cette classe l'inégalité triangulaire au sujet des triangles isométriques : quand est-ce qu'un triplet de nombres fait triangle (et combien ?) ?) mais plus loin « T_1 a deux sommets, T_2 trois, T_3 en a quatre, d'où T_4 a cinq sommets. » Par contre il est écrit qu' « on ne peut pas déterminer combien T_4 a de faces et donc pas donner d'avis pour Descartes-Euler » (autre nom donné cette année-là à Euler-Poincaré). Je joins à cette annexe leur figure produite à l'ordinateur pour parler de T_4. Où apparaît le miroir, cher aux professeurs enseignant la différence (fondamentale mais toujours oubliée pour ne pas troubler nos petites têtes blondes) isométrie directe/isométrie indirecte.

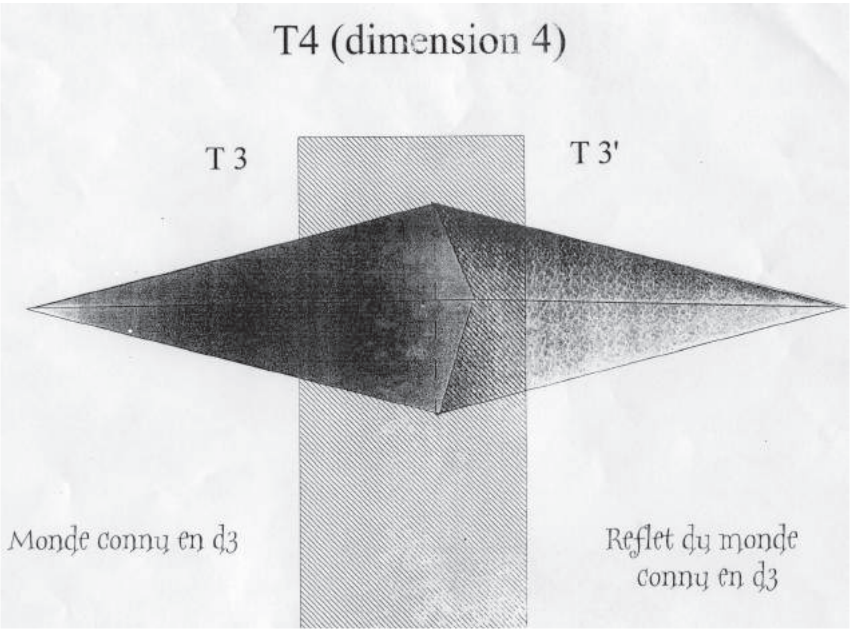
– dans une autre copie, plus sèche, les deux élèves arrivent à formuler que T_4 est « défini par cinq points non-cospaciaux » mais donnent à son sujet un nom curieux : l'intérieur de T_4 « on pourrait le qualifier d' « universel », car T_4 est une « figure » qui appartient à la dimension 4, une dimension qu'on appellera universelle… ».
  Quant à la question « À quoi pensez-vous ? » (I-e), ces deux jeunes filles répondent : « On pense très exactement au fait que plus on apprend des choses et moins on en sait ; c'est pour ça qu'on se borne à apprendre, pour atteindre l'ignorance parfaite… ». Je me suis permis dans la marge de leur suggérer de poser ces problèmes à nouveau quand elles seraient en Terminale.

– une élève (qui brille cette année dans sa classe de philosophie) avait inventé un nom pour désigner l' « espace de dimension quatre » : ce n'est ni le plan, ni l'espace, mais le « MonsieurCahen » (en un seul mot). Je ne l'ai pas du tout mal pris, j'attendais seulement de cette élève intelligente un peu plus que de l'humour. Elle profitait de mes bifurcations dans des registres non strictement mathématiques (ici le problème de la nomination) pour se délecter mais avait du mal quand il s'agissait simplement de raisonner et calculer sur des choses très simples.

Conclusion.

Un tel devoir peut paraître vide mathématiquement (et la dernière remarque ci-dessus semble aller dans ce sens) : je n'y attends ni calcul ni démonstration. C'est que la pratique mathématique est aussi faite de *pure* écriture. Je demande seulement dans ce devoir de lire sérieusement (l'Introduction pour commencer) et d'approcher la raison générale qui se cache derrière les polyèdres. « Qu'est-ce qu'un triangle ? » est une question qui m'a été posée déjà deux fois depuis sept ans que j'enseigne au Lycée. Ce devoir, entre autres, y répond rigoureusement.

Enfin, j'espère qu'il paraîtra clair au moins aux enseignants de Premier cycle universitaire qu'un tel devoir essaye non sans bavures de faire le pont entre deux continents à la dérive (au moins l'un par rapport à l'autre) : l'enseignement des mathématiques à l'École et celui professé à l'Université.



Production d'élèves