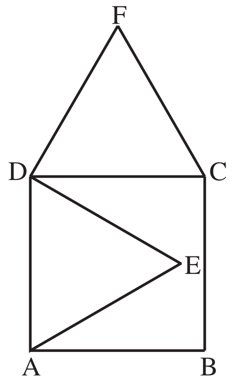
Il était une fois un carré et deux triangles

Camille Charra & Pascale Pombourcq(*)



L'expérience que nous allons raconter a été réalisée dans une classe de seconde d'un bon niveau et dans une classe de Première S. Nous sommes parties d'un exercice très connu qui figure dans tous les livres de Première, de Seconde, et même peut-être de collège.

ABCD est un carré, sur les côtés [AD] et [DC] du carré, on construit deux triangles équilatéraux, ainsi que l'indique la figure ci-contre. Il semble bien que les points F, E et B sont alignés.

Cet exercice a pris la forme d'un devoir maison, au mois de mars, les élèves de première ont disposé d'une dizaine de jours pour rendre leur travail, alors que les élèves de seconde ont eu besoin d'un peu plus de deux semaines. Nous leur avons demandé de relever le défi de trouver le plus de démonstrations possibles de cette constatation visuelle. L'alignement des points n'est ici qu'un prétexte, il s'est trouvé que cet énoncé se prêtait bien à ce défi, mais nous aurions pu choisir un tout autre problème. Nous souhaitions que les élèves fassent preuve d'imagination et soient contraints ainsi à aller rechercher des outils un peu anciens, bref à fouiller dans leurs cours de math. En Seconde les élèves avaient la possibilité de se mettre en groupe. Les élèves de Première S ont travaillé individuellement, mais le travail aurait certainement été plus riche en groupe. Les élèves sont restés enfermés dans un type de solution, ils auraient davantage varié les propositions en échangeant sur leurs solutions.

Nous avons totalisé quatorze démonstrations, ce nombre n'est sûrement pas exhaustif. Treize ont été apportées par les élèves. La lecture de l'article de Daniel Perrin dans un des bulletins verts sur la géométrie nous a incitées à donner en correction celle sur les aires. Nous les listerons toutes, mais nous ne développerons que celles que nous avons trouvées les plus intéressantes. Les démonstrations 3 et 4 n'ont été présentées que par des élèves de seconde, les démonstrations faisant appel à des repères ont été majoritairement proposées par des élèves de Première.

Comme vous allez pouvoir le constater dans les quelques démonstrations qui suivent, c'est un exercice de géométrie très riche en calcul algébrique. Il a fortement marqué la mémoire de nos élèves. La classification qui suit reprend celle que nous avons présentée aux élèves lors de la correction.

(*) Lycée Bourdelle, Montauban.

Considérations d'angles utilisant les outils de cinquième :

1. L'angle $\left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF}\right)$ est plat.
2. Les angles $\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BC}\right)$ sont égaux.
3. On appelle G le point d'intersection des droites (DE) et (BC). Les angles $\left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}\right)$ et $\left(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EB}\right)$ sont égaux. Les points D, E et G sont alignés. Ce sont donc des angles opposés par le sommet.
4. Dans le triangle (DEF), (EF) est perpendiculaire à la hauteur issue de D. Dans le triangle (ABE), (EB) est perpendiculaire à la hauteur issue de A. Par des considérations sur les angles, on montre que ces deux hauteurs sont parallèles. Les droites (EF) et (EB) sont donc parallèles.

Dans ces quatre démonstrations, ne sont utilisées que les propriétés des angles rencontrées en classe de Cinquième : somme des angles d'un triangle, triangles isocèles et équilatéraux, angles opposés par le sommet. Elles sont abordables par les élèves de collège.

Dans le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$) :

5. Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires.
6. Le point E appartient à la droite (BF) ou le point F appartient à la droite (BE).
7. Les coefficients directeurs des droites (BE) et (BF) sont égaux.
8. Le point E est le point d'intersection des droites (BF) et (AE).
9. La somme des distances BE et EF est égale à la distance BF.

Pour calculer les distances les élèves ont majoritairement utilisé les coordonnées des points. Mais les élèves de Première avaient à leur disposition les formules d'Al-Kashi. Deux élèves de seconde sont allés les chercher sur internet.

Le triangle (DEF) est rectangle isocèle en D, donc EF = DF $\sqrt{2}$ = $\sqrt{2}$, si l'on prend un carré de côté 1, ce qu'ont spontanément fait les élèves.

Les triangles (ABE) et (CFB) sont isocèles en respectivement A et C. Les formules d'Al-Kashi appliquées à ces deux triangles nous donnent les deux longueurs manquantes.

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2\,AB \times AE \cos \hat{A}$$

$$BE^2 = 1 + 1 - 2\cos 30°$$

$$BE^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$BE = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$BF^2 = CF^2 + CB^2 - 2\,CF \times CB \cos \hat{A}$$

$$BF^2 = 2 + \sqrt{3}$$

$$BF = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Il reste donc à montrer que $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2}$.

Ceux qui ont essayé d'utiliser l'inégalité triangulaire sont restés bloqués à cette étape. Les possesseurs de calculatrice de calcul formel, ont affirmé que les deux nombres étaient égaux. Les autres ont regardé les valeurs données par la calculatrice et ont conclu que les valeurs approchées étant identiques, il y avait de très fortes chances que les nombres soient égaux, tout en ajoutant que ce n'était pas une démonstration !

On démontre que $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}$.

Les deux membres de l'égalité sont des nombres positifs, on peut donc élever les nombres au carré. Montrer l'égalité précédente revient à montrer que

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2 .$$

Effectivement en développant le terme de gauche, on obtient 2.

Les calculs sont intéressants, ils permettent de revenir sur ce qui pose problème en calcul algébrique : montrer une égalité, effectuer des calculs avec des racines carrées, utiliser les identités remarquables(1).

Dans le repère (B, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$) :

10. Les coefficients directeurs des droites (BE) et (BF) sont égaux. Le fait de choisir l'origine du repère en B simplifie considérablement les calculs.

Une seule élève de Première S, Raphaëlle, a pensé à prendre ce repère.

Trigonométrie :

11. Soit E′ le projeté orthogonal de E sur (BC), le triangle (BEE′) est rectangle en E′, on peut calculer $\tan\hat{B}$. Soit F′ le projeté orthogonal de F sur (BC), le

(1) N.D.L.R. Le calcul proposé est classique et formateur. En voici un autre : $2+\sqrt{3}$ fait songer à $4+2\sqrt{3}$ qui n'est autre que $\left(\sqrt{3}+1\right)^2$. D'où la méthode suivante :

L'égalité à établir équivaut, en multipliant par $\sqrt{2}$, à $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} + 2$, soit à $\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} + 2$, c'est-à-dire à $\sqrt{3}+1 = \sqrt{3}-1+2$, ce qui est vrai.

Ce calcul demande :

– d'une part, une bonne pratique de calculs numériques élémentaires,

– d'autre part, une bonne simplification de $\sqrt{a^2}$, ici pour $\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}$ qui pourrait s'écrire aussi $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$, toujours simplifié en $\sqrt{3}-1$. Il peut être intéressant de saisir cette occasion d'en parler.

triangle (BFF′) est rectangle en F′, on peut calculer $\tan \widehat{B}$. Les deux nombres sont égaux, donc les angles sont égaux.

Théorème de Thalès :

12. On utilise les points E′ et F′ définis de la même façon que précédemment. On appelle H le point d'intersection des droites (BF) et (EE′). Puisque les droites (FF′) et (HE′) sont parallèles, nous en déduisons, grâce au théorème de Thalès, la longueur du segment [HE′]. Et nous pouvons en déduire que les points H et E sont confondus.

Le théorème de Thalès n'a été utilisé que par un seul élève de Première S et avec de gros problèmes de rédaction.

Utilisation d'une rotation :

13. Une élève de Première S, Magalie, a utilisé la rotation de centre D et d'angle 60°, dans le sens rétrograde. Par cette rotation, F a pour image C, E a pour image A et B a pour image un point nommé A′. Ainsi démontrer que les points F, E, B sont alignés, revient à démontrer que les points C, A, A′ sont alignés. Le triangle (DBA′) est équilatéral. Il admet donc pour axe de symétrie la médiatrice du segment [BD] qui est [AC]. A′, A , C sont donc alignés.

Utilisation d'un puzzle :

14. L'aire du quadrilatère (DFBA) est égale à la somme des aires du triangle (DFE) et du quadrilatère (DABE).
L'aire de (DFE) est égale à la moitié de l'aire d'un carré de côté 1, elle est donc égale à $\dfrac{1}{2}$.
L'aire de (DEBA) est égale à la somme de l'aire de (DEA) et de (AEB).

$$\text{Aire(DEA)} = \frac{\text{DA} \times h}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Aire(ABE)} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \widehat{A} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\text{Aire(DFBA)} &= \text{Aire(DFC)} + \text{Aire(DCBA)} - \text{Aire(CFB)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 - \frac{\text{BC} \times h}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 - \frac{1 \times \frac{1}{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Nous avons bien

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}.$$

Commentaires :

Les élèves ont tous traité les démonstrations 1 ou 2 , et la 5.

Il est assez surprenant de voir que les élèves font, en toute bonne foi, des erreurs de calcul qui se compensent mutuellement et finalement ça marche, les vecteurs sont bien colinéaires, le point est effectivement sur la droite, malheureusement nous n'avons pas gardé de traces de ces erreurs.

C'est un travail qui est beaucoup mieux rédigé par les élèves de Première qui pensent davantage à utiliser des pistes très différentes. Il a été beaucoup plus difficile à corriger en seconde. Il faudrait sûrement leur demander un travail plus structuré, qu'ils annoncent par exemple la méthode utilisée et qu'ils mettent en évidence les étapes de la démonstration. Les élèves de seconde ont tendance à tourner autour de la même idée, certains ont fait trois démonstrations avec le même principe : « un point appartient à la droite déterminée par les deux autres » ou « les vecteurs sont colinéaires ».

Un tel devoir demande plus d'initiative que les devoirs habituels. La nécessité de rédiger est impérative puisque les élèves vont devoir proposer des méthodes et en organiser les étapes.

Il permet de prendre conscience que l'on peut aborder une question de manières très différentes, puisque les outils ici peuvent être ceux de géométrie « pure » ou d'algèbre, il permet de gommer la scission que l'on peut observer chez les élèves entre ceux qui aiment l'algèbre et ceux qui préfèrent la géométrie. Il leur montre la diversité des outils mathématiques dont ils disposent déjà à leur niveau et leur utilité. Il permet de réinvestir un bon nombre de notions rencontrées depuis la classe de cinquième.

Ce travail en commun nous a ouvert des pistes de réflexion. Nous le reprendrons très certainement mais sous une autre forme. Il pourrait faire l'objet d'un challenge entre classes. Il est très difficile de noter ce type de devoir, même avec des lettres, mais nous pourrions en revanche remettre des distinctions comme le prix de la plus grande originalité, de la plus grande diversité, de la meilleure rédaction, de la meilleure présentation, …

Le constat est toujours le même face à ce type de travail, qui reste dans l'esprit des narrations de recherche même si les démonstrations sont rédigées de façon classique. La surprise devant l'imagination de nos élèves est toujours au rendez-vous. Nous nous plaignons du manque d'investissement de nos élèves dans le travail que nous leur demandons et pourtant, dans cette recherche, ils sont capables d'y passer des heures.