5 fois 3 est-il égal à 3 × 5 ?

Une question qui n'a l'air de rien, qui partage les enseignants et qui nécessite plusieurs points de vue

Cet article est destiné à la réflexion des enseignants des premier et second degrés. À faire lire aux instituteurs et professeurs des écoles sans modération.

1. Introduction

Cette question peut surprendre certains lecteurs, elle est pourtant un sujet de préoccupation pour la commission du premier degré de l'A.P.M.E.P. pour les raisons suivantes :

- la question est souvent posée dans les stages de formation continue d'enseignants du premier degré ;
- plusieurs définitions de 3 × 5 coexistent ;
- il est difficile de choisir une introduction de la multiplication en CE1 ;
- comment se positionner par rapport à certaines écritures d'élèves ?
- certains lycéens éprouvent des difficultés à entrer dans les procédures de dénombrements qui relèvent de la multiplication.

Une hypothèse est qu'une introduction ambiguë du signe « × » n'aide pas les élèves à installer le sens de la multiplication, puis les sens de ce signe, et crée des blocages qui perdurent. C'est pourquoi plusieurs membres de la commission du premier degré (Danièle Arhel, Richard Cabassut, Serge Petit et Nelly Roussignol) proposent leurs points de vues (« je » ne désignera donc pas toujours la même personne) et tentent d'expliciter des implicites de l'enseignement à travers cet article collectif.

2. Convention d'écriture et de lecture

Une convention est arbitraire et elle n'est pas toujours unanime, par exemple :

- soixante-dix se dit septante en Belgique et en Suisse francophone ;
- 54,35 est écrit 54.35 par les Anglo-saxons et sur les calculatrices ; il peut aussi être écrit à l'aide de multiples fractions ;
- la façon de montrer les nombres sur les doigts n'est pas la même dans tous les pays ;
- la signification du mot chiffre en maths est différente de celle utilisée par le grand public.

En algèbre, en langue européenne, l'écriture de l'opération a T b avec la loi truc T se lit dans l'ordre de l'écriture européenne : a T b se lit donc « a truc b ». Et a priori, a T b n'est pas égal à b T a, si T n'est pas commutatif. Exemples :

- dans l'enseignement secondaire, pour la loi de composition de deux fonctions « o » qui n'est pas commutative on écrit $g \circ f$ et on lit g rond f[1] ou « g après

(1) Et encore, il paraît que certains professeurs écrivent $g \circ f$ et lisent f rond g pour respecter l'ordre effectif d'action des fonctions.

f ». Dans certains papiers de recherche en anglais[2] $g \circ f(x)$ s'écrit xfg du fait qu'on commence par appliquer à x la fonction f et ensuite la fonction g.

- la multiplication externe d'un vecteur $\vec{u}$ par un scalaire k s'écrit $k \cdot \vec{u}$ et se lit k fois $\vec{u}$, mais souvent dans les programmes français on précise $\vec{u}$ multiplié par k (multiplication externe de $\vec{u}$ par k). Sur ce dernier exemple, on notera que, en France, l'usage est de noter différemment la multiplication externe $k \cdot \vec{u}$ notée encore $k\vec{u}$ mais jamais $k \times \vec{u}$, le signe « × » étant réservé à la multiplication interne alors que le signe « · » peut être utilisé pour les deux.

La convention la plus répandue est de lire dans l'ordre d'écriture. C'est une simple convention de confort. On sait qu'elle n'est pas toujours respectée : par exemple pour la lecture des nombres, en allemand, 28 se lira « acht und zwanzig » qui est l'ordre inverse du français « vingt-huit ». En mathématiques, il peut donc exister des pratiques différentes, d'un pays à l'autre[3] ou d'un domaine à l'autre ou d'une époque à l'autre.

3. Le problème de la commutativité

1. **Quand l'un ou les deux facteurs sont des grandeurs de nature différentes** (longueur, masse, prix, durée, …), les deux éléments du produit ont un statut différent :
   - avec 2 kg de fruits à 5 €/kg on a moins de fruits qu'avec 5 kg de fruits à 2 €/kg bien que le coût soit le même ;
   - acheter 5 cahiers à 3 € l'un est une situation différente d'acheter 3 cahiers à 5 € l'un ;
   - un immeuble de 3 étages ayant 7 appartements par étage n'est pas équivalent à un immeuble de 7 étages ayant 3 appartements par étage pour l'architecte comme pour les habitants même si le nombre d'appartements est le même ;
   - 3 caisses de 5 bouteilles et 5 caisses de 3 bouteilles c'est pareil du point de vue du nombre de bouteilles mais ce n'est pas la même chose, matériellement :
     – pour les déplacer, les poids ne seront pas les mêmes ;
     – pour une livraison, ce n'est pas du tout équivalent ; si on a 5 caisses, on peut approvisionner 5 clients, mais pas s'il y a 3 caisses.

   Cela fonctionne un peu comme une multiplication externe avec deux nombres ayant des rôles différents, un nombre de caisses (qui joue le rôle de scalaire), et un nombre de bouteilles, le résultat de la multiplication étant un nombre de bouteilles 3 fois 5 et 5 fois 3, ce n'est pas la même chose du point de vue du geste, ou de la disposition, mais c'est la même chose du point de vue du nombre de bouteilles.

(2) Et peut-être même en français. Qui aurait des références?
(3) Et même dans le même pays.

2. **Dans le cas où l’on fixe l’un des facteurs**, la multiplication peut être considérée comme une fonction d’une variable, appelée dans les manuels fonction « multiplier par ». Cet aspect est très présent dans les problèmes, c’est le cas où l’un des facteurs ne subit pas de modifications et ne fait pas l’objet de conditions particulières, les valeurs prises par la fonction sont proportionnelles aux valeurs prises par la variable : 2 boules par joueur, combien de boules pour 3, 4, 5, …, n joueurs ?

3. **Lorsque le support pédagogique est un quadrillage**, a lignes sur b colonnes représentent le même nombre de carreaux que a colonnes sur b lignes ou que b colonnes sur a lignes.
   Le nombre de carreaux d’une grille donnée est indépendant de la façon de la considérer :
   - Il est indépendant de la façon dont on tient la grille, de son orientation. On peut la regarder telle quelle, ou la faire pivoter de 90° ou d’un tout autre angle d’ailleurs…
   - Il est indépendant de la perception que l’on a de la grille. On peut la parcourir des yeux ligne par ligne, de gauche à droite (comme lorsqu’on lit un texte en français). On peut aussi la parcourir des yeux, colonne par colonne, …

   Il s’agit là du produit de deux grandeurs de même nature, des longueurs. La « multiplication » est un moyen d’obtenir le nombre de carreaux qui perd de vue la procédure utilisée. Cela règle le problème de la commutativité avant même l’écriture de $a \times b$. Ces situations conduisent à avoir indifféremment une réitération de a éléments ou de b éléments indépendamment de toute convention sur un sens d’écriture et un sens de lecture de l’expression mathématique, ou même sans convention aucune de sens d’écriture. Si elles permettent d’aborder un certain nombre de propriétés de la multiplication (commutativité et distributivité de la multiplication sur l’addition), elles ne sont pas les plus couramment fréquentées.

4. La multiplication

Le mot « multiplication », comme d’autres mots (addition, soustraction, pollution, investigation, …), me semble indiquer clairement un processus et tout processus implique un marquage temporel qui permet de le décrire, éventuellement de le reproduire à l’identique. Une grosse difficulté que nous rencontrons pour parler de processus en voulant les illustrer, souvent par des schémas, est le fait qu’une image se comporte comme une photographie et fixe le temps à la date de sa prise de vue. Bien sûr, on peut ajouter quelques codes à l’image pour faire germer l’idée d’une vitesse, d’un mouvement, mais ces codes se surajoutent un peu artificiellement et ne permettent pas une « bonne » représentation du phénomène en train de se dérouler.
Nous touchons donc ici aux modes de représentation et, pour moi, un processus ne peut se représenter par une seule image et encore moins par l’image de son résultat. Bien sûr un enregistrement vidéo résoudrait éventuellement le problème d’expression d’un processus, mais en poserait d’autres et sortirait du champ de notre travail qui se situe au niveau des mots et des signes pour désigner … un résultat ? Un processus ?

5. Le mot « fois »

Fois, indique, résonne en moi, non pas comme un terme mathématique, mais comme un mot usuel de la langue courante, bien souvent utilisé par les élèves : « *la dernière fois que je l'ai vue…* », « *vous prendrez ce médicament trois fois par jour* », « *vous en prendrez deux à chaque fois* », « *plusieurs fois* », « *une bonne fois pour toutes* », « *une fois n'est pas coutume* », « *des fois que…* ».
Il conviendrait d'analyser ce type d'expressions qui ne révèlent pas toutes les mêmes significations du mot fois…, mais je ne m'attarderai pas sur ce point pour aller plus directement à mon propos.
Ces expressions indiquent presque toutes une relation avec « l'axe des temps ». Elles ancrent des processus, des actions, dans le temps. C'est, à mon sens, là qu'il faut retrouver en priorité les significations mathématiques du mot « fois », c'est en tous cas une question à ne pas éluder car ce mot « fois » est déjà souvent utilisé par les enfants qui se forgent un sens qui interférera bientôt avec le « même » mot utilisé en mathématiques.
Ce petit nom féminin *fois* est ainsi souvent utilisé pour participer à la description d'une action qui se déroule dans le temps, or, en mathématiques, on ne semble s'intéresser qu'à un résultat. Nous sommes dans deux mondes différents : d'une part celui de l'action qui se déroule dans le monde réel, concret, et que nous décrivons avec le français usuel ; d'autre part, quand il s'agit du produit de deux nombres, nous nous plaçons dans un modèle mathématique qui est certes né du concret, mais n'est plus celui-ci.

Des lapins distribuaient des œufs

On sait bien que les lapins ne pondent pas d'œufs, mais à Pâques … ils en distribuent…
Deux lapins distribuent des œufs, chacun dans leur famille. Dans chacune des familles il y a trois enfants. Les deux familles s'appellent Gris et Roux.
LapinGris distribue les œufs dans la famille Gris, LapinRoux dans la famille Roux.
LapinGris et LapinRoux ne procèdent pas de la même manière.
LapinGris a repéré trois petits nids de paille dans le jardin. Il dépose cinq œufs dans le premier nid, puis cinq œufs dans le deuxième nid, puis, enfin, cinq œufs dans le dernier nid. Il a distribué ***trois fois cinq*** œufs.
LapinRoux, lui, procède autrement. Après avoir repéré les trois nids de la famille Roux, il a posé son sac d'œufs près du mirabellier, il a pris trois œufs dans ses petites pattes, et s'en est allé les déposer dans les nids. Il a déposé un œuf dans le premier nid, puis un œuf dans le deuxième nid, puis, enfin, un œuf dans le troisième nid. Il vient de déposer trois œufs.
Après cette première tournée des nids, il revient à son sac, reprend trois œufs et recommence : un œuf pour le premier nid, un œuf pour le deuxième nid, un œuf pour le troisième nid… Il retourne près du mirabellier et poursuit le même processus jusqu'à distribution de tous les œufs.
LapinRoux a déposé ***cinq fois trois*** œufs.

On voit ici que « ***cinq fois trois*** » ne décrit pas le même processus que « ***trois fois cinq*** ».
On peut alors se poser la question suivante : « Lequel des deux lapins a déposé le plus d'œufs ? ». Pour le savoir, il suffit de comparer les résultats, c'est-à-dire le nombre total d'œufs distribués par chacun des lapins. Bien des procédures permettent de répondre à la question. On peut compter un à un les œufs déposés par chacun des lapins, on peut effectuer des correspondances un à un, on peut disposer les œufs en rectangle … (mais est-ce vraiment si naturel ?) et constater que l'on a, dans chacun des cas un rectangle de 3 œufs sur 5 œufs[4] … donc le même nombre d'œufs ; ou mieux encore dire que **chacun a déposé cinq œufs dans trois nids**, l'un en trois fois et l'autre en cinq fois. Il s'agit, dans ce dernier cas d'une re-formulation du résultat qui oublie totalement le processus qui l'a engendré, mais qui permet de conclure à l'égalité sans aucune manipulation.
On voit ici que les **deux processus différents** décrits respectivement par « trois fois cinq » et par « cinq fois trois » produisent **le même résultat**.
Si j'osais, j'écrirais volontiers : (**« trois fois cinq » = « cinq fois trois »**) **en langue naturelle**, mais j'ai trop peur des réactions de mes collègues très matheux pour le faire !
Comment écrire le nombre total d'œufs déposés ?
Si l'on n'observe que les nids contenant les œufs, dans chacun des deux cas, on voit trois tas de cinq œufs, comme résultat des distributions. On dit souvent, pour décrire ce que l'on voit là, qu'il y a « trois fois cinq œufs ».
On prend bien conscience ici que les deux expressions « trois fois cinq » et « cinq fois trois » qui diffèrent fondamentalement dans la langue naturelle, parce qu'elles décrivent des actions différentes, conduisent au même résultat numérique.
Le terme fois me semble donc s'inscrire dans le temps, du côté de la langue naturelle[5], pour décrire un processus, alors qu'en mathématiques, le temps aura disparu et le terme fois[6] sera utilisé pour désigner une quantité (état final obtenu par l'un ou l'autre processus).

Comment introduire ce mot « fois » dans son sens mathématique ?

Comment alors introduire le mot « **fois** » comme outil pour désigner une quantité ?
Ne pourrait-on pas prendre des nids (par exemple 17 nids) ; dans chaque nid les lapins (enfants de la classe) doivent déposer, par exemple, 23 œufs. Mais ils ne disposent pas de ces œufs et doivent les commander à la maîtresse. Pour ce faire, ils disposent de jeux d'étiquettes qui pourraient ne comporter chacune qu'un des nombres de 15 à 25 et ils devraient utiliser celles-ci et uniquement celles-ci pour exprimer tous les nombres de leurs commandes. Chaque élève passerait commande.

(4) mais au fait, a-t-on le droit de dire des choses pareilles … un rectangle dont la longueur du côté est trois œufs ?
(5) en français. Il serait tout à fait intéressant de faire un détour par d'autres langues et de s'intéresser à la manière de dire fois à la fois dans l'histoire du lapin et dans l'expression mathématiques du résultat.
(6) quand et de quelle manière ce terme « fois » a-t-il été introduit en mathématiques pour désigner un état statique ?

On mettrait ensuite en commun les différentes expressions utilisées par les élèves pour commander les œufs.
On pourrait penser que l'évocation de la situation pratique de distribution permettrait aux élèves de dire soit « *donne-moi dix-sept **fois** vingt-trois œufs* » soit « *donne-moi vingt-trois **fois** dix-sept œufs* ». Le maître (la maîtresse) donnerait alors en une seule fois et en bloc la quantité demandée. Dans ces deux cas les nids seraient correctement remplis. Il conviendrait d'attacher de l'importance à la description des processus par les élèves eux-mêmes afin de mettre en évidence ce qui a été vu ci-dessus : le mot « **fois** » permet de décrire en parlant ou en écrivant deux processus différents mais le résultat numérique est le même, même si un seul des deux processus est directement lisible sur le résultat(7).

L'équipe d'ERMEL CE1(8) propose le jeu des enveloppes(9) (passons sur les conditions de mise en œuvre). On peut récapituler les résultats obtenus, en utilisant le mot fois pour raccourcir les longues additions. Ce mot « **fois** » est ici à prendre avec un sens usuel :

3 fois 2 jetons pour 2 + 2 + 2 jetons,
8 fois 3 jetons, pour 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 jetons,
7 fois 4 jetons, pour 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 jetons,
etc.

Les enfants trouvent les résultats en effectuant les additions.
Après avoir fait (ou imaginé avoir fait) beaucoup de tirages d'enveloppes, donc beaucoup de calculs, les élèves remarqueront sûrement que des résultats sont égaux. Parmi les résultats égaux, ils remarqueront peut-être que lorsqu'on échange le nombre d'enveloppes et le nombre de jetons par enveloppe, le résultat ne change pas, autrement dit :

5 fois 3 et 3 fois 5, c'est numériquement pareil,
8 fois 3 et 3 fois 8, c'est numériquement pareil,
etc.

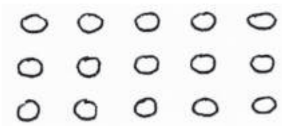
On peut alors inciter les enfants à justifier ce qu'on vient d'observer. Pour cela on peut leur dire de sortir en tas séparés les jetons de 5 enveloppes de 3 jetons, et ajouter qu'il faut comprendre pourquoi il y a le même nombre de jetons que dans 3 enveloppes de 5 jetons. Il faut trouver une explication.

L'argument utilisé doit convaincre qu'il y a égalité quels que soient les nombres qu'on échange.
Au moins deux types d'arguments peuvent être apportés :

(7) Dans le cas des lapins il s'agit de celui de LapinGris.
(8) Plus précisément, Apprentissages numériques en CE1 rédigé par l'équipe INRP de recherche sur les mathématiques à l'école élémentaire, Hatier, 1993 (1ère édition), 2001 (édition en euros).
(9) Dans ce jeu, on tire plusieurs enveloppes d'un même type, c'est-à-dire plusieurs enveloppes contenant le même nombre de jetons.

* Une possibilité est de se placer du côté de l'action : Comment passer d'une répartition à l'autre ? Une réponse est « Si je prends un jeton dans chaque tas, ça me fait des paquets de 5 jetons. Et comme j'ai 3 jetons par tas, ça me fera 3 paquets. »
* Une autre possibilité est d'adopter un point de vue statique : il faut proposer une organisation des jetons. On ne sera satisfait que lorsque la disposition proposée sera (5 lignes et 3 colonnes) ou (5 colonnes et 3 lignes). En effet sur une telle disposition, on peut aussi bien voir 5 paquets de 3 jetons que 3 paquets de 5 jetons(10). Une telle présentation fait donc facilement apparaître la commutativité de la multiplication.

Par exemple



Quel que soit le mode de présentation on aboutit à 5 fois 3 = 3 fois 5.

6. Introduire le signe « × », une dialectique difficile entre l'oral et l'écrit

À l'issue de l'activité précédente, une fois que tout le monde est convaincu qu'en langage mathématique 5 fois 3 = 3 fois 5 (etc.) on peut dire que les « grands » notent le nombre ainsi désigné aussi bien par 5×3 que par 3×5, mais il a fallu beaucoup parler avant d'introduire le signe « × ». Remarquons alors que 5 fois 3 c'est initialement $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ du fait de la signification du mot fois, alors que 5×3 c'est aussi bien $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ que $5 + 5 + 5$ ou le nombre de carreaux d'un quadrillage à 5 lignes et 3 colonnes ou à 5 colonnes et 3 lignes ou …

D'autres introductions du signe « × » sont possibles. De fait, selon les livres et les classes, trois significations « initiales » lui sont données :

Première signification : $3 \times 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$;

Deuxième signification : $3 \times 5 = 5 + 5 + 5$;

Troisième signification : 3×5, tout comme 5×3, c'est le nombre de cases d'un tableau à 5 lignes et 3 colonnes ou d'un tableau à 3 lignes et 5 colonnes.

Si l'on démarre par la première ou la deuxième signification, il faudra à un moment donné installer la commutativité. C'est à ce moment-là qu'il faudra être très attentif aux mots et aux écritures de chacun. Que dira-t-on à un élève qui écrit $3 \times 5 = 5 + 5 + 5$? L'égalité ne correspond pas à la définition, mais les nombres écrits de part et d'autre du signe égal étant égaux, on ne peut qu'accepter cette écriture. On voit bien que la définition initiale sera finalement oubliée.

Les instructions officielles de 1945 imposaient la première signification. Les programmes de 2002 n'imposent plus de convention, on a peut-être compris pourquoi. Le plus étonnant, c'est que les documents d'application des programmes 2002 ne parlent pas des difficultés que nous évoquons. Faut-il sensibiliser les élèves à l'aspect conventionnel de l'écriture ou de la lecture ? Cette sensibilisation trop

(10) Remarquons que l'on n'a pas besoin, comme on le voit souvent faire, de « tourner » le quadrillage ainsi obtenu d'un quart de tour pour conclure.

précoce ne risque-t-elle pas de déstabiliser l'élève à la recherche de sens ou au contraire a-t-elle des chances de l'aider ?

Autre exemple possible de progression si on choisit la première ou la deuxième signification du signe × :
Première étape : poser une convention. Les programmes officiels de l'école primaire indiquent clairement que les définitions sont fonctionnelles et non pas formelles. On pourrait donc proposer de lire dans l'ordre où on écrit (ou d'écrire dans l'ordre où l'on énonce) : « $a \times b$ » se lit « a fois b » ou « a multiplié par b ». Cette lecture ne présuppose en aucune manière la commutativité : c'est une pure convention arbitraire de lecture. On explique ensuite qu'un autre maître peut proposer d'autres conventions : 3 × 2 sera lu 2 multiplié par 3 ou 3 multiplié par 2, 3 fois 2 ou 2 fois 3, 3 par 2 ou 2 par 3, … en essayant éventuellement de justifier ces conventions (usage, référence à une situation concrète, addition réitérée, …).
Deuxième étape : établir la commutativité de la multiplication donc considérer les différentes définitions comme équivalentes.
Troisième étape : revenir éventuellement sur l'aspect arbitraire de la convention choisie à l'aide d'exemples (cf. § II).

7. Conclusion

Les mathématiciens, et sans doute plus généralement les adultes, font une lecture automatique de « × » Ils savent que cette opération est commutative. Ils ont oublié la première définition qu'ils ont rencontrée. Il n'en est pas de même des élèves de CE1 qui rencontrent le signe « × » pour la première fois. C'est pour eux que l'on se doit de réfléchir à tout cela. On sait qu'on ne pourra pas éviter des abus de langage, mais on a à faire un effort pour les éviter au départ, et surtout expliciter les implicites quand un élève se trompe … pour limiter les dégâts initiaux.

Cette promenade dans le monde de la multiplication ne fait que commencer, il resterait à
– parler :
- de l'utilisation de la commutativité de la multiplication pour calculer plus rapidement, alors même qu'on ne dispose pas encore du répertoire multiplicatif ;
- de l'utilisation de la commutativité de la multiplication pour établir la règle du produit par 10, 100, 1000 ;
- de la façon de structurer, écrire et dire les tables de multiplication ;
- de la façon de présenter, sans la nommer, l'associativité de la multiplication ;
- des premiers questionnements sur le cas où un facteur n'est pas entier ;
- de l'histoire de l'enseignement de "(" ;
- de la façon de présenter la distributivité de la multiplication sur l'addition ;
- etc.

– analyser les progressions dans les manuels scolaires ou livres pour enseignants ;
– donner la parole aux enseignants dans les écoles pour leurs réactions et/ou témoignages.

Les auteurs espèrent que cet article suscitera des réactions et de nouveaux articles...