Les problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.
Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes », … si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice. La rubrique s'efforce de rendre compte de la pluralité des méthodes proposées par les lecteurs, des généralisations des problèmes… Entre la publication d'un énoncé et la publication de sa solution, un bulletin intermédiaire fournira des pistes pour faciliter l'étude du problème et rendre la rubrique davantage accessible.
Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Solutions et énoncés sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,
9 quai de la Seine,
75019 Paris.

Indications sur des énoncés déjà publiés

Énoncé 307 *(peser avec une balance Roberval) :*

3 poids suffisent pour M = 13 (on rappelle que les poids peuvent être placés sur les deux plateaux de la balance).

Énoncé 308 *(composé de rotations axiales d'un tiers ou quart de tour) :*

Que peut-on dire des grandes diagonales d'un cube ?

Énoncé 309 *(triangle dont l'orthocentre est centre du cercle inscrit de ABC) :*

Ce même point est l'orthocentre d'un autre triangle et le centre d'une similitude intéressante.

Nouveaux énoncés

Énoncé nº 310 (Michel LAFOND, 21-Dijon)

On dit qu'un entier $n \in \mathbf{N}^*$ est magique si on peut placer les entiers de 1 à n dans n cases d'un carré de côté c de manière que les c lignes, les c colonnes et les deux diagonales du carré aient toutes la même somme.
Démontrer que la suite croissante des entiers magiques commence par :

$$\{1, 8, 9, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, \dots\}.$$

ÉNONCÉ nº 311 (Pierre DUCHET et Jean MOREAU de SAINT-MARTIN, 75 - Paris)

Soit (Δ) une droite et O un point extérieur à la droite. On considère un nombre indéterminé de points A_i de (Δ) tels que les cercles inscrits dans les triangles OA_iA_{i+1} aient tous même rayon r. Démontrer que quel que soit k, les cercles inscrits dans les triangles OA_iA_{i+k} ont tous même rayon r_k (problème de l'ex-voto japonais).

Solutions

Énoncé nº 301 (Michel BATAILLE, 76-Rouen)

Soient α, β et γ les angles d'un triangle. Quelles sont les fonctions continues $f :]0, \pi[\to]0, +\infty[$ vérifiant pour tout triangle :

$$f(\alpha)\cdot f(\beta)\cdot f(\gamma) = f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\ ?$$

SOLUTION

Michel BATAILLE avait proposé cet énoncé avec une première question : montrer que la relation est vérifiée pour :

$$f(x) = \frac{\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1-\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}.$$

Dans le bulletin 452, p. 451, j'ai donné comme indication : « utilisons la fonction tangente… ». Mais il existe plusieurs manières d'utiliser la fonction tangente. À elle seule, elle vérifie bien la relation : $f(\alpha)\cdot f(\beta)\cdot f(\gamma) = f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)$, mais elle n'est pas définie de $]0, \pi[\to]0, +\infty[$.

J'ai reçu des réponses de Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Alain CORRÉ (03-Moulins), Christine FENOGLIO (69-Lyon), René MANZONI (76-Le Havre), Gérard PRIGENT (93-Dugny), Pierre RENFER (67-Ostwald) et Pierre SAMUEL (92-Bourg-la-Reine).

Marie-Laure Chaillout, René Manzoni et Pierre Samuel démontrent qu'à toute valeur $c \geq 1$ correspond une et une seule fonction f vérifiant l'hypothèse et $f(0) = c$ (ce qui équivaut à : $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1+\sqrt{1+c^2}}{c}$). Il reste à vérifier que pour tout c, il existe une fonction $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} + a\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$, avec $a \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right]$ vérifiant toutes ces conditions : on trouve ainsi toutes les solutions.

Mais on peut également introduire d'emblée la fonction tangente, en posant : $f(x) = \tan(g(x))$ (avec $g(x) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$). La relation de l'hypothèse s'écrit alors :

$$\tan\big(g(\gamma)\big) = -\frac{\tan\big(g(\alpha)\big)+\tan\big(g(\beta)\big)}{1-\tan\big(g(\alpha)\big)\tan\big(g(\beta)\big)} = \tan\big(-g(\alpha)-g(\beta)\big),$$

donc

$$g(\alpha) + g(\beta) + g(\gamma) = \pi$$

puisque, pour tout x, $g(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. En transformant à nouveau :

$$g(x) = \frac{\pi}{3} + h\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

on a

$$h(u) + h(v) + h(w) = 0$$

si $u + v + w = 0$. Avec $w = 0$, on prouve que la fonction est impaire ; elle vérifie donc : pour tout u et tout v,

$$h(u + v) = h(u) + h(v),$$

et par récurrence :

$$h(ku) = k \cdot h(u),$$

puis

$$h\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{h(p)}{q} = \frac{p}{q}h(1).$$

h est **Q**-linéaire, donc **R**-linéaire puisqu'elle est continue : pour tout u réel, $h(u) = au$, soit finalement :

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{3} + a\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right),$$

avec $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$ pour que f soit bien de $]0, \pi[\to]0, +\infty[$.

Était-il nécessaire de supposer f continue ? Non ! La relation de l'énoncé permet à elle seule de prouver que f est continue. Soit en montrant (sans utiliser la continuité) que f est monotone, comme le proposent Marie-Laure Chaillout et Pierre Samuel. Soit plus simplement, en remarquant que h est bornée : pour tout x vérifiant $|x| < \frac{\pi}{3}$, $|h(x)| < \frac{\pi}{3}$, donc si $|v| < \frac{\pi}{3k}$, $|h(v)| = \frac{|h(kv)|}{k} < \frac{\pi}{3k}$, ce qui prouve que h est continue en 0, et la linéarité $h(u + v) = h(u) + h(v)$ entraîne qu'elle est également continue en tout u. Obligatoirement, une fonction **Q**-linéaire qui ne serait pas **R**-linéaire, à supposer qu'il en existe (ce qui est indémontrable sans l'axiome du choix), ne serait bornée sur aucun intervalle.

Énoncé nº 302 (Ivan RIOU, 17-La Rochelle)

On dispose de 101 pièces d'or, toutes de masses strictement positives (non nécessairement rationnelles entre elles). On suppose que : à chaque fois que l'on enlève une pièce au tas, on peut diviser le tas obtenu en deux sous-tas de 50 pièces tels qu'ils aient la même masse.
Prouver que toutes les pièces ont la même masse.

SOLUTION

Ce problème peut être abordé de deux manières. J'ai reçu des réponses de Pierre BORNSZTEIN (78-Maisons-Laffitte), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Jacques CHONÉ (54-Nancy), Michel MARGUERITE (61-Domfront), Pierre RENFER (67-Ostwald), Pierre SAMUEL (92-Bourg-la-Reine) ainsi qu'une réponse fausse, et la plupart utilisaient les matrices.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{101} \end{pmatrix}$ le vecteur de composantes les masses des 101 pièces. Étant donné l'hypothèse, on peut trouver une matrice carrée d'ordre 101, M, telle que MX soit le vecteur nul : sur la i-ième ligne de M, $a_{i,j} = 1$ si à la i-ième pesée (celle qui exclut la i-ième pièce), on met la j-ième pièce sur le plateau de droite de la balance, $a_{i,j} = -1$ si on la met sur le plateau de gauche, donc $a_{i,i} = 0$ et les termes de la matrice sont tous égaux à 1 ou −1 hormis ceux de la diagonale qui sont nuls.

Si l'on prouve que le rang de cette matrice est nécessairement 100, toutes les solutions seront colinéaires, et comme (1, 1, …, 1) en fait partie, on aura nécessairement $x_1 = x_2 = ... = x_{101}$. Pour ce faire, démontrons que le déterminant de la matrice extraite par suppression de la dernière ligne et de la dernière colonne est non nul. Ce déterminant est somme d'un certain nombre de produits tous égaux à 0, 1 ou −1 : les produits égaux à 0 sont ceux qui contiennent au moins un élément de la diagonale, les autres sont les $\pm\, x_{1,\sigma(1)} \times x_{2,\sigma(2)} \times \dots \times x_{100,\sigma(100)}$ où σ est une permutation de {1, …, 100} sans point fixe.

Or le nombre de ces permutations, appelées « dérangements », est connu ! le nombre d_n de dérangements de {1, …, n} est l'entier le plus proche de $\frac{n!}{e}$:

$$d_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) \qquad (1).$$

Cela se démontre soit par la formule du crible – Jacques Choné cite Comtet, *Analyse combinatoire*, tome second, p. 11 –, soit par la relation de récurrence :

$$d_n = (n-1)\left(d_{n-1} + d_{n-2}\right) \qquad (2)$$

Pour construire un dérangement σ de $\{1, \dots, n\}$, on a $n - 1$ choix possibles pour l'image $\sigma(1)$ et pour chacun d'eux d_{n-2} dérangements vérifiant $\sigma(\sigma(1)) = 1$, d_{n-1} vérifiant $\sigma(\sigma(1)) \neq 1$. Il est clair soit sur l'expression (1) (tous les termes de la somme sont pairs sauf éventuellement les deux derniers), soit par récurrence à l'aide de (2), que d_n est pair si et seulement si n est impair ($d_{n-1} + d_{n-2}$ est toujours impair), donc d_{100} est impair et une somme d'un nombre impair de termes égaux à -1 ou $+1$ ne peut pas être nulle.

Marie-Laure Chaillout remarque qu'on peut économiser une pesée : pour prouver que les 101 pièces ont même masse, 100 des pesées ci-dessus suffisent. Pierre Bornsztein mentionne l'article « des formes bilinéaires en combinatoire », de Pierre Bornsztein et Xavier Caruso, dans *R.M.S.* 2004. Sa démonstration utilise différemment la parité : « considérons la matrice M réduite modulo 2 [à coefficients dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$]. Elle est alors égale à B − I, où B est la matrice dont tous les coefficients sont des 1 et I la matrice identité. Il est clair que B est de rang 1, et ainsi B − I est de rang au moins 100. Il s'ensuit que, modulo 2, la matrice M est de rang 100, donc il existe un mineur 100×100 non nul modulo 2, et donc non nul tout court, ce qui assure la conclusion ».

Remarquons que si (enfin !) nous remplaçons 101 par un entier quelconque n, la matrice B − I ci-dessus a pour carré : $B^2 - 2B + I = (n-2)\,B + I$, ce qui vaut I si n est pair ($n - 2 = 0$ modulo 2), B + I (= B − I) sinon. M est donc inversible si n est pair, de rang $n - 1$ sinon. Dès lors, si l'on n'impose plus aux deux sous-tas d'avoir le même nombre de pièces, il existe, certes, des solutions comme (5, 5, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1) dont les pièces n'ont pas toutes même masse : à chaque fois qu'on enlève une pièce, on peut diviser le tas obtenu en deux sous-tas de même masse. Mais, modulo 2, la matrice M d'une telle solution vaut quand même B − I, et le raisonnement ci-dessus prouve que ces solutions n'existent que pour n impair. En outre, l'espace des solutions étant alors de dimension 1, elles sont toutes colinéaires : les masses des pièces sont nécessairement rationnelles entre elles.

D'ailleurs, le fait que les masses ne soient pas nécessairement rationnelles entre elles modifie-t-il le problème ? Pierre Bornsztein signale que « la version de ce problème dans laquelle les poids sont supposés rationnels entre eux a été posée lors de la William Lowell Putnam Competition 1973 (cf. G.L. Alexanderson, L.F. Klosinski et L.C. Larson, *The William Lowell Putnam Mathematical Competition, Problems and solutions* : 1965-1984). Il est alors notable que l'on peut résoudre le problème par des arguments arithmétiques (descente infinie) ».

Et c'est de cette seconde manière que Michel Marguerite, Ivan Riou et Pierre Samuel ont abordé le problème : si les masses sont rationnelles, on peut les rendre entières en les multipliant par leur dénominateur commun. Considérons donc la plus petite solution entière (celle dont la plus grande masse est minimale) dont les masses ne sont pas toutes égales. Si une masse x_i est paire et une autre, x_j, impaire, en enlevant soit x_i, soit x_j, la masse restante est impaire et le tas ne peut pas être divisé en deux sous-tas de même masse. Donc les masses ont toutes même parité : si elles sont toutes paires, $\left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{2}\right)$ est une autre solution plus petite, si elles sont toutes impaires, $\left(\frac{x_1+1}{2}, \frac{x_2+1}{2}, \ldots, \frac{x_n+1}{2}\right)$ est une autre solution plus petite (puisque les x_i ne sont pas tous égaux à 1). On en déduit, par descente infinie, qu'il n'existe pas de solution entière dont les masses ne sont pas toutes égales.

Or comme le remarque Michel Marguerite (qui utilise un résultat de Hardy et Wright, p. 154), un raisonnement du type « approximation simultanée de réels » permet de déduire de ce cas particulier où les masses sont rationnelles entre elles le cas plus général où elles ne sont pas nécessairement rationnelles entre elles. Quitte à multiplier les x_i par un nombre suffisamment grand, on peut supposer, s'ils ne sont pas tous égaux, que deux d'entre eux vérifient $|x_j - x_k| > 1$. Divisons le pavé $[0, 1[^n$ en n^n pavés semi-ouverts de côté $\frac{1}{n}$, et plaçons-y les parties décimales de $(qx_1, qx_2, \ldots, qx_n)$ pour $0 \leq q \leq n^n$. Le principe des tiroirs permet d'affirmer que deux de ces parties décimales sont dans le même pavé : en soustrayant, on trouve un entier Q compris entre 1 et n^n ainsi que n entiers N_i tels que pour tout indice i,

$$\left|\mathrm{Q}x_i - \mathrm{N}_i\right| < \frac{1}{n}.$$

Quel que soit l'ensemble S de $\frac{n-1}{2}$ indices,

$$\left|\sum_{i\in \mathrm{S}} \mathrm{Q}x_i - \sum_{i\in \mathrm{S}} \mathrm{N}_i\right| \leq \sum_{i\in \mathrm{S}} \left|\mathrm{Q}x_i - \mathrm{N}_i\right| < \frac{1}{2},$$

de sorte que « l'arrondi de la somme est la somme des arrondis » : si l'hypothèse est vérifiée par les x_i, donc par les $\mathrm{Q}x_i$, elle l'est également par les entiers N_i (qui ne sont pas tous égaux car $|\mathrm{N}_j - \mathrm{N}_k| \geq \mathrm{Q}$), ce qui est impossible.