Résolution collaborative de problèmes ouverts[1]. Un problème babylonien…

Gérard Kuntz

Que se passe-t-il lorsqu'on soumet *le même problème* à 20 classes en les invitant à une démarche collaborative au moyen d'une plate-forme virtuelle ? Je vous propose de le découvrir. L'IREM de Montpellier offre durant quelques semaines[2] l'accès à la plate-forme de télé-formation Plei@d (http://sudest.pleiad.net) qui regroupe leurs travaux, aux lecteurs du Bulletin de l'APMEP.

Sur la page d'entrée de Plei@d, choisissez « accès à la plate-forme », puis saisissez le compte : *apmepbv* et le mot de passe : *apmep*. Vous pouvez alors explorer à loisir le travail (considérable) que l'IREM de Montpellier a réalisé au cours des années passées dans le cadre du SFoDEM (Suivi de Formation à Distance pour les Enseignants de Mathématiques).

Pour accéder au site du problème babylonien, sélectionnez « *Recherches des classes* », puis « *problème babylonien* ». Il vous reste à entrer dans la rubrique « *énoncé* » pour voir le texte du problème que l'on trouvera à la page suivante.

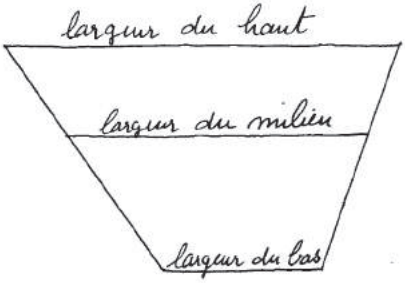
La rubrique « Forum séances » regroupe les documents proposés par les enseignants qui encadrent les classes et les travaux réalisés par les élèves.

Les 20 classes ont été réparties en *6 groupes de 3 ou 4 classes*. On trouve la composition de chaque groupe sur le site (cliquez sur le numéro du groupe). Chaque groupe est doté d'un enseignant « tuteur ». J'ai été surpris de voir que le problème était soumis à des groupes comportant des classes allant de la Seconde à la Terminale, mais aussi à des groupes composés de Sixièmes et de Cinquièmes. Une classe de Bep figure dans l'un des groupes. Marie-Claire Combes explique : « *Suivant le niveau de la classe, les attentes ne sont pas du même ordre. En règle générale nous avons toujours été surpris de l'ingéniosité des élèves et de ce qu'ils étaient capables de faire ! Il est très important de “ clôturer ” le problème en faisant bien ressortir ce qui a pu être démontré dans la classe et ce que des plus grands ont pu faire avec de nouveaux outils mathématiques* ».

(1) L'Irem de Montpellier a publié un article de réflexion générale sur cette pratique. Il a paru dans le BV n° 455 (novembre-décembre 2004) sous le titre « Cinq classes au pays de 9 et 11 ». Ses auteurs sont Combes Marie-Claire, Saumade Henri, Sauter Mireille et Théret David du « groupe Résolution Collaborative de Problèmes Ouverts » de l'Irem de Montpellier.
(2) Jusqu'au premier avril.

Problème babylonien

En Mésopotamie, les champs ont la forme de trapèzes.
Un arpenteur doit partager équitablement un champ entre deux frères : le champ est un trapèze de bases 7 et 17 : les parts sont deux trapèzes.



Vocabulaire babylonien :

- *17 est la « largeur du haut »*
- *7 est la « largeur du bas »*
- *la ligne de partage équitable (parallèle aux bases) est la « largeur du milieu ».*

Question : trouver la largeur du milieu.

Les échanges entre les classes se font *à l'intérieur* de chaque groupe On évite ainsi le trop plein de documents qui finissent par noyer ceux qui tentent d'en prendre connaissance… Les documents échangés par un groupe(3) sont enregistrés de manière chronologique, ce qui permet un suivi aisé de la démarche. Ils sont téléchargeables (cliquez sur le document, puis sur « téléchargement »).

L'équipe qui coordonne l'ensemble de l'activité propose, en fonction des réactions des classes, des « documents de relance » destinés à amorcer la pompe, à donner un coup de pouce en cas de panne et à diffuser les bonnes idées à l'ensemble des groupes.
Ces documents sont rédigés par le collègue universitaire de l'équipe, le seul à ne pas avoir de classe engagée dans le travail. Il a, de ce fait, une certaine distance par rapport à l'activité en cours.
Ils sont à la disposition des professeurs qui les utilisent, en totalité ou en partie, au moment qui leur paraît le plus approprié.

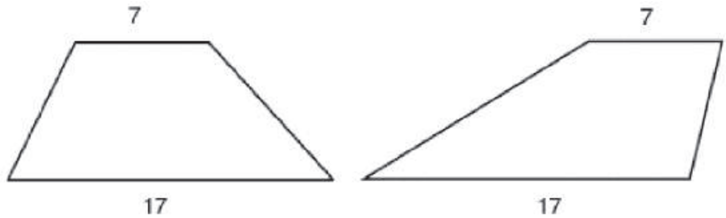
Le premier document de relance contient de nombreuses idées mathématiques. Il tient compte des hésitations et des interrogations relevées dans les documents des élèves. Il suggère plusieurs pistes :

(3) Toutes les activités des classes ne sont pas mises en ligne, car c'est un travail considérable et pas toujours pertinent. Les classes ne vont pratiquement jamais seules sur la plate-forme, même si cela est possible. Quelques rares élèves de Sixième y vont parfois tous seuls chez eux. La plate-forme est surtout utilisée pour conserver la mémoire de tout le travail réalisé.

QUELQUES PISTES POUR LE PROBLÈME BABYLONIEN

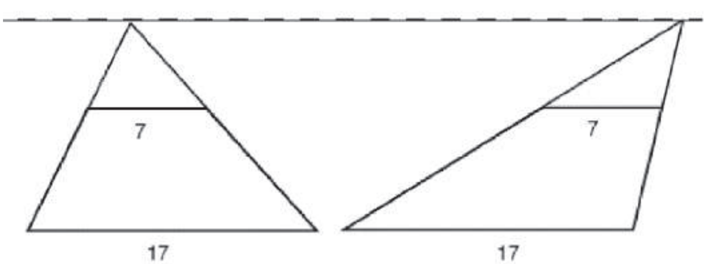
Voici quelques idées pour vous et vos élèves. Vous n'êtes pas obligés d'en tenir compte, il s'agit seulement de vous proposer des pistes de réflexion pour avancer dans ce problème…

Il ne paraît pas évident, à première vue, que les données soient suffisantes pour résoudre le problème. En effet, le trapèze n'est pas complètement déterminé. Sa hauteur, les longueurs des côtés non parallèles, sont inconnues.
Pour se faire une intuition, pourquoi ne pas prendre un trapèze au hasard (avec des bases de longueur 7 et 17) et regarder ce qui se passe ? L'expérience, par exemple à l'aide de Cabri, montre qu'en fait la solution ne dépend que de ce qui est connu : la longueur des côtés parallèles. En particulier, elle ne dépend pas de leur position… Comment cela se fait-il ?
Dans un premier temps, si la résolution du problème paraît trop difficile, il est possible d'essayer de comprendre pourquoi le problème ne demande pas de connaissances supplémentaires sur le trapèze.
Si on se donne un trapèze de bases 7 et 17, comment peut-on le transformer pour en faire un autre trapèze de mêmes bases ? On peut faire par exemple deux choses : déplacer les bases « horizontalement », ou bien « verticalement » (je suppose que les bases sont horizontales).
Tout d'abord, déplaçons « horizontalement » les côtés parallèles d'un trapèze donné. On remarque qu'alors l'aire du trapèze reste la même. D'ailleurs, un élève a donné une formule pour cette aire : c'est $A = (a + b)h/2$, où h est la hauteur du trapèze et a, b sont les longueurs des côtés parallèles. Comment retrouver ou démontrer cette formule ?



ces deux trapèzes ont la même aire

Plusieurs méthodes sont possibles. Plusieurs élèves ont eu l'idée d'utiliser Thalès en complétant le trapèze en un triangle comme ci-dessous :

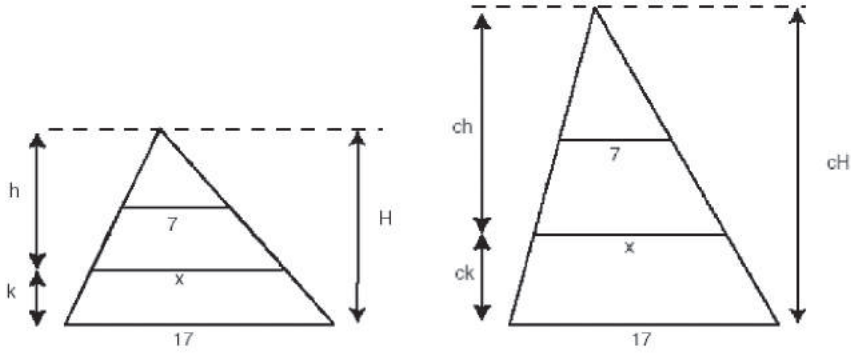


les sommets des triangles sont sur une horizontale

Pouvez-vous montrer (par Thalès) que le sommet du triangle se déplace lui aussi sur une horizontale ? Pouvez-vous en déduire, toujours par Thalès, que les aires concernées ne sont pas modifiées ?

Voici une autre méthode, plus élémentaire : en faisant une symétrie centrale du trapèze, on obtient un parallélogramme ... dont on sait calculer l'aire.

Dans les deux cas, on retrouve bien la formule donnant l'aire en fonction de la hauteur et des longueurs des côtés parallèles.
Ensuite, déplaçons « verticalement » les côtés parallèles, c'est-à-dire changeons la hauteur. Disons que la hauteur H est multipliée par une constante c. Alors remarquez que, dans le dessin ci-dessous, toutes les autres hauteurs sont multipliées par cette même constante.



Ici, x est une longueur intermédiaire entre 7 et 17, par exemple celle que l'on cherche ! L'important est qu'elle soit la même sur les deux dessins…
La conclusion de tout ceci est : *il y a certainement une solution, nous ne savons pas encore comment la trouver, mais nous savons qu'elle ne dépend pas de la forme particulière du trapèze, seulement des longueurs 7 et 17.*

À le lire, ma première réaction fut la surprise : « *ce document ferme le problème. Toutes les bonnes pistes sont indiquées !* » Réaction contredite par la faible prise en compte de ce document par les classes.
– Les figures de géométrie dynamique apparaissent bien tard dans le processus de résolution des élèves. Elles sont produites sans les conclusions fortes qu'on est en droit d'en attendre. J'ai le sentiment que Cabri ne fait pas vraiment partie de la culture mathématique des élèves et/ou que *le statut* des figures produites n'est pas clair dans leur esprit.
– Les pistes suggérées appellent *une démonstration* des propriétés proposées. Aucun document de classe n'indique une telle démarche. Le statut de ces propriétés n'est pas clair. Elles semblent avoir été *admises et intégrées à la démarche* des élèves par une fixation arbitraire de la hauteur du grand trapèze (à 10 par exemple). « Il n'y a alors plus que *deux inconnues*, la largeur du milieu et la hauteur d'un des petits trapèzes ». Ce qui est parfaitement exact, mais qui masque le fait qu'une inconnue « naturelle » est le *rapport des hauteurs* des deux petits trapèzes. Autre utilisation

curieuse (et récurrente) du document d'aide, plusieurs groupes en déduisent qu'ils peuvent sans inconvénient travailler sur des trapèzes *rectangles*. Qu'apporte cette « simplification » ? Pas grand chose, sinon une certaine sécurité psychologique(4)…

Un peu plus tard, une première synthèse des travaux des élèves est proposée aux classes. Elle aborde un ensemble de questions et de conjectures bien intéressantes. Elle souligne une importante activité *tous azimuts* des élèves.

PREMIER BILAN POUR LE PROBLÈME BABYLONIEN

Voici un premier bilan, qui essaie de faire la synthèse du travail que vous avez déposé sur le Forum.

Comme nous l'avons déjà vu l'an dernier (pour ceux qui étaient déjà avec nous), la recherche commence souvent par des ***questions****, et ces questions sont de différents types. Pour commencer, il y a des questions non mathématiques, et des questions mathématiques.*

Les questions non mathématiques. *Ce n'est pas parce qu'elles sont non mathématiques qu'elles ne sont pas intéressantes… C'est simplement qu'elles ne concernent pas les mathématiques. Cela dit, il peut être important d'y répondre, pour mieux comprendre l'énoncé, ou pour les éliminer une fois pour toutes. Voici des exemples de telles questions non mathématiques, et quelques commentaires.*

- *«* ***Qu'est-ce que signifie babylonien ?*** *» Les Babyloniens étaient des gens qui vivaient en Mésopotamie il y a longtemps… Le problème serait-il différent s'il s'agissait des Grecs, des Romains, etc. ? Certainement non : il s'agit bien d'une question non mathématique, au sens où cette information (les Babyloniens) ne jouera aucun rôle dans la suite de notre problème.*
- *«* ***Qu'est-ce qu'un arpenteur ?*** *» C'est quelqu'un qui était chargé de faire des mesures précises des lieux géographiques, des champs par exemple. Nous n'aurons pas besoin de cette information pour la résolution mathématique de notre problème…*
- *«* ***Pourquoi deux frères ?*** *» Et si c'étaient deux sœurs ? Ou deux personnes qui ne se connaissent pas ? Le problème serait-il différent ?*
- *Vous êtes-vous posé d'autres questions de ce genre ?*

Les questions mathématiques.

- ***« Quelles sont les unités ? »*** *C'est vrai que nous ne savons pas si les longueurs données sont exprimées en mètres, en décamètres, en hectomètres, ... Mais vous êtes nombreux à avoir pensé que ce n'est pas important : s'il s'agit de 7 et 17 mètres et que vous trouvez une solution égale à 13 (ou 12 ?) mètres, alors s'il s'agit de 7 et 17 décamètres, la réponse sera 13 (ou 12 ?) décamètres !*
- ***« Qu'est-ce qu'un trapèze ? »*** *Il s'agit d'une question essentielle ! Un trapèze est un quadrilatère dont deux côtés opposés sont parallèles (on les appelle les bases). Peut-être avez-vous une autre manière de dire ce qu'est un trapèze… mais nous parlons probablement tous de la même chose.*

(4) « Ils ont cherché des situations qui leur sont familières, Pythagore et la trigonométrie. »

- ***« Pourquoi un trapèze ? »*** *Il s'agit d'une question qui peut être vue comme étant non mathématique (dans ce cas, on peut répondre : parce que c'est comme ça, c'est ça notre problème) ou aussi comme étant mathématique (dans ce cas on peut répondre : parce que c'est comme ça,* **mais** *on peut se poser le même problème pour* ***d'autres formes*** *de champs, un quadrilatère quelconque, ou un quadrilatère plus particulier comme un carré ou un rectangle, ou un champ qui n'est pas un quadrilatère mais plutôt triangulaire, etc.). La question pourrait alors devenir intéressante !*
- ***« Qu'est-ce qu'un partage équitable ? »*** *Bonne question ! La plupart d'entre vous avez dit que le problème est de diviser l'aire (la surface) totale en deux parties égales, c'est-à-dire de même aire. Il s'agit d'une interprétation assez raisonnable… Une autre interprétation pourrait être de diviser en deux champs de même périmètre, pourquoi pas ? Mais pour l'instant, votre idée est la meilleure : on essaie de couper l'aire en deux.*
- ***« Mais il nous manque des informations ! Quelle est la hauteur du trapèze, quelles sont les longueurs des côtés non parallèles, quels sont les angles ? »*** *C'est là que le problème devient intéressant : a priori il manque effectivement des informations. Pourquoi ne pas essayer de faire des* ***expériences*** *avec des trapèzes particuliers, sur du papier à carreaux ou millimétré, ou bien avec le logiciel Cabri ? Dans ce cas, vous devriez vous apercevoir rapidement que la solution … ne dépend pas de la forme précise du trapèze : pourvu que ses bases soient 7 et 17, la longueur cherchée sera toujours la même !*
- ***« Quelle est l'aire d'un trapèze ? »*** *Bonne question… Certains ont donné une formule. La comprenez-vous ? Savez-vous la retrouver ? Pouvez-vous l'utiliser ?*
- ***« Peut-on appliquer le théorème de Thalès ? »*** *Pourquoi pas, cela pourrait bien être intéressant… Pour cela il faudrait avoir quelque part un triangle. Comment pourriez-vous construire un triangle à partir d'un trapèze ? Comment pourriez-vous vous servir de Thalès pour étudier des aires de trapèzes ?*

Les conjectures. *Pour l'instant, deux réponses ont été proposées :*
- *La réponse est 12, par exemple parce que 12 = (7 + 17)/2.*
- *La réponse est 13, parce qu'on le voit sur les exemples. Qu'en pensez-vous ?*

Un court commentaire de cette synthèse :
– Le besoin de suggérer, une fois encore, l'utilisation de Cabri (et tout ce qu'on peut en attendre…) souligne que l'usage de ce logiciel (ou d'un autre du même type) n'est pas spontanément dans les habitudes des élèves. Une remarque cocasse d'une des classes : « ah ! si on avait un vidéo projecteur, on utiliserait bien Cabri ! ». Plusieurs classes testent des hypothèses sur papier.
– La réponse 12 est bien intéressante. Plusieurs classes se demandent « quelles opérations » elles pourraient bien faire avec 7 et 17 … indépendamment du sens de ces opérations dans la situation. 12 est réfuté comme réponse possible par un groupe au moyen d'un argument qui mérite attention : « ça ne peut pas être bon parce que le prof a dit qu'on passerait *un mois sur ce problème* ».

J’arrête là mes réflexions en invitant le lecteur à découvrir *par lui-même* les documents mis en ligne par les différentes classes. Il y trouvera une image fidèle des élèves actuels *quand on leur laisse le temps de penser*. L’inventivité est réelle. Des questions fondamentales sont posées. Des solutions originales sont esquissées (voyez les découpages subtils proposés dans le groupe 6 par la Cinquième B de Langevin Wallon – Tarnos, puis le découpage en 5 suggéré par la Cinquième de Thuir). Voyez aussi dans le *groupe 1* les deux solutions proposées le 30 septembre par la TS 1 de Clémenceau et le 6 octobre par la Seconde 3 de Limoux. Cet affichage précoce de solution ne met-il pas prématurément fin à la recherche des classes, en particulier celles de Collège ?

Marie-Claire Combes précise : « Il a été décidé de travailler sur ce problème surtout pendant le mois de septembre *pour installer un climat de recherche* dans les classes. Les solutions des « grands » n’ont été mises sur le forum qu’à la fin septembre ou début octobre car certaines classes ont alors décidé de « clôturer le problème », en utilisant les solutions proposées. Par contre certaines classes qui ont pris la recherche en marche ont clôturé un peu plus tard. Suivant les classes, les professeurs ont travaillé ensuite sur les aires en Sixième et Cinquième, et sur le théorème de Thalès et les équations dans les autres classes. »

On le voit, le problème traité a *des effets d’entraînement sur les classes*. « Derrière le travail que nous menons se trouve aussi l’idée de faire évoluer les pratiques. » Les outils mathématiques utilisés (ou entrevus) dans la résolution du problème, et mal maîtrisés à certains niveaux sont précisés par la suite : leur utilité (« à quoi ça sert ») n’est plus mise en doute. De même, le travail avec des logiciels de géométrie dynamique est valorisé par l’usage performant que certains en ont fait : il devient alors indispensable dans l’esprit des élèves (ce n’est plus une injonction de l’enseignant) de « s’y mettre ».

Un dernier mot. Des solutions sont en ligne sur le site (« solutions du problème babylonien », puis « forum séance »). Certaines m’ont surpris. D’autres, partielles, montrent ce que de très jeunes élèves sont capables de faire malgré des connaissances limitées. Allez voir et … ajoutez-y la vôtre !

ANNEXE : le regard d’un historien des mathématiques.

Plusieurs collègues ont relu le texte qui précède et m’ont fait des suggestions que j’ai intégrées à l’article. **Jean-Pierre Friedelmeyer m’a envoyé le texte qui suit**. Je le propose dans son intégralité, au vu des importantes questions qu’il soulève.

En tant qu’ancien professeur de mathématiques, je ne peux qu’être intéressé et séduit par ce type d’expérience pédagogique. Je n’ai donc rien à ajouter au commentaire de Gérard Kuntz, en particulier lorsqu’il souligne *« l’importante activité tous azimuts des élèves » que cette expérience stimule.*

Mais en tant qu'historien, soucieux de ce que l'histoire des mathématiques peut apporter à leur enseignement, je ne peux qu'être déçu et choqué par la manière dont a été traité l'habillage historique du problème proposé. Car les auteurs ont tenu à placer le problème dans un contexte historique en le qualifiant de « *babylonien* », ce qui me convient très bien (même si l'on peut regretter l'affirmation un peu péremptoire que « *en Mésopotamie, les champs ont la forme d'un trapèze* »). Ce qui est extrêmement regrettable c'est que, contrairement à l'attitude d'incitation donnée aux élèves pour leur recherche mathématique, on ait d'emblée voulu brider leurs interrogations relatives à l'histoire suscitées par le terme « *babylonien* »
Ainsi dans le *premier bilan* sont abordées les questions non mathématiques. Pourquoi les auteurs s'empressent-ils de refermer précipitamment ce champ de réflexion que pourtant ils avaient délibérément ouvert, par des réponses tranchées et … non pertinentes ?

– *Le problème serait-il différent s'il s'agissait des Grecs, des Romains ? Certainement non.*
  Eh bien si, justement, il serait tout à fait différent, **certainement oui**.
  1. par un système de numération différent (sexagésimal en l'occurrence).
  2. par le fait que les Grecs demanderont une démonstration, une justification du résultat et de la méthode utilisée, là où les Babyloniens se contenteront d'une suite de procédures.

– *Qu'est-ce qu'un arpenteur… Nous n'aurons pas besoin de cette information…*
  Eh bien si, **nous en aurions besoin**, parce que l'arpenteur donnera les dimensions du trapèze de façon approchée et, en tout cas, se contentera d'une valeur approchée, là où le mathématicien est censé donner une valeur exacte. Le problème est d'autant plus aigu ici, que la formule qui donne la « *largeur du milieu* » ($\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ si a et b mesurent les bases) introduit en général des irrationnels, sauf si a et b sont ainsi choisis que $\dfrac{a^2+b^2}{2}$ soit un carré parfait, ce qui est le cas avec 7 et 17. On passe à côté d'une question mathématique qui pourrait beaucoup intéresser les élèves de première et terminale : pour quels entiers a et b le nombre $\dfrac{a^2+b^2}{2}$ est-il un carré d'entier ?

– *Pourquoi deux frères ? Et si c'étaient deux sœurs ?*
  C'est faire totalement abstraction des questions de culture et de civilisation soulevées justement par l'adjectif « *babylonien* », que de penser que deux sœurs puissent être concernées par un partage de champ dans la civilisation babylonienne.
  On retrouve d'ailleurs ce problème de culture dans l'interprétation de l'expression « *partage équitable* ». Les auteurs imposent le fait que « *la meilleure idée* » est le « *partage en aires égales* ». Pourquoi est-ce « *la*

> *meilleure idée* » ? Chez les Babyloniens, on trouve effectivement un tel partage dans divers problèmes, mais avec des nuances dans la notion d'équitable. Ainsi le problème traité sur la tablette AO 17 264, exposée au Musée du Louvre(5), traite du partage d'un trapèze entre six frères avec les répartitions suivantes : « *l'aîné et le second sont égaux, le troisième et le quatrième sont égaux, le cinquième et le sixième sont égaux* ». Ce partage est-il équitable ? Pour le savoir, il faudrait connaître les règles d'héritage de la civilisation babylonienne.

Ainsi, les auteurs ont manqué une excellente occasion d'articuler leur expérience pédagogique en mathématiques à une réflexion des élèves sur les conditions et l'environnement historiques du développement des mathématiques, ainsi que sur quelques problèmes épistémologiques fondamentaux ; sans compter l'impact que peut avoir un tel exercice pour favoriser chez les élèves une perception moins cloisonnée des diverses disciplines qu'on leur enseigne.
Je n'ose penser que le terme « *babylonien* » n'avait qu'un rôle « accrocheur ». Ce serait malhonnête et, hélas, représentatif d'un enseignement des mathématiques enfermé dans sa bulle disciplinaire, que je pensais révolu. Cela donne en tout cas l'impression fâcheuse que la recherche mathématique est une sorte de jeu, aux règles mal définies et à l'objectif aléatoire, mêlant questions mathématiques et non mathématiques, dont on élimine progressivement les questions gênantes. Il vaudrait mieux alors que l'énoncé soit purement mathématique, non pollué par des questions annexes auxquelles on pense que les élèves n'ont pas les moyens ou l'intérêt de répondre.
Si l'énoncé est placé dans un contexte historique, il est dommage de ne pas en profiter pour stimuler également chez les élèves les questions liées à l'histoire et à l'épistémologie des mathématiques.
On ne peut pas balancer comme cela un « habillage historique » à un problème de mathématiques, sans tenir compte de l'histoire : ces élèves que l'on conduit à résoudre un problème « babylonien » suivent aussi par ailleurs (les professeurs de mathématiques semblent facilement l'oublier) un cours d'histoire qui essaye de les sensibiliser à la différence de culture, aux questions de civilisation, au rôle joué par le temps. Expliquer que ces différences et ces questions n'ont aucune importance en mathématiques, c'est :

1. les habituer à ne pas respecter ces différences, puisque d'une certaine façon on les nie,
2. à considérer les mathématiques et plus généralement la science comme étant hors de l'histoire et donc à donner une fausse idée du développement scientifique.

---

(5) Voir M. Caveing : *La tablette babylonienne AO 17 264 du Musée du Louvre et le problème des six frères*, Historia mathematica 12 (1985), 6-24.