Ce que les philosophes ont appris des mathématiques (III)(*) ou y a-t-il un ordre dans ce monde ?

Jean-Marie Nicolle

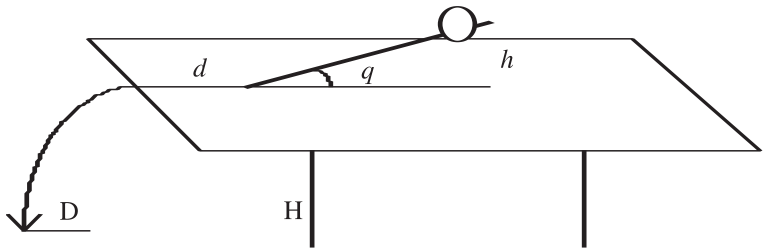
De nouvelles leçons tirées des mathématiques sont le fait des philosophes modernes qui ont également été des inventeurs en mathématiques : Descartes, Pascal et Leibniz. Ils ont trouvé dans cette expérience un modèle de démarche méthodique dont ils se sont immédiatement servi dans leur réflexion philosophique. Mais ils sont allés plus loin que les seules considérations méthodologiques, car les mathématiques peuvent nous en apprendre sur l'ordre des choses. Dans les deux premiers apprentissages que nous avons décrits lors des articles précédents, les mathématiques restaient à l'extérieur du questionnement philosophique ; elles proposaient des modèles d'objets ou de méthode, mais elles n'intervenaient pas directement dans le contenu de la recherche du philosophe. Aussi il reste à nous demander ce que les philosophes ont pu apprendre des mathématiques à l'intérieur même de leur recherche. Leur principale préoccupation va être de chercher un ordre rationnel dans le monde. En effet, à cause de la Révolution Copernicienne, l'ordre du monde révélé dans les Écritures ne vaut plus. Le mouvement moderne (XVII^{e} et XVIII^{e} siècles) va consister en partie à reconstituer un tableau du monde dont l'ordre de composition pourrait être retrouvé grâce aux mathématiques. On entrevoit l'hypothèse d'une vérité divine déposée dans les nombres, de même qu'on affirmait que cette vérité était déposée dans la Bible.

a – Le livre du monde

Ainsi, très rapidement, les philosophes modernes ont été amenés à s'interroger sur le pouvoir de connaissance de l'esprit humain permis par la puissance de l'outil mathématique dans la compréhension du monde. Prenons l'exemple de Galilée (1564 – 1642). Pour étudier la chute des corps, Galilée fait rouler des balles lisses et sphériques dans des gouttières régulières sur un plan incliné, le tout posé sur une table. Il applique sur ce dispositif la méthode des variations, c'est-à-dire qu'il identifie minutieusement les différents paramètres pour les faire varier l'un après l'autre. On peut, dans cette expérience, en discerner cinq : la distance d du bas du plan incliné au bord de la table, la hauteur H de la table, l'angle q du plan incliné avec la surface de la table, la hauteur h à laquelle il lâche la balle sur le plan incliné, la distance D qui sépare la projection verticale du bord de la table et le point de chute de la balle. Il s'agit alors de faire varier ces paramètres un à un pour isoler leur action :

(*) Les deux premières parties sont parues dans les numéros 452, p. 442-449 et 453, p. 597-604.

1 - si on fait varier l'angle q, pour une même hauteur h, les temps de chute restent identiques.
2 - si l'on fait varier l'orientation du mouvement (horizontal ou vertical), le moment de l'impact reste le même.
3 - si l'on fait varier la vitesse acquise selon la distance parcourue avant la chute, avec ou sans élan, la chute est la même.



Galilée neutralise les distances (hauteurs et longueurs), l'angle d'inclinaison et l'orientation du mouvement, et, toujours, la chute a lieu en même temps. Contrairement au préjugé commun qui fait dépendre l'accélération de la vitesse (par exemple, plus la pente est raide, plus la balle va vite, et donc plus la chute serait accélérée), c'est l'accélération qui détermine la vitesse et la distance, la vitesse par elle seule ne suffisant pas à expliquer le temps ni la distance. La vitesse n'est elle-même qu'un effet de l'accélération. Il peut alors énoncer la loi de la chute des corps : *La chute des corps s'effectue suivant un mouvement uniformément accéléré*. Cette loi s'exprime en deux formules : $v = gt$ et $x = \frac{1}{2}gt^2$, où v désigne la vitesse, g l'accélération, t le temps et x la distance parcourue. Une loi scientifique est une proposition confirmée par l'expérience qui établit des relations constantes et nécessaires entre les phénomènes observés, permettant ainsi de prévoir des phénomènes futurs. Les lettres désignent des paramètres, c'est-à-dire des phénomènes observés, contrôlés et mesurés ; entre ces phénomènes sont posées des relations mathématiques. Connaissant deux des trois paramètres, on pourra calculer le troisième. On peut remarquer que cette mathématisation du monde procède par une simplification considérable de la réalité ramenée à quelques paramètres (Galilée néglige, par exemple, les frottements ou la résistance de l'air).

La notion de loi scientifique pose cependant un délicat problème philosophique : les relations mathématiques que le chercheur découvre entre les phénomènes sont-elles de simples expressions d'un langage formel créé par l'esprit humain ou sont-elles inscrites dans les choses mêmes ? Une célèbre formule de Galilée comporte cette équivoque : *La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'univers, mais on ne peut le comprendre si l'on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à connaître les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit dans la langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot*. (Galilée, *L'essayeur*). On peut faire deux lectures de cette formule : Soit, en suivant la philosophie platonicienne, on fait des mathématiques une science de la structure de l'être, c'est-à-dire que les mathématiques permettraient d'atteindre l'ordre caché des choses. Soit on en fait un simple langage, une convention pour parler commodément des phénomènes. Dans la première hypothèse, l'objet mathématique est une relation inscrite dans l'être même ; le monde serait intrinsèquement mathématique. Mais alors, comme le fait remarquer Popper (in *Conjectures et réfutations*, chap. 15, § 3), c'est comme si l'on disait que la langue anglaise parvient à décrire les phénomènes parce que ceux-ci seraient intrinsèquement britanniques ! Dans la seconde hypothèse, l'objet mathématique est étudié pour lui-même, tel qu'il existe dans sa définition, dans l'esprit humain, indépendamment de son inscription dans la réalité. On dira que le triangle, par exemple, est un concept de l'entendement, détaché de la réalité matérielle. Par le raisonnement, l'esprit humain en étudie toutes les propriétés, sans qu'on puisse parler d'une réalité indépendante de l'esprit. Indépendant de l'expérience, mais non pas indépendant de l'esprit, l'objet mathématique serait une forme qui fait partie, intimement, de notre faculté de connaître. Le débat reste ouvert.

b – Dieu et le triangle

Comme nous le voyons, l'utilisation des mathématiques déborde largement les considérations de méthode. Descartes (1596 – 1650) s'en est même servi pour démontrer l'existence de Dieu. Il s'agit de sa preuve ontologique : si j'étudie l'idée de Dieu que je trouve en moi, j'apprends que l'essence de Dieu implique nécessairement son existence ; si Dieu n'existait pas, cela contredirait son essence ; donc, Dieu existe. Sa démonstration repose sur une analogie très serrée entre l'idée de Dieu et l'idée d'un triangle : si j'étudie l'idée de triangle que je trouve en moi, j'apprends que la somme de ses trois angles est égale à deux droits. Les mathématiques serviraient à saisir non seulement l'ordre du monde, mais aussi l'ordre du divin.

Cette analogie mathématique est à la fois forte et faible : elle est forte en ce qu'elle montre bien que le chemin qui mène à la vérité est le même pour les vérités divines et pour les vérités mathématiques. Ainsi, dans ses cinquièmes réponses à Gassendi, Descartes rappelle que le chemin vers la vérité est unique : *vous vous trompez grandement lorsque vous dites qu'on ne démontre pas l'existence de Dieu comme on démontre que tout triangle rectiligne a ses trois angles égaux à deux droits ; car la raison est pareille en tous les deux, hormis que la démonstration qui prouve l'existence en Dieu est beaucoup plus simple et plus évidente que l'autre* (*Méditations métaphysiques*, Réponses aux Cinquièmes objections). Mais cette analogie est faible en ce qu'elle ignore une différence essentielle entre la métaphysique qui s'attache à la question de l'existence et la perspective mathématique qui exclut ce souci de l'existence. Déjà, une telle différence a été expérimentée entre les vérités mathématiques et la vérité du Cogito. Le Cogito consiste en un double constat : je pense, j'existe. Autrement dit, je sais que j'existe parce que je sais que je pense. La vérité du Cogito est une certitude existentielle, acquise dans la pure coïncidence du sujet avec lui-même, dans une simplicité absolue, indépendamment de tout contenu de pensée (car je sais que je pense, quelle que soit la chose à laquelle je pense) ; la vérité mathématique est une certitude relative à un contenu, acquise par l'examen attentif d'une essence représentée par la pensée. Le Cogito fonde une existence ; les mathématiques ne fondent aucune existence, mais ne font que développer un contenu de pensée.

Alors, quel rapport y a-t-il entre l'idée de triangle et l'idée de Dieu ? D'une part, il y a de multiples ressemblances puisque l'existence de Dieu est démontrée à la manière des géomètres, avec autant de certitude et d'évidence ; d'autre part, il y a une différence manifeste puisque les mathématiques ne démontrent pas l'existence de leurs objets. Mais Descartes rappelle également que l'analogie avec le triangle porte sur la nécessité du lien entre une essence et une propriété (la somme des trois angles égale à deux droits pour l'essence du triangle et l'existence pour l'essence de Dieu) et non entre une essence et l'existence pour les deux cas : *l'existence du triangle ne doit pas être comparée avec l'existence de Dieu parce qu'elle a manifestement en Dieu une autre relation à l'essence qu'elle n'a pas dans le triangle* (*Méditations métaphysiques*, Réponses aux Cinquièmes objections). On pourrait ici accuser Descartes de commettre un sophisme : il cherche à démontrer de façon géométrique le contenu d'une idée qui n'a rien de mathématique. Pour retrouver la cohérence cartésienne, il nous faut rappeler que l'idée de Dieu et l'idée du triangle sont des idées innées. Je peux les faire apparaître à volonté dans ma pensée, mais je n'ai aucun pouvoir sur leur contenu ; elles m'ont été données toutes faites, éternelles et immuables : … *les vérités mathématiques, lesquelles vous nommez éternelles, ont été établies de Dieu et en dépendent entièrement, aussi bien que tout le reste des créatures* (*Lettre à Mersenne du 15 Avril 1630*). Je n'ai pas le pouvoir d'en modifier les propriétés. Je ne peux pas faire en sorte que la somme des angles du triangle n'égale plus deux droits, comme je ne peux pas faire que Dieu n'existe pas. Autrement dit, la ressemblance fondamentale entre les deux idées est celle de la nécessité qui s'impose à moi, la nécessité de leur contenu, la nécessité du lien entre l'essence et ses propriétés. Penser un triangle dont la somme des angles ne fasse pas deux droits, c'est ne plus penser un triangle (un triangle plan, doit-on préciser aujourd'hui). Penser Dieu comme n'existant pas, c'est ne plus penser Dieu. Je ne suis pas libre de modifier le contenu des idées innées. Ma pensée n'impose aucune nécessité aux choses ; ce sont les idées innées qui imposent leur nécessité à ma pensée. La nécessité : voilà donc le véritable lien qui fonde, au-delà de l'apparente différence, l'analogie entre Dieu et le triangle.

Cette analogie permet en outre de rétablir une vérité religieuse fondamentale. En effet, si la nécessité n'était qu'une exigence de ma pensée, elle s'imposerait à l'essence de Dieu et nierait sa liberté. Or, à l'inverse, puisque c'est Dieu qui m'a fait don des idées innées, c'est lui qui en a librement choisi le contenu. Je ne suis pas libre de définir Dieu à ma guise. C'est lui qui m'accorde la connaissance que j'ai de lui. Cette connaissance demeure une révélation libre et incompréhensible qui laisse Dieu au-delà de la compréhensibilité humaine, et qui nous le fait estimer davantage. Pour Descartes, un athée ne peut être géomètre, car les vérités mathématiques, pour aussi certaines qu'elles paraissent à la raison naturelle, ont besoin d'être garanties par une vérité métaphysique, celle d'un Dieu qui nous a donné les idées innées et qui ne nous trompe pas.

c – Les trois ordres

On trouve des applications métaphysiques des mathématiques également chez Pascal (1623 – 1662). Lui aussi s'en sert pour découvrir l'ordre établi dans les choses. Par exemple, sa *Pensée* 793 (édition de L. Brunschvicg) nous présente une hiérarchie entre trois ordres : l'ordre des corps, l'ordre des esprits et l'ordre de la charité. Les corps désignent les objets sensibles comme le pouvoir, les richesses. Les esprits désignent l'intelligence et la science. La charité désigne l'amour de Dieu et du prochain. L'organisation des trois ordres est commandée par une série de principes qui établissent une discontinuité fondamentale entre eux. On pourrait se contenter d'une leçon générale disant, par exemple, que les ordres ne peuvent se mélanger entre eux, qu'ils n'ont pas de rapports entre eux. On ferait alors une lecture « plate » du texte consistant à y voir un avertissement banal : l'homme doit se détourner des corps et des jeux d'esprit pour se convertir à la charité. Mais si l'on examine le texte de plus près, on découvre que chaque paragraphe énonce une règle précise de discontinuité :

1 – une distance infinie sépare les ordres ; *la distance infinie des corps aux esprits figure la distance infiniment plus infinie des esprits à la charité*.
2 – les ordres supérieurs sont invisibles aux ordres inférieurs ; *la grandeur des gens d'esprit est invisible aux rois, aux riches, aux capitaines, à tous ces grands de chair*.
3 – un ordre n'est vu que des ordres supérieurs et de lui-même, et ne se mesure qu'avec ses propres éléments ; *les saints … sont vus de Dieu et des anges, et non des corps ni des esprits curieux : Dieu leur suffit*.
4 – des éléments d'un ordre inférieur sont inutiles pour démontrer une vérité d'un ordre supérieur ; *Archimède, sans éclat, serait en même vénération. Il n'a pas donné des batailles pour les yeux, mais il a fourni à tous les esprits ses inventions*.
5 – la petitesse apparente des éléments d'un ordre est en réalité de grandeur infinie dans cet ordre ; *il est bien ridicule de se scandaliser de la bassesse de Jésus-Christ, comme si cette bassesse était du même ordre, duquel est la grandeur qu'il venait faire paraître*.
6 – les ordres sont incommensurables entre eux ; *tous les corps ensemble, et tous les esprits ensemble, et toutes leurs productions, ne valent pas le moindre mouvement de charité*.
7 – les ordres sont irréductiblement hétérogènes ; *de tous les corps et esprits, on n'en saurait tirer un mouvement de vraie charité.*

On peut s'interroger sur cette accumulation de règles. D'où vient cette organisation ? D'où Pascal sort-il tous ces principes ? Visiblement, l'inspiration est mathématique. Derrière cette organisation, on trouve une proposition fondamentale du *Traité de la sommation des puissances numériques* de 1654, traité qui donne une méthode générale pour trouver la somme des puissances semblables des termes d'une progression quelconque (par exemple $5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3$) : *On n'augmente pas une grandeur continue lorsqu'on lui ajoute, en tel nombre que l'on voudra, des* *grandeurs d'un ordre d'infinitude inférieur. Ainsi les points n'ajoutent rien aux lignes, les lignes aux surfaces, les surfaces aux solides* (Pascal, *Œuvres complètes*, Bibliothèque de la Pléiade, p.1432) ; ce principe pose l'impossibilité de passer d'un ordre à un autre par une simple continuité, par exemple, par une addition. On ne peut pas poser une proportion continue entre des termes appartenant à des ordres différents. On ne peut pas non plus multiplier un terme d'un ordre par un terme d'un autre ordre. Dans *De l'esprit géométrique*, Pascal écrit : *Un indivisible, multiplié autant qu'on voudra, ne fera jamais une étendue. Donc il n'est pas du même genre que l'étendue par la définition des choses du même genre ... Et on en trouvera un pareil [rapport] entre le repos et le mouvement, et entre un instant et le temps ; car toutes ces choses sont hétérogènes à leurs grandeurs, parce qu'étant infiniment multipliées, elles ne peuvent jamais faire que des indivisibles d'étendue, et par la même raison* (id, p. 590).

Ces propos de Pascal sont inspirés du principe fondamental du livre V des *Éléments* d'Euclide qu'on appelle l'axiome d'Eudoxe. C'est cet axiome qui commande l'hétérogénéité entre les trois ordres. *Les grands génies ont leur empire, leur éclat, leur grandeur, leur victoire, leur lustre, et n'ont nul besoin des grandeurs charnelles, où elles n'ont pas de rapport ... Les saints ont leur empire, leur éclat, leur victoire, leur lustre, et n'ont nul besoin des grandeurs charnelles ou spirituelles, où elles n'ont nul rapport, car elles n'y ajoutent ni ôtent* (*Pensée* 793 de l'éd. Brunschvicg). Il y a une gradation entre les ordres, mais il n'y a pas de rapports entre eux. Et il faut bien entendre ici le mot « rapport » dans son sens véritablement mathématique, qu'Euclide donne ainsi : *Un rapport (logos) est la relation, telle ou telle, selon la taille, qu'il y a entre deux grandeurs du même genre* (Livre V, définition 3, Euclide, *Les Éléments*, vol. 2, Paris, PUF, 1994, trad. B. Vitrac, p. 36).

Pascal accepte l'idée d'un univers infini et il décrit l'homme comme perdu entre un infiniment petit et un infiniment grand. Son texte des trois ordres est destiné à prévenir l'homme qu'il ne pourra pas s'élever tout seul jusqu'à Dieu, par une sorte d'ascension continue, grâce à des rapports qu'il établirait lui-même d'un ordre à un autre. L'échelle des trois ordres ne saurait se parcourir qu'en sautant d'un degré à l'autre, et à condition que Dieu nous tende la main en nous envoyant sa grâce. Pascal se sert de sa science mathématique pour décrire la réalité du monde, du cosmos éclaté, et, dans ce monde qui a perdu son unité, la misère de l'homme. Il ne se contente pas de reprendre le discours théologique officiel, mais il nourrit son apologie du christianisme de toute sa science mathématique. Sans une connaissance précise des avancées de cette science au XVII^{e} siècle, il est impossible, aujourd'hui, de comprendre les *Pensées* de Pascal.

d – La bonne expression

La philosophie de Leibniz (1646 – 1716) repose entièrement sur le principe selon lequel l'ordre et la connexion des idées sont les mêmes que l'ordre et la connexion des choses. Autrement dit, l'ordre vrai et logique des idées est une expression fidèle de l'organisation du réel. C'est pourquoi il s'est lancé dans un projet de langue universelle et rigoureuse qu'il a appelé « la caractéristique universelle ». Son objectif est de représenter par un symbole simple et univoque une chose ou son idée, de telle sorte qu'on puisse ensuite faire des opérations sur ces symboles et réduire le travail de la pensée à un simple travail de calcul. Ce projet ne pouvait pas aboutir tant le savoir humain était déjà complexe à l'époque. Cependant, on peut voir dans les langages informatiques actuels des réalisations approchées de ce projet.

Une autre notion très représentative du système de Leibniz est celle d'expression. Une expression est une correspondance invariante entre des séries disjointes comme, par exemple, les phénomènes de l'âme et ceux du corps, ou entre l'individu et le monde. Leibniz prend modèle sur la correspondance entre tout point du cercle et tout point de l'ellipse. Dans le cas de la perception, par exemple, il y a correspondance entre chaque élément perçu et le percevant. *Une chose quelconque en exprime une autre, si ses caractères correspondent aux caractères de la chose à exprimer. Ces expressions sont variées : par exemple, le mouvement réglé d'une machine exprime la machine elle-même (...) les chiffres expriment les nombres, l'équation algébrique exprime le cercle, ou quelque autre figure. Toutes ces expressions présentent le point commun suivant : de la seule contemplation des caractères de l'exprimant, nous pouvons connaître les propriétés correspondantes de la chose à exprimer*. (Leibniz, *Qu'est-ce qu'une idée ?*, trad. Sarah Carvallo-Plus, in « Leibniz », Paris, Hachette, 2001, p. 58-59)

Mais la grande affaire de Leibniz, c'est le calcul différentiel. Il invente une notation nouvelle (*dx*) et élève la pratique de la différentiation au niveau d'une opération arithmétique à part entière comme l'addition, la multiplication, etc. Il tire de cette pratique des infinitésimaux une théorie de la conscience et de la perception. L'exemple de la vague est célèbre : son mugissement est l'intégrale de ses gouttelettes. *Pour entendre ce bruit comme l'on fait, il faut bien qu'on entende les parties qui composent ce tout, c'est-à-dire le bruit de chaque vague, quoique chacun de ces petits bruits ne se fasse connaître que dans l'assemblage confus de tous les autres ensemble, et qu'il ne se remarquerait pas si cette vague qui le fait était seule. Car il faut qu'on en soit affecté un peu par le mouvement de cette vague et qu'on ait quelque perception de chacun de ces bruits, quelques petits qu'ils soient : autrement, on n'aurait pas celle de cent mille vagues, puisque cent mille riens ne sauraient faire quelque chose* (*Nouveaux essais sur l'entendement humain*, Paris, Garnier-Flammarion, 1990, préface, p. 42).

Il découvre une nouvelle expression de π qui lui permet de postuler qu'il existe toujours un ordre derrière le désordre apparent. En effet, l'ordre des décimales de π paraît totalement aléatoire : 3,14159…, mais il découvre que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$.

Il en tire la conviction que le désordre apparent ne tient pas à la nature du réel, mais à un mauvais choix de son expression par la pensée. C'est pourquoi les miracles, les monstres, les catastrophes ne sont que des exceptions apparentes. En réalité, grâce à la considération d'une loi plus générale, elles peuvent être rangées dans un ordre rigoureux, de même que des points donnés au hasard peuvent toujours être repris sur une courbe régulière qu'on peut exprimer par une équation, car Dieu a fait le monde le meilleur possible. Par l'immense richesse de leurs formulations, les mathématiques permettent donc de toujours mieux approcher l'organisation harmonieuse du monde.

e – La détermination des infinis

Fontenelle (1657-1757) publie en 1727 son grand ouvrage mathématique, *Éléments de la géométrie de l'infini*, un ouvrage auquel il a travaillé pendant près de trente ans (une lettre de Leibniz de Novembre 1702 annonçait déjà son entreprise). Très peu de mathématiciens pratiquaient ce calcul à l'époque (au plus une dizaine de personnes), et, déjà, Fontenelle se posait des questions sur les fondements de ce nouveau calcul. En effet, il refuse de se laisser emporter par l'enthousiasme que les résultats considérables de ce calcul suscitent chez ceux qui le connaissent. Il ne veut pas le réduire à un simple calcul d'approximation, ni à un simple artifice technique. Pour lui, l'infini est tout aussi réel que le fini, d'une réalité immatérielle, certes, mais d'une réalité géométrique aussi assurée que celle de tous les autres objets mathématiques.

Les géomètres ne peuvent pas continuer à développer le calcul infinitésimal, en s'émerveillant des résultats obtenus, sans enquêter sur le statut exact de l'infini. Puisque l'infini est une idée de l'esprit humain, il revient à ce dernier d'en éclaircir la nature. C'est pourquoi Fontenelle entreprend de construire un *système général de l'infini*, comme il l'annonce par le titre de sa première partie. Il veut rendre raison de tous les résultats obtenus par le nouveau calcul ; il veut leur donner un sens, et, pour cela, les organiser à la manière des *Éléments* d'Euclide, en suivant méthodiquement un ordre déductif complet. C'est cet ordre, cette cohérence interne du système qui va fonder la réalité de ses objets. On y retrouvera les techniques habituelles du calcul infinitésimal, avec la notation leibnizienne, mais le tout repris et réorganisé dans un ensemble dont toutes les parties seront bien liées.

Toutes les confusions habituelles sur l'infini viennent de ce qu'on n'y voit pas les propriétés d'une grandeur et qu'on le réduit à l'illimité, à l'image de l'infinité divine. Aussi, avant d'entrer dans les principes mathématiques, Fontenelle opère une distinction conceptuelle capitale pour séparer l'infini géométrique de l'infini métaphysique : l'infini métaphysique est une grandeur maximale absolue, incomparable avec aucune autre grandeur. L'infini métaphysique a toute sa pertinence dans les débats philosophiques, notamment sur la nature divine, mais il n'a rien à voir avec la géométrie où il ne pourrait que nous égarer. Au contraire, l'infini géométrique a toute sa pertinence dans le système de la géométrie si on le saisit effectivement comme une grandeur au sens mathématique, c'est-à-dire ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution. L'infini géométrique est calculable. On donnera au nombre infini tout simplement la même réalité qu'aux nombres finis, sans se poser de question sur le nombre infini en soi, ou sur le nombre infini substantiel, etc. Cette définition de l'infini géométrique étant posée, on lui appliquera les mêmes règles de calculs qu'à toute autre grandeur. Ainsi, on pourra lui faire des augmentations ou des diminutions, mais à l'intérieur de son ordre seulement. De même qu’on ne peut ajouter des points à une ligne, ni une ligne à une surface, on ne peut ajouter à un infini d’un certain ordre un infini d’un ordre inférieur.

Il faut d’abord expérimenter le passage obscur du fini à l’infini. Dans la suite naturelle des nombres entiers que Fontenelle appelle A, chaque terme désigne en même temps que lui-même, le nombre des termes qui vont de 1 jusqu’à lui inclusivement. Ainsi, 32 nous indique qu’il y a 32 termes depuis 1 jusqu’à 32. Or, le nombre des termes de A est infini. Il existe donc un dernier terme, dans cette suite, qui est l’infini. Ce terme sera désigné par le caractère ∞. Il est vrai qu’on éprouve quelque difficulté à admettre ce passage du fini à l’infini. On sait que dans A, l’augmentation des nombres s’effectue par la seule addition de 1. Cette opération est appliquée uniformément à tous les nombres, et, cependant, il arrive qu’on passe de nombres finis à des nombres infinis, sans qu’on sache exactement où se fait le passage. C’est incompréhensible. Mais il ne faut pas en rester là. Il faut prendre le nombre infini comme celui qui a franchi la limite du fini. Il faut admettre le fait et continuer.

On peut ensuite explorer les différents genres d’infinis. Par exemple, en divisant le dernier terme de la suite des nombres naturels A par un nombre fini quelconque n, on obtient des infinis du même ordre : *Puisque A est une progression arithmétique, dont le dernier terme est ∞, son terme du milieu est $\infty / 2$, infini, après lequel il ne peut y avoir que des infinis plus grands. De même le terme de son premier quart est $\infty / 4$, encore infini, celui de sa première 100ème partie est $\infty / 100$ encore infini ; de sorte que de l’intervalle infini, qui est entre 1 et ∞, divisé en 100 parties, il y en a déjà 99 qui ne peuvent avoir que des termes infinis, et il ne reste que la première qui puisse en avoir de finis. Il est visible que cette première 100ème partie sera infinie, puisqu’elle sera une partie finie d’un intervalle infini, et par conséquent elle contiendra encore une infinité de termes*. (art. 182)

Puisqu’on ne sait pas déterminer à quel endroit précis se fait le passage du fini à l’infini dans A, on doit admettre que la division de l’infini par un nombre fini quelconque n engendre un nombre prodigieux d’infinis contenus dans A et pourtant moindres que ∞. Tous ces infinis contenus dans A seront désignés par le caractère _ et seront appelés « infinis indéterminés ». Ce sont des infinis variables alors que ∞ est un infini fixe. Puisqu’ils sont du même ordre que ∞, ils peuvent se prêter à des opérations avec lui. Ainsi, ∞ / _ est un entier fini, suivi le plus souvent d’une fraction ; _ / ∞ est une fraction finie moindre que 1 ; _ / _ est un fini. On voit par là qu’on peut exprimer en termes finis des rapports de grandeurs infinies du même ordre. On en vient à une autre sorte de nombres qui va faire l’objet d’un paradoxe. Il s’agit des « finis indéterminables ».

Fontenelle observe que A^2 a autant de termes que A, car on peut faire correspondre à chaque terme de A^2 un terme de A.

A.	1	2	3	4	5	6	etc.
A^2.	1	4	9	16	25	36	etc.

Cependant, on doit admettre que A^2 a des infinis plus tôt que A ; le passage du fini à l'infini se fait plus rapidement en A^2 qu'en A puisque les termes de A^2 croissent comme les carrés de A. En disposant les termes de A et de A^2 les uns sous les autres, on observe un vide étonnant : si *nn* est le plus grand carré fini possible dans A, juste avant le premier terme infini de A, il ne lui correspond rien dans A^2. Mais il est impossible qu'il n'y ait rien. Donc, en fait, il y a bien des infinis dans A^2 qui viennent plus tôt que dans A. Mais quels sont ces infinis ? À quoi correspondent-ils dans A ? Comment des carrés de termes finis peuvent-ils être infinis ? Il faut prendre ce paradoxe comme l'envers d'une vérité. On doit accepter l'existence de termes finis de A correspondant à des termes infinis dans A^2, c'est-à-dire de termes finis qui, multipliés par eux-mêmes, donnent des termes infinis. On appellera « finis indéterminables » ces termes finis de A qui engendrent des termes infinis dans A^2, par leur élévation au carré. Une fois admis, ce paradoxe ne conduit à aucune conclusion fausse. Il donne une cohérence au système et permet de découvrir de nouvelles vérités.

Finalement, on trouvera dans A trois grands ensembles de termes : les finis déterminables, des finis indéterminables et des infinis indéterminés. Grâce à ces distinctions, les contradictions apparentes du calcul de l'infini disparaissent. Les grandeurs infiniment petites, autrement dit les grandeurs infinitésimales, ne sont que des grandeurs infiniment grandes renversées et l'on y trouvera les mêmes distinctions que dans les infiniment grandes. Avec Fontenelle, on assiste à une laïcisation de l'infini, à savoir à l'abandon de ce mouvement moderne qui consistait à essayer de retrouver l'ordre divin grâce aux mathématiques.

Après la période moderne (XVII^{e} et XVIII^{e} siècles), la réflexion philosophique sur les mathématiques est passée au second plan. Malgré quelques grands esprits rompus aux mathématiques (Husserl, Bergson, Cavaillès, Desanti), les philosophes les plus connus de notre époque, préférant côtoyer les historiens ou les linguistes, ont perdu le contact avec les nombres et les grandeurs. Quant aux quelques spécialistes de la philosophie des mathématiques, ils recentrent le débat sur la notion de pratique mathématique : les mathématiques sont avant tout une activité. Elles ne sont pas une réserve d'être obscurs, préexistants à la pensée, qu'il s'agirait de mettre au jour, mais elles sont une production de la pensée, en renouvellement incessant. Il en découle cette conséquence philosophique : les objets mathématiques ne sont pas donnés, mais ils sont construits. Ils sont les corrélats d'une activité. Ils n'existent pas enfouis dans des acquis dont on n'aurait pas encore exploré tous les recoins. Ils sont inventés, c'est-à-dire créés. Cette invention est imprévisible ; elle surgit par rupture avec les cadres admis. *L'activité des mathématiciens est une activité expérimentale* (Jean Cavaillès in *La pensée mathématique*, avec A. Lautman, 1939).

Les mathématiciens n'auraient-ils pas quelques problèmes à soumettre aux philosophes pour les faire sortir de leur réserve, et à quand un prochain article intitulé « ce que les mathématiciens ont appris des philosophes » ?

Bibliographie

ARISTOTE, *Métaphysique*, M, 3.

ARISTOTE, *Premiers analytiques*, I, 1.

ARISTOTE, *Physique*, L. III.

CAVAILLES, J., « La pensée mathématique, avec A. Lautman », in *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, Paris, Hermann, 1994.

DESCARTES, *Discours de la méthode*, Partie II.

DESCARTES, *Méditations métaphysiques*, Méd. V.

DESCARTES, *Règles pour la direction de l'esprit*, règle II.

DESCARTES, *Correspondance avec Élisabeth*, Lettres de Novembre 1643.

EUCLIDE, *Éléments*, trad. B. Vitrac, Paris, P.U.F., 1990-1994.

FONTENELLE, *Éléments de la géométrie de l'infini*, Paris, Klincksiek, 1995.

GALILÉE, *L'essayeur*, Paris, Belles-Lettres, 1980.

LEIBNIZ, *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, Préface, Paris, Garnier-Flammarion, 1966.

NICOLAS DE CUES, *De la Docte Ignorance*, notre traduction d'après le texte latin de l'édition établie par Dietlind et Wilhelm Dupré : Nikolaus von Kues, *Die philosophisch-theologischen Schriften*, Sonderausgabe zum Jubiläum, lateinisch-deutsch, 3 vol., Wien, Herder, 1989.

PASCAL, Pensées, *Œuvres complètes*, Paris, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 1954.

PASCAL, *De l'esprit géométrique*, Œuvres complètes, Paris, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 1954.

PLATON, *La République*, L. VI.

PLATON, *Lettre VII*.

PROCLUS, *Commentaire sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, trad. Paul Ver Eecke, Paris, Blanchard, 1940.

NICOLLE, Jean-Marie, *Histoire des méthodes scientifiques*, Paris, Bréal, 1994.

BARBIN, E., CAVEING, M., *Les philosophes et les mathématiques*, Paris, IREM-Ellipses, 1996.