# À propos de modélisation(*)

Philippe Lombard(**)

Eadem mutata resurgo

## Introduction

L'étude des « relations historiques entre mathématiques et sciences physiques », comme se le propose ce nouveau colloque organisé par la Commission Inter-Irem « Histoire et Épistémologie des mathématiques », constitue un thème de réflexion intéressant sur plusieurs aspects.

D'abord il donne l'agréable impression de laisser un peu de côté la problématique classique des philosophes qui considèrent souvent les mathématiques comme un simple chapitre de la philosophie, veulent essentiellement les étudier dans leurs rapports à la logique et les regardent surtout comme le résultat d'un formalisme – une pure création de l'esprit – dont on pourrait accessoirement, mais comme au passage, s'interroger sur la « déraisonnable efficacité » dans l'étude du monde qui nous entoure… Mais ensuite, et par le fait même de remettre au premier plan la question des rapports entre mathématiques et physique, ce colloque nous place implicitement au cœur d'une foule de présupposés dont aucun n'a pu, jusqu'à présent, être clarifié de manière univoque. Ils se ramènent tous à une seule et même interrogation : quelles sont au fond les véritables différences entre mathématiques et sciences physiques ? Y a-t-il, comme certains mathématiciens le prétendent périodiquement, une différence si importante entre les *questions de nombres* et les *questions sur le système du monde* ? N'y a-t-il, au contraire, aucune séparation bien précise entre mathématiques et physique, au point que l'on ne sache même plus très bien si les mathématiques sont un chapitre de la physique … ou si la physique est un chapitre des mathématiques ?

Enfin, plus indirectement, l'ambition de s'arrêter ainsi à l'analyse des relations *historiques* entre ces deux aspects de la science nous amènerait presque à penser que celles-ci ont tellement évolué au cours des siècles que, d'une part, il conviendrait de distinguer des périodes de l'histoire particulièrement originales ou que, d'autre part, les relations que l'on peut observer aujourd'hui sont essentiellement différentes de celles qui ont pu avoir cours par le passé…

Il semble par conséquent assez difficile d'intervenir dans un tel débat sans avoir d'abord choisi des réponses à la plupart des interrogations précédentes. C'est-à-dire sans avoir une position – au moins implicite – sur trois questions inévitables : que

(*) Texte d'un exposé prononcé le 14 mai 2004 au colloque Inter-Irem de Dijon, organisé par la Commission « Histoire et Épistémologie des mathématiques » sur le thème : Les relations historiques entre mathématiques et sciences physiques.
(**) Directeur de l'Irem de Lorraine & Archives Poincaré.

font les mathématiques et les mathématiciens ? que font les sciences physiques et les physiciens ? quels sont les rapports entre les deux types d'activités ? Évidemment, la réponse à de telles questions est loin d'être simple et les désaccords en la matière paraissent généralement irréductibles. Ils sont d'ailleurs souvent un des éléments fondamentaux d'une sorte de typologie des positionnements non seulement en matière de philosophie des sciences, mais aussi – et surtout – en matière *d'enseignement* des disciplines scientifiques. Car il convient, en définitive, de ne pas trop oublier que nous sommes ici dans un colloque Inter-Irem et que, même s'il s'est spécialisé dans l'épistémologie et l'histoire, c'est-à-dire – pour évoquer Bachelard – dans la réflexion sur « l'esprit scientifique », nous n'en sommes pas moins concernés aussi, et au premier chef, par « la formation de l'esprit scientifique » et donc par la « didactique des mathématiques ».

L'actualité des programmes – et des discussions autour des programmes – ne nous permet plus aujourd'hui de faire l'économie d'une réflexion de fond sur les rapports entre mathématiques et sciences physiques. Mais que l'on se rassure : cet exposé n'a pas la prétention d'apporter des réponses à toutes les questions précédentes. Mon seul objectif est au contraire de les rappeler et de les analyser une fois de plus, en me plaçant principalement dans le contexte où se situent désormais la plupart des éclairages « modernes » sur la question : celui des notions de « modèle » et de « modélisation ».

Je ferai donc d'abord appel à l'histoire des mathématiques et de la physique pour tenter de mettre en perspective les problématiques fondamentales qui les concernent au niveau *épistémologique*. Je m'attacherai ensuite à une partie des multiples questions que pose la complémentarité de ces deux sciences en matière *d'apprentissage*, notamment à la lumière des récentes modifications apportées aux programmes par les groupes de réflexion sur ce sujet.

## Première partie : *Percer les secrets des nombres et des formes*

Comme vous l'avez sans doute remarqué, les mathématiques font rarement la une des journaux et lorsque c'est le cas, par exemple à l'occasion « historique » de la démonstration du théorème de Fermat ou pour la remise d'une médaille Fields, il est de toute façon exclu de rentrer dans les détails pour tenter d'expliquer de quoi il peut bien s'agir. Cet état de fait peut être regretté par certains mais il faut bien reconnaître que ce mystère qui enveloppe les mathématiques est bien pratique : il évite aux mathématiciens d'expliquer – et même souvent de s'expliquer à eux-mêmes… – la nature et le but véritables de leur travail. Et si vous le leur demandez, ils vous répondront certainement en vous citant des applications plus merveilleuses les unes que les autres … et desquelles ils ignorent en fait à peu près tout…

Ce n'est d'ailleurs pas tellement différent du cas d'un ingénieur ou d'un architecte à qui vous demanderiez pourquoi ils construisent un pont. Ils vous expliqueraient sans doute que c'est en pensant à tous les véhicules qui vont l'emprunter au cours des années à venir. Mais c'est juste là l'explication simple et avouable, alors qu'il n'en est rien. Ils construisent un pont d'abord parce qu'ils font quelque chose qui leur plaît et qui leur semble beau, et ensuite parce que, en le faisant, ils ont le sentiment de se mesurer à la résistance des matériaux et aux lois de la gravitation. L'utilité humaine n'est que seconde dans leurs motivations, comme elle l'est pour tout scientifique. Poincaré a très bien exprimé que le « vrai but » de la science n'est pas dans ses applications, mais dans la connaissance. Les mathématiciens du vingtième siècle ne se sont pas privés de renchérir en choisissant comme exergue la désormais fameuse phrase de Jacobi sur « l'honneur de l'esprit humain »…

Bref, les mathématiques apportent leur pierre à l'édifice de la « connaissance scientifique » en établissant des « vérités mathématiques » ! Même si l'explication doit laisser sur leur faim tous ceux qui souhaiteraient savoir d'un peu plus près en quoi peuvent bien consister ces « vérités mathématiques »…

Or comme je l'ai dit plus haut, les mathématiques font rarement la une des journaux… Mais il y a eu cependant une exception à cette règle à une époque pas si lointaine, pendant ce qui est resté dans les mémoires sous le nom de « réforme des maths modernes »… Les journaux des années 70 consacraient alors très souvent une grande place aux diverses polémiques entre les tenants des mathématiques de papa et les zélateurs du structuralisme. On entendait beaucoup plus les tenants des sciences humaines que les mathématiciens ou les physiciens, mais je n'oublierai pas, pour ma part, quelques lignes particulièrement laconiques de Jean-Pierre Serre (disons du « Bourbaki » de l'époque) en réponse à un article qui ne cessait de s'extasier sur quelque chose comme « la liberté de création qu'offraient enfin les structures à tout un chacun en général et aux mathématiciens en particulier ». La réplique de Serre tenait en peu de mots : il rappelait sèchement que *le but des structures mathématiques* n'était pas dans la création artificielle de structures, mais qu'il était tout simplement de *percer les secrets des nombres et des formes*…

Cela pourra peut-être sembler étonnant à beaucoup, et notamment à tous ceux qui ont pu prendre à la lettre le bannissement des figures en géométrie, mais il n'est effectivement pas difficile de trouver confirmation des propos de Serre chez un très grand nombre de mathématiciens. Il suffit par exemple de lire René Thom décrivant avec passion ses souvenirs d'enfance, pour apprendre à quel point il a toujours été fasciné par la chorégraphie régissant le ballet des locomotives de la gare de triage toute proche de la maison familiale. On pourra même voir avec une certaine surprise qu'un Dieudonné n'a eu de cesse de parler de *la domination de la géométrie* ou des *images mentales* que se forgent les mathématiciens pour se guider dans les dédales les plus abstraits pour le profane. On se rendra compte qu'un Grothendieck avouait être attiré par la richesse de certains *dessins d'enfants* et qu'il écrit dans ses mémoires : « […] s'il y a une chose en mathématique qui (depuis toujours sans doute) me fascine plus que toute autre, ce n'est ni " le nombre " ni " la grandeur ", mais toujours la *forme*. Et parmi les mille et un visages que choisit la forme pour se révéler à nous, celui qui m'a fasciné plus que tout autre et continue à me fasciner, c'est *la structure* cachée dans les choses mathématiques ».

Paradoxalement, donc, alors même qu'ils semblent s'ingénier à la plus grande abstraction dans leurs traités et qu'ils ne cessent de se réclamer de la méthode axiomatique et du formalisme en prétendant ramener leurs propos à de simples « jeux de signes », les mathématiciens n'en sont pas moins capables de décrire et d'expliquer leur travail par cette unique idée, magique et mystérieuse : « percer le secret des nombres et des formes »… Mais qu'est-ce donc, en vérité, que la forme ? Il faudrait être bien naïf, évidemment, pour croire que l'explication ainsi donnée par quelques-uns des plus grands mathématiciens du vingtième siècle – même si elle rejoint en définitive celle des philosophes et des géomètres grecs – puisse être complètement claire et éclairante. Il est vrai que la notion de « forme » est un des sujets privilégiés de la philosophie et que celle-ci donne surtout l'impression d'insister sur deux problématiques aussi opposées que complémentaires. Pour la première, la notion de forme est liée de façon intrinsèque à la notion de matière et à ses « manifestations naturelles » : la « forme » est tout simplement l'apparence extérieure que la matière est susceptible de prendre. Pour la seconde, la notion de forme n'est plus envisagée du côté de « l'objet » mais au contraire du côté du « sujet ». C'est, schématiquement, celui qui regarde une portion d'espace occupée par une certaine « matière » qui lui confère une « forme » en appliquant à celle-ci une lecture subjective, consistant précisément à retrouver des *formes* connues, apprises, ou simplement décidées à l'avance parmi les sensations perçues.

Un exemple particulièrement frappant pourrait être, à cet égard, celui du ciel étoilé. Il n'y a guère de paysage plus « informe » que le spectacle des myriades de points lumineux constituant la voûte céleste, et pourtant l'homme, depuis des millénaires, n'aura eu de cesse d'en scruter les moindres détails pour en comprendre les secrets. Mais qui donc a bien pu inventer la voie lactée, la grande et la petite ourse ? les constellations du chien, du crabe ou des pléiades ? De quelle imagination ont bien pu sortir les différents signes du zodiaque ? Ces configurations parfaitement reconnaissables d'étoiles qui se présentaient chaque nuit aux yeux de l'observateur constituaient des phénomènes objectifs qui demandaient certes à être baptisés en recevant une dénomination plus ou moins conventionnelle, mais quel sens pouvaient bien vouloir leur affecter les premiers astronomes en y recherchant ces formes familières ? Il n'en reste pas moins que, par delà ces connaissances d'ordre « poétique », les scientifiques ont passé une grande partie de leur énergie à découvrir dans cette perspective sur l'univers des formes bien plus magiques et bien plus sophistiquées que celles qui pouvaient nourrir jadis la pensée mythologique. Imaginez : des ellipses, des paraboles, des milliards et des milliards de spirales, de naines blanches, de « trous noirs », et tout cela au sein d'une immensité *courbe* où le temps et l'espace finissent par se mélanger indissolublement !…

Aucune de ces « formes » n'était plus évidente, au contraire, que celle du scorpion, de la balance ou des gémeaux. Elles sont le résultat d'une quête continue sur deux fronts : celui de la physique et celui des mathématiques. Et s'il ne viendrait à l'idée de personne de contester que le but de la physique est de « percer les secrets de la nature », il ne me semble nullement illégitime – du point de vue de *l'épistémologie des mathématiques* – de commencer par se demander si « chercher à percer les secrets des nombres et des formes » ne constituerait pas, en définitive, une devise particulièrement heureuse pour résumer l'ambition des mathématiques et la préoccupation fondamentale des mathématiciens. Sans chercher, évidemment, à dégager *a priori* une définition précise de la notion de « forme » – une « forme mathématique » sera simplement, pour nous, ce que les mathématiciens considèrent comme une « forme »… – nous allons voir sur quelques exemples en quoi une telle entrée dans le problème permettrait peut-être d'éclairer « l'essence » de la pensée mathématique.

Bien sûr, il n'est guère possible d'être exhaustif : au moins deux millénaires et demi nous séparent des recherches qui nous sont parvenues de l'Antiquité et il faut largement compter dans l'intervalle une dizaine ou une quinzaine de siècles de production intensive ! Déjà les mathématiques grecques – disons d'Euclide à l'école d'Alexandrie – fournissent à elles seules une illustration particulièrement riche : géométrie des cercles et des triangles dans le plan, classification des polyèdres réguliers en géométrie dans l'espace, études de courbes et de surfaces, etc. Mais je me contenterai de deux exemples qui me semblent relativement emblématiques de notre préoccupation présente et qui illustrent deux aspects très importants de la « renaissance scientifique » qui a eu lieu au XVIIème siècle : émergence de ce que l'on pourrait à bon droit appeler le « paradigme différentiable » en mathématiques et invention de la « vision moderne de l'espace » en géométrie et en physique…

**a) l'exemple de la spirale admirable**

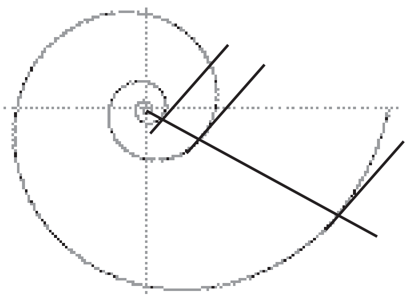
L'histoire commence, à vrai dire, par des considérations en lesquelles réside manifestement, comme le note Nicolas Chuquet en 1484, « quelque secret qui appartient aux nombres » … et ces considérations remontent même (semble-t-il) au XVIIIème siècle avant notre ère… On aurait découvert, en effet, sur une tablette Babylonienne les traces d'un calcul qui pourrait bien correspondre à un problème, sans doute lui-même vieux comme les rues : « combien faut-il de temps pour qu'un capital placé au taux (composé évidemment…) de 20 % par an, atteigne le double de sa valeur initiale ? ». Et de son côté, Chuquet cherchait à résoudre une énigme équivalente mais nettement moins usuraire : « combien faut-il de temps à un réservoir qui perd chaque jour 10 % de sa capacité pour se retrouver à moitié vide ? ».

À plus de trois mille ans de distance, ils avaient ainsi rencontré la *loi des exposants* qui relie, comme l'on sait, les termes de la *suite arithmétique* des exposants avec la *suite géométrique* des puissances. Mais il revint seulement à Neper, au tout début du XVIIème siècle, de systématiser cette correspondance pour mettre au point des « tables » de plus en plus précises.

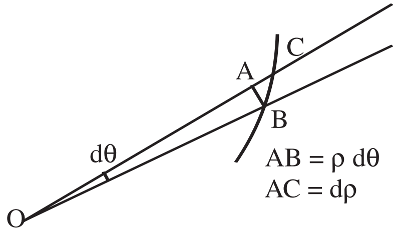
Les calculatrices modernes ont certes fait oublier la fascination de ces sortes d'antiphonaires débordants de décimales qui permettraient – comme par magie – aux astronomes, aux ingénieurs ou aux navigateurs de remplacer les fastidieuses multiplications et divisions par des additions ou des soustractions, mais c'est ainsi que naquirent les *logarithmes* – ou les *exponentielles*, comme on voudra – dont on peut dire qu'ils illustrent à eux seuls toute la puissance de la nouvelle vision des nombres héritée des Arabes, et qu'ils préfigurent à merveille les conquêtes futures de *l'analyse moderne* naissante…

Au niveau des « secrets des nombres » cette élaboration progressive de la fonction exponentielle au cours du XVIIème siècle – jusqu'à la mise au net effectuée par Euler vers 1748 et l'introduction du nombre e = 2,718 281 828 459 045 235 360 28… – constitue manifestement l'une des clés essentielles des préoccupations effectives des mathématiciens. Mais ce n'est pas tout. Ces préoccupations-mêmes furent ici complètement indissociables de celles qui touchent aux « secrets des formes »…

Déjà vers 1525, Albrecht Dürer avait rêvé d'une sorte de spirale qui, contrairement à la spirale d'Archimède, n'aurait « ni début, ni fin »… Il lui suffisait pour cela de modifier progressivement le « pas » de la spirale classique au fur et à mesure que variait l'angle de rotation autour du centre. Mais c'est Descartes et Torricelli qui, à partir de 1638, introduisirent et étudièrent les premiers une spirale plus régulière qui répondait mieux encore à la question, dans la mesure où sa tangente présentait un angle d'ouverture constant avec le rayon vecteur :



Il suffira alors d'attendre 1649 pour que le lien entre cette courbe et la fonction exponentielle soit complètement éclairci : une fois remarqué que la fonction logarithme fournissait une mesure de l'aire comprise entre l'hyperbole et son asymptote, et donc une primitive de la fonction $y = 1/x$, un raisonnement simple (dans le cadre de la théorie des indivisibles évidemment…) permettait de voir immédiatement que la spirale définie par $\rho = \alpha.exponentielle(\theta)$ répondait à la question :



La constance de l'angle entre la tangente et le rayon vecteur implique la constance du rapport $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$ représentant la tangente de cet angle. Et par conséquent, la constance du rapport $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho\,\mathrm{d}\theta}$. Ce qui revient donc à dire que : $\dfrac{\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\theta}{\rho} = \dfrac{\rho'}{\rho} = Cste$.Ce qui constitue bien la caractérisation de la fonction exponentielle…

Torricelli pourra donc légitimement écrire en 1647 : « en somme, ces deux mouvements, un arithmétique et un géométrique qui ne furent considérés par Neper que séparément, ont été contemplés par moi en même temps, et j'en ai tiré une spéculation de la géométrie, où lui ne recherchait qu'une pratique arithmétique ». Mais c'est sans doute chez un Jacques Bernoulli que l'on rencontre la plus grande fascination pour cette forme singulière :

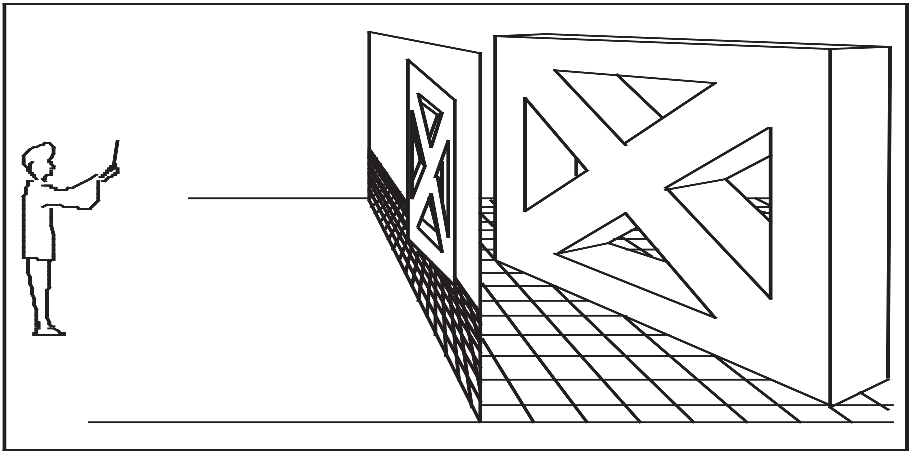
*« Puisqu'en effet cette spirale engendre une spirale toujours semblable à elle-même, quelle que soit la façon dont elle s'enroule, se déroule, rayonne ; elle pourrait aussi bien être pour tous un emblème semblable aux descendants des parents ; La Fille Très Semblable à la Mère. Ou bien (s'il est permis d'appliquer cette chose aux mystères de l'éternelle Vérité de la Foi) elle est comme une esquisse quelconque de l'éternelle Génération du Fils, semblable à l'image du Père, et de ce fait comme la Lumière issue de la Lumière et identique à elle. Ou bien si vous préférez, parce que notre courbe admirable dans sa révolution demeure toujours semblable à elle-même, de façon très constante et en rapport, elle pourrait être le symbole du courage et de la constance dans l'adversité ; et même le symbole de la résurrection de notre chair après de multiples altérations, la même pourtant après la mort. D'ailleurs si l'usage s'était maintenu de nos jours d'imiter ARCHIMÈDE, j'ordonnerais volontiers que fût gravée sur ma tombe cette spirale avec l'épigraphe : « Eadem mutata resurgo » c'est-à-dire : « Elle ressuscitera identique à elle-même ».*(1)

**b) l'exemple du plan projectif**

Mon second exemple sera plus « physique » que le précédent – c'est-à-dire tout simplement plus « géométrique » – mais paradoxalement il sera aussi, comme on va le voir, nettement plus abstrait. Dès le début des années quatorze cents, les peintres posèrent les règles de la représentation en perspective,

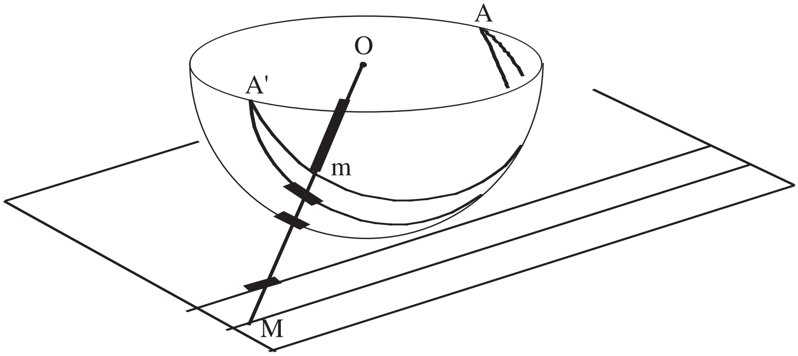
(1) Jacob BERNOULLI. Opera. Acta eruditorum, 1692. Vol. XLII et vol. XLIX. Traduit par Marga BUFFARD et André STOLL.

et peu à peu, pendant environ deux siècles, ils prirent conscience que la géométrie des Anciens pouvait s'appliquer à merveille pour décrire non seulement le monde qui nous entoure, mais aussi la manière selon laquelle, tout en faisant partie de ce monde, nous pouvions maîtriser la façon même dont nous le regardons et dont nous nous le représentons…

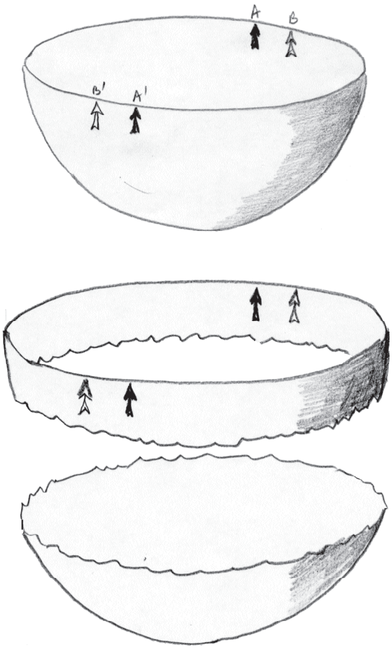


Pour le géomètre, ces conquêtes firent notamment apparaître que des droites parallèles dans le plan horizontal pouvaient être regardées comme des droites qui se rejoignaient « sur la ligne d'horizon » et donc que celle-ci pouvait représenter ce que nous appelons aujourd'hui la droite « des points à l'infini ». C'est Girard Desargues qui alla sans conteste le plus loin dans cette voie, et qui étudia en particulier les coniques en leur adjoignant leurs « points à l'infini ». C'est-à-dire que, dès la première moitié du XVIIème siècle, il les envisagea comme différentes manifestations d'une « même courbe » qui aurait été contenue dans une nouvelle espèce de « plan », composé non seulement des points habituels mais aussi des points « à l'infini » qui sont situés, quant à eux, sur la ligne d'horizon…

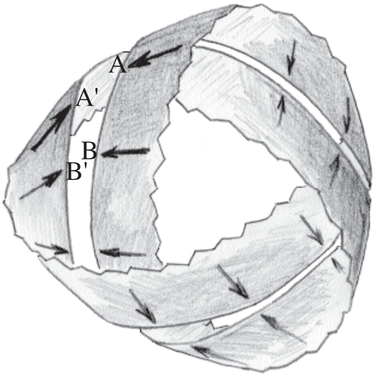
Mais à quoi pouvait bien ressembler ce (futur) plan « projectif » ? Il est effectivement possible et simple d'identifier tout point du plan horizontal à un point d'une sorte d'écran formé par une demi-sphère centrée à l'œil de l'observateur. Et comme de cette manière des droites parallèles du plan donnent l'impression de se couper sur l'équateur, ce sont les points de celui-ci qui vont représenter les points « à l'infini ». Mais, comme on le voit sur la figure, deux points diamétralement opposés semblent répondre à la question … *alors que deux droites ne doivent avoir qu'au plus un seul point en commun*.

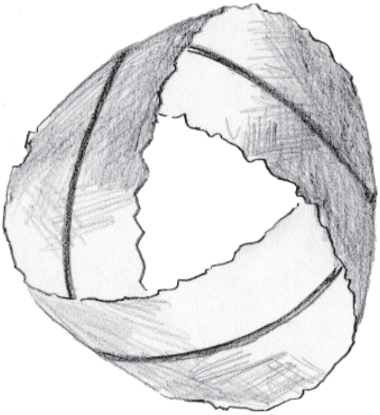



Bref. Notre (futur) plan projectif doit être obtenu à partir d'une demi-sphère, mais à la condition d'identifier deux à deux tous les couples de points de sa frontière qui sont diamétralement opposés (comme c'est indiqué sur la figure ci-contre). Alors pour avoir une chance de réaliser matériellement cette identification, on peut par exemple commencer par découper provisoirement le bord supérieur de notre demi-sphère dans l'espoir d'opérer en deux temps : on recollera d'abord l'équateur sur lui-même de manière à faire se correspondre deux à deux les points diamétralement opposés, puis on essayera de réajuster la pièce inférieure au bord de la figure obtenue… Malheureusement, cette *figure obtenue* est aujourd'hui bien connue : le recollement suivant le bord supérieur aboutit à une *bande de Mœbius* ; car chacun sait, inversement, que si l'on découpe une telle bande en suivant son propre « équateur », le résultat est d'un seul tenant…




Dès lors, le deuxième temps consisterait à recoller le bord du disque inférieur le long du bord (unique) de la bande de Mœbius… Mais chacun finira bien par se convaincre que cette opération est impossible sans déchirer – ou recouper, ce qui revient au même – soit la bande, soit le disque…



Ainsi Desargues aura-t-il rencontré le premier une forme « inimaginable », pourtant issue directement de l'observation de l'espace qui nous entoure. Bien sûr, la manière dont je viens d'en parler et de poser le problème est parfaitement anachronique : les mathématiciens du XVIIème siècle étaient sans doute très loin de pouvoir se « représenter » les choses de la façon ensembliste et même topologique qui sous-tend l'explication précédente. Mais comment penser que Desargues ne se soit pas posé lui-même le problème de la « forme » de ce plan *complété par les points à l'infini* ? Comment imaginer que celui qui aura trouvé et mis au point un cadre unique pour la théorie des coniques n'ait pas pu s'interroger sur ce fait de prime abord plutôt curieux : si une hyperbole « touche sa tangente à l'infini » et si cela permet parfaitement d'interpréter la notion d'asymptote, comment se fait-il que la courbe apparaisse comme étant de part et d'autre de son asymptote … alors même qu'elle devrait indéniablement être située en permanence du même côté de chacune de ses tangentes ?

La question que l'épistémologie ne peut manquer de se poser est donc celle de savoir dans quelle mesure cette forme « inreprésentable » aura pu conduire les recherches de Desargues et de ses continuateurs. A-t-elle éveillé la curiosité des Pascal, Newton, De la Hire, Lambert, avant de poser les mêmes problèmes apparemment insolubles aux inventeurs de la géométrie projective proprement dite ? Est-elle un peu pour quelque chose dans la quête d'un Leibniz vers un « calcul géométrique » permettant de se passer complètement de l'appel à la figure ? La seule certitude, semble-t-il, est précisément le *silence* presque total pendant deux siècles et demi sur cette question pourtant inévitable. Durant cette période, les géomètres se sont efforcés de forger des outils algébriques pour maîtriser la prise en compte des *points à l'infini*, mais il faudra attendre les alentours de 1900 pour que l'on cherche explicitement à *se représenter* le plan projectif ! On peut même dire que presque toute la géométrie de la première moitié du vingtième siècle aura consisté à inventer les outils de topologie et de topologie algébrique permettant non seulement de poser le problème dans les termes où je viens de l'expliquer, mais surtout à le résoudre complètement : la représentation cherchée n'est rien d'autre, en l'occurrence, qu'un problème de « plongement » de l'objet « plan projectif » dans l'espace $\mathbf{R}^3$ … et on sait notamment démontrer aujourd'hui qu'un tel *plongement* n'est pas possible.

Vue sous cet angle, la période qui s'ouvre à la Renaissance peut être regardée comme celle de la naissance d'un « paradigme » nouveau par rapport aux mathématiques grecques. Contrairement à ce que pourraient penser un peu vite certains épistémologues, ce paradigme n'est nullement *incommensurable* au précédent, mais il s'est opéré un glissement progressif à propos de la notion de nombre durant la période arabe qui permet d'aborder suivant une approche différente les mêmes problématiques que celles d'Euclide ou d'Archimède. Cependant *percer les secrets des nombres et des formes* va désormais prendre des caractères propres qui permettront aux géomètres non seulement de « récupérer » tous les résultats de l'Antiquité mais aussi d'explorer des continents nouveaux en enrichissant sensiblement la puissance des outils utilisés. D'une part l'univers du géomètre devient « analytique », c'est-à-dire à la fois *différentiable* et *algébrique* et, d'autre part, les formes qu'il manipule – par exemple du plan projectif aux espaces à plus de trois dimensions – sont de plus en plus difficiles à se représenter sous forme de figures. Les problèmes sont donc toujours de même nature, mais les outils à mettre au point relèvent de plus en plus de combinatoires de symboles abstraits, au point que le formalisme cache de plus en plus les problématiques intuitives sous-jacentes aux grandes théories.

Mais cela étant, il n'en reste pas moins que les grands problèmes fondateurs sont toujours du même ordre et que rien n'interdit à l'épistémologue d'interpréter les avancées de la recherche mathématique proprement dite comme essentiellement guidées par ce genre de problèmes fondateurs. Simplement, aucune de la plupart des grandes questions ne reçoit de réponse satisfaisante d'entrée de jeu et le mûrissement des idées intéressantes prend généralement des siècles…

Ainsi, l'exemple de la spirale rapporté précédemment est loin de résumer complètement les énigmes inhérentes à la maîtrise du calcul différentiel découvert au XVIIème siècle. En 1784, sous la plume de Lagrange, l'Académie de Berlin écrivait :

> *« On sait que la Haute Géométrie fait un usage continuel des infiniment grands et des infiniment petits. Cependant les géomètres et même les analystes anciens, ont évité soigneusement tout ce qui approche de l'infini et de grands analystes modernes avouent que les termes sont contradictoires.*
>
> *L'Académie souhaite donc qu'on explique comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'une supposition contradictoire et qu'on indique un principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique, propre à être substitué à l'infini. »*

Il aura fallu attendre la fin du XIXème siècle pour que soient dominées de façon satisfaisante toutes les difficultés de l'analyse moderne et, d'une certaine manière, la première partie de la question effectivement posée par Lagrange devra même attendre les années 1960 pour recevoir une réponse convaincante. De même, le « calcul géométrique » rêvé par Leibniz (comme d'ailleurs son « calcul logique ») aura dû attendre le vingtième siècle pour commencer à devenir opérationnel…

### Deuxième partie : *la déraisonnable efficacité des mathématiques*

Même si j'ai surtout insisté jusqu'ici sur le caractère « interne » aux mathématiques qui consiste essentiellement à traiter *le monde des nombres et des formes* pour lui-même et à chercher des lois ou des propriétés qui semblent s'affranchir de la vérification expérimentale, il n'en est pas moins évident que la presque totalité des problématiques initiales que rencontrent les mathématiciens trouvent leur origine dans des problèmes concrets. Nous allons voir que, quel que soit l'écart manifeste entre ce « moment de la pensée » propre au géomètre ou à l'analyste et les considérations qu'il est plutôt convenu de regarder comme relevant des sciences naturelles, les rapports entre ces deux aspects de la réflexion scientifique ont toujours été imbriqués et fort complexes.

Les philosophes qui s'intéressent aux sciences s'interrogent généralement dans deux directions principales : d'un côté celle de la *nature des objets mathématiques*, de l'autre celle des *rapports entre les trouvailles des mathématiciens et les problèmes posés par les physiciens* ou même par d'autres scientifiques.

Il doit certes apparaître mystérieux à un non mathématicien d'observer (par exemple) les géomètres travailler sur des « objets » terriblement abstraits comme s'il s'agissait d'objets réels véritables, et plus encore de les entendre déclarer (pour la plupart) qu'ils *explorent* un monde aussi tangible et concret que celui qui nous entoure afin de *découvrir ses mystères* et de … *percer ses secrets* ! Il y a là naturellement matière à s'interroger sur la nature « ontologique » de ce « ciel des idées mathématiques » qui contiendrait ces fameux « objets mathématiques », mais comme on ne voit pas bien, en tout état de cause, ce que d'éventuelles réponses à de telles questions pourraient bien changer à la pratique, nous nous intéresserons surtout ici à l'autre versant de ce problème et qui s'énoncera de façon beaucoup moins ambitieuse : *que peut-on dire d'intéressant sur les rapports entre mathématiques et physique* ?

En vérité ces rapports (dans leur complexité) n'ont pas vraiment changé depuis l'époque des mathématiques grecques. En effet, en schématisant à peine, on peut dire qu'Aristote considérait déjà que les géomètres, en s'intéressant à leur « forme », n'étudiaient rien d'autre que des « abstractions » dérivées des objets réels ; mais que, contrairement à la physique, ils ne s'intéressaient pas aux objets eux-mêmes dans la mesure où ces *formes* ne prenaient pas en compte le *mouvement*. Or en inventant la mécanique, la science moderne – disons depuis Kepler et Galilée – s'est mise précisément à intégrer l'étude du mouvement à la géométrie. Le temps « géométrisé » est devenu, comme l'on sait, une dimension nouvelle ajoutée aux trois dimensions de l'espace… À moins que ce ne soit l'espace qui, rapporté à trois axes, se soit imprégné peu à peu de la nature « numérique » du temps, c'est une autre histoire… Mais quoi qu'il en soit, le but de la science restait toujours d'étudier une nature dont les lois étaient écrites en « langage mathématique ».

On se convaincrait vite, s'il en était besoin, de la prégnance d'une telle vision du monde en relisant par exemple les souvenirs entomologiques de Jean-Henri Fabre qui écrivait en 1905, s'émerveillant du fait que notre spirale logarithmique puisse rendre compte aussi bien de la forme des coquillages que de celle des toiles d'araignées :

> *« La géométrie, c'est-à-dire l'harmonie dans l'étendue, préside à tout. Elle est dans l'arrangement des écailles d'un cône de pin comme dans l'arrangement des gluaux d'une Épeire, elle est dans la rampe d'un Escargot, dans le chapelet d'un fil d'Araignée, comme dans l'orbite d'une planète ; elle est partout, aussi savante dans le monde des atomes que dans le monde des immensités. Et cette géométrie universelle nous parle d'un Universel Géomètre, dont le divin compas a tout mesuré. »*

Le propos semble évidemment quelque peu suranné par comparaison avec nombre de discours sur les rapports entre mathématiques et physique qui ont pu avoir cours durant le vingtième siècle, mais la différence est-elle si grande, au fond avec ceux du grand mathématicien russe Vladimir Igorevitch Arnold qui écrivait tout bonnement en 1998 :

> *« Les mathématiques font partie de la physique. La physique est une science expérimentale, une des sciences naturelles. Les mathématiques, ce sont la partie de la physique où les expériences ne coûtent pas cher. »*

C'est que mathématiques et sciences physiques sont si indissolublement liées que, malgré les tentations de certains dans l'histoire et peut-être plus encore dans le milieu du vingtième siècle, il serait bien difficile de considérer l'arithmétique, l'analyse ou la géométrie comme susceptibles d'avoir été *construites* indépendamment du monde qui nous entoure. Cependant, il n'en reste pas moins que, suivant les époques, *notre vision des rapports entre monde mathématique et monde physique a sensiblement évolué* et que c'est sur ce point que je voudrais m'arrêter maintenant, car c'est à cette évolution que l'on peut attacher une première acception importante du terme « modélisation ».

Avec un peu de recul les rapports entre mathématiques et physique ne manquent généralement pas de surprendre. Considérons par exemple le cas des polyèdres réguliers, dont la détermination fut sans doute, comme chacun sait, l'une des plus belles conquêtes des géomètres grecs…

D'abord, bien qu'il s'agisse là évidemment de l'étude d'objets « physiques », on notera que la problématique même qui consiste à *chercher toutes les possibilités* d'obtenir des figures satisfaisant à des conditions analogues d'invariance par symétries est typiquement une problématique de nature « mathématique » plutôt que « physique », au sens où la physique est beaucoup plus, a priori, l'étude de *ce qui existe* que de *ce qui pourrait exister*… Voilà donc d'entrée de jeu une situation quasiment emblématique illustrant à merveille la différence entre deux moments distincts de la pensée : d'un côté, partir du *monde qui nous entoure* pour chercher à démonter les formes remarquables auxquelles il nous confronte, d'un autre côté s'évader du monde tangible tel qu'il est pour *explorer un monde abstrait* – ou idéal, ou virtuel, comme on voudra – avec la certitude que ce « monde des formes et des nombres » recèle une part importante des secrets de la nature…

On peut donc légitimement penser que les sciences physiques progressent à partir de tels allers et retours – véritable dialogue entre monde concret et monde abstrait – et que c'est ainsi qu'une grande part de la physique mathématique a pu naître peu à peu et acquérir le niveau que nous lui connaissons aujourd'hui. Les choses ne sont cependant pas tout à fait aussi simples, même chez les Grecs qui n'étaient pourtant pas si éloignés eux-mêmes d'une vision assez semblable des rapports entre géométrie et physique. En effet, même si l'explication physique du monde à l'époque était rudimentaire et se restreignait essentiellement à ce que l'on appelle la théorie des quatre éléments, il n'en reste pas moins que la découverte des quatre polyèdres réguliers connus n'avait pas manqué d'être mise en relation avec les quatre éléments : le tétraèdre était associé au feu, le cube à la terre, l'octaèdre à l'air et l'icosaèdre à l'eau. Or ce n'est qu'une fois cette « correspondance théorique » établie que l'on découvrit l'existence d'un cinquième et dernier polyèdre possible : le dodécaèdre.

Et alors ? Eh bien on décida qu'*il devait donc exister un cinquième élément* associé à ce nouvel objet et l'on baptisa ce cinquième élément du nom « d'éther »…

Y a-t-il là une si grande différence avec la théorie moderne des particules élémentaires ? La recherche de l'éther coûtait d'ailleurs sans doute moins cher que celle des divers bosons plus ou moins intermédiaires traqués à coups d'accélérateurs pharaoniques … Mais l'existence de ces particules ne repose-t-elle pas, en définitive, sur le même genre de conjecture ? Une classification qui met en correspondance des objets existants avec une liste d'objets mathématiques ne nous amène-t-elle pas à conjecturer l'existence plausible – ou probable, ou nécessaire… – d'autres objets qui permettraient de compléter la collection ? C'est là un second aspect, beaucoup moins rationnel au demeurant, qui unit la pensée mathématique et la recherche physique. Et les polyèdres réguliers semblent particulièrement bien prédestinés à ce genre d'élucubrations, y compris dans la science moderne. Ainsi devons-nous à Kepler ses fameuses lois décrivant les orbites des planètes, mais on a oublié que, parallèlement à celles-ci, il avait aussi tenté d'expliquer les distances des cinq planètes connues à son époque par rapport au soleil à l'aide des cinq polyèdres réguliers emboîtés : la théorie, cette fois, s'effondra directement avec la découverte de Saturne… Il n'empêche : dans un tout autre domaine, à la fin du XVIIIème siècle, l'hypothèse de Haüy sur la structure cristalline conduisit de manière parfaitement constructive à la classification, par Bravais puis par Fedorov, de tous les réseaux réguliers possibles, et entraîna de ce fait à une revisitation des structures symétriques. Mais cela ne réussit pourtant guère à un Ampère qui, au début du XIXème siècle, tenta de faire correspondre les diverses formes de polyèdres « composés » – ou, si l'on préfère, semi-réguliers – aux différentes molécules chimiques que l'on commençait à entrevoir à l'époque…

Ainsi semble donc aller la « déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences » ! Car s'il est clair que les considérations mathématiques s'accordent souvent à merveille avec les phénomènes physiques, on doit bien reconnaître que les progrès en la matière, même les plus spectaculaires, se font bien souvent, sinon de manière purement irrationnelle, du moins suivant la méthode de progression empirique par « essai-erreur ». Ainsi, la grande ourse n'est pas plus inscrite dans le ciel étoilé que l'orbite elliptique de Mercure. Et on peut d'ailleurs penser que son appellation chinoise de *grande casserole* a été provoquée intuitivement par une sorte de *hasard objectif*… Mais la *forme* affectée par les scientifiques à l'orbite de Mercure est au contraire le résultat d'un très grand nombre d'approximations qui sont venues corriger peu à peu les intuitions premières et qui s'inscrivent dans une formidable enquête destinée à se construire progressivement une vision globale de l'univers. On aurait pourtant tort de croire que ces *formes* ont été imposées par l'expérience ou tout simplement qu'il suffisait de *regarder correctement le monde* pour les dégager, les contempler et se les approprier petit à petit. C'est presque toujours le contraire qui s'est passé ! Les ellipses képleriennes avaient été étudiées quelque mille ans auparavant par des géomètres uniquement pour des raisons de géomètres et c'est très certainement par hasard que Kepler a découvert qu'*en trichant un peu*, les observations de Tycho Brahé pouvaient s'interpréter en termes d'ellipses… Et là, l'histoire – avec Newton – lui a donné raison, même si nous pensons aujourd'hui que les choses sont encore bien plus compliquées que ne pouvaient l'imaginer les découvreurs géniaux du XVIIème siècle.

Il y a évidemment des réussites qui pourraient passer – aujourd'hui ! – comme très naturelles. Par exemple comme lorsque nous regardons un Huygens, dès 1690, compléter la loi de la chute des corps dans le vide énoncée par Galilée et l'étendre, grâce à la fonction exponentielle à peine découverte, au cas de la chute avec frottement. Mais contrairement à ce que pouvait espérer un Poincaré, les solutions à mettre en œuvre dans les questions de physique ne sont pas nécessairement justifiables par la raison, du moins dans l'état de nos connaissances actuelles. Ainsi, pour revenir une dernière fois sur le cas des polyèdres et des pavages de l'espace, la toute récente découverte des « quasi-cristaux » (qui semblaient mettre en défaut la classification établie par la cristallographie) ne trouva-t-elle une explication intéressante que de manière tout à fait fortuite et inattendue. Ce n'est en effet que par le hasard d'une rencontre entre physiciens et mathématiciens que l'on s'aperçut de l'analogie entre le phénomène observé et certaines propriétés de pavages irréguliers qui n'intéressaient guère jusque-là que des arithméticiens et des logiciens. Bref, les exemples ne manquent pas pour montrer que ce qui est « logiquement conjecturable » se révèle souvent parfaitement inadapté et que ce qui est tout à fait *non naturel* au départ finit par s'imposer et provoquer la refonte des idées antérieures ! J'en resterai ici sur l'un des tous derniers en date et qui a trait à la théorie géométrique des nœuds.

Celle-ci, qui consiste en première analyse à classer les différentes formes prises par une corde nouée refermée sur elle-même, a été introduite par Thomson à la fin du XIXème siècle pour … *tenter de classer les différents atomes* connus à l'époque. En d'autres termes, Thomson cherchait à expliquer les diverses espèces chimiques en leur faisant correspondre des types différents de courants fermés sur eux-mêmes. Une idée aussi « mécaniciste » a sans doute fortement amusé Poincaré et s'est révélée particulièrement inadaptée, dans la mesure où la classification des nœuds a vite fait apparaître une complexité qui semble hors de propos en matière de table des éléments chimiques simples… Pourtant, ce que l'on désigne aujourd'hui sous le nom de « théorie des cordes » ne repose sur rien d'autre, au départ, que sur l'idée de considérer les particules élémentaires comme un analogue de courbes fermées et plus ou moins « nouées » dans des espaces semblables à l'espace-temps de la théorie de la relativité.

C'est que désormais tous les coups semblent permis en physique mathématique : domination des probabilités, mystères des diverses quantifications, paradoxes des intégrales de chemins, acrobaties des renormalisations, etc. Au point qu'un physicien comme Feynmann peut écrire : « ces calculs donnent des résultats numériques conformes à l'expérience au delà de douze décimales … Mais ne me demandez pas pourquoi ils marchent, personne ne l'a compris jusqu'à présent ! ». Une autre façon de dire la même chose se rencontre sous la plume d'un mathématicien comme Alain Connes, qui considère que l'on revient aujourd'hui à une situation analogue à celle du XVIIème siècle où tout ce qui « marche » pose malicieusement d'insurmontables problèmes de justification « logique » : manipulation d'infinis, ruptures d'échelles dans l'infiniment petit, etc., et donne l'impression que la solution passe par la mise au point d'une nouvelle forme de calcul, de la portée de celle qui fut rendue nécessaire, à l'époque, par l'invention du calcul infinitésimal…

Néanmoins, même si on peut considérer que les rapports entre mathématiques et physique ne sont en définitive ni plus ni moins « déraisonnables » à notre époque que par le passé, il s'est produit un changement assez sensible à propos de ces rapports, notamment en ce qui concerne le *regard* que nous portons désormais sur la notion même de théorie physique.

Pour le dire autrement, et pour prendre l'exemple très élémentaire de la géométrie : alors que l'on peut sans grand risque considérer que *notre idée du monde qui nous entoure*, de même que *notre idée du temps qui nous emporte dans sa course*, sont depuis la Renaissance particulièrement bien en adéquation avec les représentations que peuvent en donner la mécanique classique, la physique mathématique a dû se résoudre à envisager – et à accepter – des bouleversements conceptuels inimaginables pour mettre en accord les phénomènes observés et notre intuition spatio-temporelle. C'est-à-dire que si, jusque-là, il pouvait sembler relever quelque peu de la rhétorique de faire la différence entre « monde des formes » et « monde réel » et si chacun pensait au fond de lui-même que les approximations ou les idéalisations effectuées par le géomètre ne remettaient pas *véritablement* en cause la pertinence de sa description de l'espace, il a bien fallu se rendre à l'évidence au tournant du XIXème et du XXème siècle : non seulement le temps et l'espace s'ingénient à prendre le contrepied de l'idée que nous nous en étions forgée, mais le monde des particules et des interactions entre celles-ci prend un malin plaisir à désobéir à l'intuition de « l'infiniment petit » qui avait triomphé depuis le XVIIème siècle !

Il est clair que la confrontation à pareille *révolution scientifique* a nécessité une adaptation des certitudes philosophiques à la nouvelle situation et a conduit à une nouvelle appréhension des rapports entre les trois pôles que nous pourrions appeler l'*imaginaire*, le *symbolique* et le *réel*, en les spécifiant ici de manière à être rapportés à l'activité de théorisation scientifique : le *réel* recouvrirait évidemment l'ensemble des phénomènes étudiés expérimentalement par les sciences physiques, l'*imaginaire* correspondrait aux *représentations intuitives* que nous nous faisons des phénomènes et sur lesquelles nous raisonnons, enfin le *symbolique* désignerait tout l'*appareil formel, calculatoire ou algébrique* mis en jeu dans l'activité mathématique. D'une certaine manière chacun de ces trois pôles a trouvé une forme d'autonomie et un positionnement par rapport aux deux autres qui diffèrent assez sensiblement aujourd'hui de ce que l'on pouvait considérer auparavant. Il serait naturellement trop long de prétendre analyser ici tous ces changements en détail, mais il est possible d'en illustrer les grandes lignes sur l'exemple « paradigmatique » de la géométrie.

Le domaine de la représentation du monde – comme l'indique l'étymologie même du mot *géométrie* – a connu en effet une sorte de séisme au cours du XIXème siècle avec la découverte (ou l'invention, comme on voudra…) des géométries non euclidiennes. Alors même que la géométrie, depuis les Grecs, était censée donner les lois qui gouvernent l'agencement des différentes figures de l'espace, on s'aperçut qu'il y avait, du simple point de vue de la rigueur, *plusieurs modèles possibles* pour décrire les propriétés de celui-ci et qu'aucune contradiction interne ne rendait plus légitime de supposer que les droites parallèles obéissaient ou non au célèbre axiome d'Euclide.

Concrètement, les géomètres avaient tenu jusque-là pour évident que deux droites également inclinées par rapport à une troisième ne pouvaient pas se couper, aussi loin que l'on prolonge la construction, et ils pensaient même que c'était là le seul cas possible pour que deux telles sécantes ne se rencontrent pas. Mais d'un point de vue « mathématique » ils ne s'étaient pas rendu compte que rien, dans l'absolu, n'obligeait leur plan à respecter cette contrainte et, qu'au contraire, celui-ci pouvait parfaitement se comporter tout autrement lorsqu'on l'envisageait « vers l'infini ». Parallèlement, il ne restait donc plus aux physiciens qu'à s'interroger – je veux dire : trouver le moyen d'interroger le monde réel… – pour savoir si celui-ci avait tranché dans un sens plutôt que dans un autre à propos de cette grave question du cinquième postulat… Or, comme tout le monde le sait, le « monde réel » n'a pas daigné répondre à cette question. On peut cependant à bon droit considérer que l'émergence *des* géométries possibles marque une rupture dans la manière dont la science a pu dès lors aborder le problème des rapports entre *symbolique*, *réel* et *imaginaire* : il n'y avait pas, comme on le pensait jusque-là, de *mathématisation naturelle* de l'espace et le choix d'une *modélisation géométrique* du monde ne pouvait que relever de critères dont l'aspect objectif devait en permanence être soumis à discussion. La *géométrie des géomètres* venait assez brutalement de se séparer de la *géométrie des physiciens* !

On trouve évidemment trace de ce problème philosophique et scientifique dans toute la deuxième partie du XIXème siècle. En mathématiques, il faut naturellement y rattacher les nombreuses tentatives pour trouver des fondements à la géométrie qui prennent en compte cette non-unicité de la représentation finale. L'impossibilité de faire référence au monde physique est sans doute à l'origine, par ailleurs, de la véritable montée en puissance et du succès de la méthode axiomatique. En philosophie, cela correspond à l'émergence des positions comme celles défendues par Poincaré et qualifiées depuis de « conventionalistes » : nous ne pouvons pas vraiment connaître le monde et nous devons nous contenter de choisir la géométrie qui est la plus pratique, la plus avantageuse, pour énoncer les lois que nous constatons.

De manière un peu analogue, mais plus marginalement, il conviendrait peut-être même de rattacher, à cette nécessité de remettre en cause ce qui était tenu jadis pour des « vérités intangibles », la mise en évidence de ce que nous appelons aujourd'hui le « paradoxe de Bertrand ». Sur l'exemple désormais classique de la probabilité pour que, dans un cercle, la longueur d'une corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit, celui-ci remarqua en effet que le résultat obtenu pouvait essentiellement dépendre de la manière de « mesurer » l'ensemble des cas favorables et l'ensemble des cas possibles et qu'un même problème pouvait donc relever de diverses façons de le « théoriser ».

À une échelle plus restreinte, et dans un monde purement mathématique cette fois, on reconnaît spécifiquement ici l'idée de « modèle » appliquée à un cas très particulier, c'est-à-dire en mode mineur. Nous dirions en effet : « la probabilité calculée dans le cas du problème de Bertrand dépend du *modèle* choisi pour *modéliser* la situation ». Mais si cette façon de parler est désormais largement passée dans les habitudes, la question s'est posée sous une tout autre ampleur à partir du vingtième siècle. Il ne s'agissait nullement de sujets limités, énoncés dans un contexte considéré comme établi – par exemple comme on pourrait dire que l'exercice sur la probabilité de la longueur de la corde ne remet pas en cause le contexte de la géométrie euclidienne dans lequel il est posé –, il s'agissait au contraire de rien moins que de notre *vision globale du monde*. Celle-ci est devenue *instable*, comme je l'ai dit plus haut, à partir du moment où *la* géométrie a dû céder la place *aux* géométries et on ne peut pas dire que les choses se soient vraiment arrangées à partir de 1900 : surprises dues à la théorie de la relativité qui fait, d'une certaine manière, exploser le problème de la géométrie du monde en reléguant aux oubliettes la question proprement dite des géométries non euclidiennes, … chamboulements apportés par la mécanique quantique qui remet en cause le déterminisme géométrique, … applications inattendues des *monstres* non dérivables dans les théories probabilistes telles que celle du mouvement brownien.

Le terme « modèle » s'applique alors à une échelle bien différente de celle du paradoxe de Bertrand : c'est la conception même du monde qui relève désormais de « modèles »…

En résumé, on semble savoir – ou avoir admis, … ou faire semblant d'avoir accepté … – que la notion de vérité scientifique cède ainsi la place à la notion de « fiction ». C'est-à-dire que, d'un côté les mathématiques travaillent sur des objets largement « fictifs », d'une part parce que l'on ne se pose plus vraiment le problème de leur existence tangible dans quelque « ciel idéal » que ce soit, et d'autre part parce que la méthode axiomatique revient en définitive à se fixer très explicitement des « règles du jeu » qu'il n'est plus nécessaire de remettre en cause (on décide de faire « comme si » …). Pendant ce temps, les physiciens s'accommodent assez bien, de leur côté, de considérer systématiquement qu'ils travaillent dans tel ou tel « modèle » (relativiste, non relativiste, quantique, etc.) et cherchent simplement si l'appareil théorique attaché à ce modèle permet ou non de rendre compte des expériences et des mesures.

Bien sûr le mot « fiction » est peut-être parfois un peu fort, et on dira tout simplement, selon les circonstances, « théorie » ou « modèle » (comme dans « théorie standard » ou « théorie du big bang », ou comme dans « modèle de l'atome de Bohr »), mais dans tous les cas les rapports entre nos trois pôles *réel*, *symbolique* et *imaginaire* se sont modifiés : la science est obligée de prendre en compte le fait que les théories sont toutes, dorénavant, susceptibles d'être sujettes aux révisions les plus inattendues et qu'elles ne sauraient, non plus, s'appliquer globalement et simultanément à tous les aspects d'un même domaine expérimental.

Il est difficile de savoir si ce changement de « posture » a vraiment eu des conséquences autres que celles qui sont évidentes sur notre façon de voir, c'est-à-dire sur le point de vue épistémologique. On peut assez naturellement penser que ce qu'il est convenu d'appeler le progrès scientifique n'a pas sensiblement été perturbé par cette évolution. Toutefois, il y a peut-être eu, corrélativement à ce phénomène, une certaine incidence en ce qui concerne l'idée même « d'explication du monde » que l'on attache généralement à l'idée de recherche scientifique. « Prédire n'est pas expliquer », on connaît la protestation célèbre d'un René Thom reprochant à la physique actuelle de se contenter de trouver le moyen de faire des calculs aboutissant à une fabuleuse précision sans avoir vraiment trouvé le *sentiment d'avoir pu prévoir le résultat*… Je ne reviendrai pas sur la citation de Feynmann rapportée plus haut, mais un exemple particulièrement symbolique pourrait illustrer à merveille, me semble-t-il, une certaine forme de changement dans les pratiques effectives de la physique moderne : celui de la « théorie » de l'électron.

Dès 1900, l'étude du comportement d'une telle particule avait amené Lorentz à constater que, pour se conformer aux lois de Maxwell, les calculs nécessitaient de supposer une invariance par rapport à ce que nous appelons maintenant des *transformations de Lorentz*. Et dès avant toute interprétation géométrique de cette propriété, Poincaré et Einstein en avaient tiré les conséquences connues aujourd'hui sous le nom de théorie de la *relativité restreinte* et qui obligent à considérer que l'espace et le temps ne peuvent être complètement distingués… C'est-à-dire que, dans cette situation, ce sont les calculs – parce qu'ils refusaient de marcher autrement – qui *forcèrent à remettre en cause toute notre conception habituelle* de l'espace et du temps.

D'ailleurs simultanément, en 1905, Poincaré tentait déjà de « faire marcher » sur la même base des calculs qui se proposaient d'englober la théorie de la gravitation, mais on sait qu'il fallut attendre une dizaine d'années et les idées plus abouties (et plus géométriques) d'un Einstein pour que le problème trouve une « théorie » qui sera celle de la *relativité générale*. Ce qui est plus frappant en revanche touche, encore une vingtaine d'années plus tard, à la façon dont Dirac résolut le problème de ce même électron pour tenir compte à la fois des contraintes de la mécanique quantique naissante et de la relativité restreinte, c'est-à-dire de l'invariance par rapport aux transformations de Lorentz. Sa méthode ne consista pas à chercher une équation décrivant le comportement de l'électron qui soit fondée sur des considérations théoriques a priori, mais il prit – carrément pourrait-on dire – le problème à l'envers : il se demanda directement *quelle forme devrait avoir l'équation* pour satisfaire aux diverses contraintes d'invariance et ensuite, une fois constaté que les résultats étaient conformes à l'expérience, il fut seulement question « d'interpréter » les calculs pour en comprendre les éventuelles conséquences physiques…

On est loin des méthodes classiques permettant de mettre en place et de justifier l'équation d'un équilibre ou d'un mouvement en faisant appel aux diverses heuristiques reposant sur les ressources de l'intuition ou sur les miracles du calcul des infiniments petits cher à Lagrange !

C'est au fond exactement là, précisément à l'interface entre mathématique et physique, dans ce moment où il s'agit – le plus souvent – de *déterminer l'équation associée* à un problème que réside tout le mystère des liens entre le travail des mathématiciens et des physiciens. Et c'est d'ailleurs là, il faut bien l'avouer, que s'arrêtent non seulement les diverses réflexions philosophiques, mais aussi les recherches en matière de transmission des savoirs. Si une philosophie des sciences est possible, elle doit essayer de comprendre en quoi les mathématiques (avec tous les caractères que j'ai soulignés dans la première partie) constituent une phase absolument indispensable dans la démarche scientifique. D'une certaine façon, en effet, l'explication du *réel* qui nous entoure en termes de *symboles* dépourvus de sens propre et dont le seul agencement combinatoire permettrait de prévoir avec une précision fabuleuse le cours des planètes, le retour des comètes et tous les phénomènes physiques connus ne saurait relever que de pratiques *magiques*.

Mais on s'aperçoit (comme j'ai tenté de le montrer) qu'entre le monde symbolique de l'algèbre – ou plutôt *des algèbres* – et le monde réel des sciences physiques, les mathématiques en général et la géométrie en particulier construisent un *monde imaginaire* où vivent les « formes » et les « nombres ». C'est dans ce monde-là que se forgent les médiateurs entre les signes et les choses et l'observation des rapports entre physique et mathématiques met en évidence le fait que la connaissance procède en réalité *dans les deux sens* et que ces deux sens ne se résument pas, comme on le croit trop souvent, en une phase de « théorisation » et en une phase « d'expérimentation » qui se répondraient dans un dialogue *rationnel* permanent. Ces deux phases existent, mais elles correspondent à deux *moments de la pensée* dont les relations mutuelles sont beaucoup plus complexes qu'on pourrait l'imaginer… Je laisserai en tout cas le philosophe trancher ce problème, car il nous faut maintenant nous intéresser au versant de celui-ci (sans doute de beaucoup le plus difficile) qui concerne les problèmes liés à l'apprentissage des mathématiques et des sciences…

## Troisième partie : *Des mathématiques modernes à la modélisation…*

Si, en effet, on ne peut plus guère, depuis Bachelard, ne pas s'interroger comme nous venons de le faire, sur la nature même de ce qu'il est convenu d'appeler « l'esprit scientifique », il nous revient évidemment – et surtout dans un colloque Inter-Irem… – de nous attacher quelque peu à la question de la *formation* de l'esprit scientifique.

La dualité, ou la complémentarité, entre mathématiques et physique qui semble ainsi structurer la réflexion s'est toujours manifestée au niveau de l'enseignement de l'une et de l'autre, et le problème de savoir s'il est possible d'optimiser la synergie entre ces deux *moments de la pensée* est un problème récurrent dans le domaine de la didactique des sciences. Nous allons voir que, si les choses donnent l'impression de changer à cet égard depuis quelques décennies, un grand nombre des difficultés sont loin d'être surmontées et que personne, jusqu'à présent, ne peut prétendre avoir *percé les secrets* d'une alchimie susceptible d'améliorer vraiment l'apprentissage des sciences, ou même – ce qui est plus grave – de tout simplement susciter la curiosité scientifique…

D'une certaine façon, la réforme des années soixante-dix (celle des « maths modernes) illustre à merveille le choix de donner le primat à une forme de ce que j'ai considéré jusqu'ici comme le « moment de la pensée » propre aux mathématiques. Les définitions, les théorèmes se déroulaient pour eux-mêmes et la préoccupation principale des programmes était de construire un édifice logique parfaitement rigoureux et entièrement fondé sur la hiérarchie des structures ensemblistes. Comme on le sait, cette réforme avait été essentiellement engagée avec le soutien des « structuralistes » spécialistes des sciences humaines, contre l'avis des physiciens. C'est un euphémisme de dire qu'elle a surtout été marquée par l'abstraction et le formalisme, mais, sous certains aspects, les choix engagés correspondaient non seulement au refus de laisser « polluer » les concepts mathématiques par des images issues de la réalité physique, mais aussi au rejet de pratiquement toute « intuition » susceptible de dépasser le discours logico-déductif proprement dit. C'était donc, en quelque sorte, le « triomphe des analystes », au point même où la géométrie (je veux dire évidemment l'étude des formes…) devait se faire *sans figures* pour ne pas risquer de laisser croire que la démonstration résultait un tant soit peu de la considération du dessin.

En 1900 déjà, lors du deuxième Congrès international des mathématiciens, Poincaré insistait sur la différence fondamentale, à ses yeux, entre les mathématiciens « analystes » et les mathématiciens « géomètres ». Pour lui, les premiers sont « préoccupés de logique », les seconds se « laissent guider par l'intuition », et il cite à cet égard deux exemples presque caricaturaux… D'abord celui de Charles Méray :

> *M. Méray veut démontrer qu'une équation binôme a toujours une racine, ou, en termes vulgaires, qu'on peut toujours subdiviser un angle. S'il est une vérité que nous croyons connaître par intuition directe c'est bien celle-là. Qui doutera qu'un angle peut toujours*

> *être partagé en un nombre quelconque de parties égales ? M. Méray n'en juge pas ainsi ; à ses yeux, cette proposition n'est nullement évidente et pour la démontrer, il lui faut plusieurs pages.*

Puis celui de Félix Klein :

> *Voyez au contraire M. Klein : il étudie une des questions les plus abstraites de la théorie des fonctions ; il s'agit de savoir si, sur une surface de Riemann donnée, il existe toujours une fonction admettant des singularités données. Que fait le célèbre géomètre allemand ? Il remplace sa surface de Riemann par une surface métallique dont la conductibilité électrique varie suivant certaines lois. Il met deux de ses points en communication avec les deux pôles d'une pile. Il faudra bien, dit-il, que le courant passe, et la façon dont ce courant sera distribué sur la surface définira une fonction dont les singularités seront précisément celles qui sont prévues par l'énoncé.*

Il convient évidemment de relativiser ces deux extrêmes – et Poincaré ne s'en prive pas – mais il n'en reste pas moins qu'il illustre ainsi deux tendances indéniables entre lesquelles évolue la « pensée mathématique » : nous pouvons aisément les rapporter, d'une part, au *goût du formalisme* et, d'autre part, à la nécessité de l'*imagination créatrice*. Et il est clair que la réforme des maths modernes a coïncidé avec un impérialisme absolu du goût du formalisme au détriment de l'intuition géométrique et physique. Pour reprendre les exemples de Poincaré, il n'était plus question de ne pas démontrer une quelconque affirmation sur les angles, … ou d'ailleurs sur quoi que ce soit d'autre… Le leitmotiv des instructions commentant les programmes était clair : même si telle ou telle démonstration est naturellement hors de portée des élèves, il reste essentiel de leur dire que ceci ou cela « se démontre » !

À faible dose, cette tendance pouvait évidemment satisfaire certaines formes d'esprit. Nombre de collègues vous diront par exemple « qu'ils n'aimaient pas la physique » ou même qu'il « n'ont jamais rien compris en physique » alors qu'ils adoraient les mathématiques, parce qu'en physique « ce n'était pas rigoureux » et que l'on ne « savait jamais ce qu'il fallait négliger ou pas ». Il n'en reste pas moins qu'il a bien fallu constater l'échec de ce parti-pris : les élèves ne pouvaient pénétrer des concepts abstraits qui formaient effectivement un édifice inattaquable mais qu'on leur livrait complètement terminé. Les voûtes maîtresses étaient présentées achevées, *décintrées* pour reprendre une fois encore une très belle image de Poincaré, et ceci alors même que l'on prétendait aider l'élève à se « construire son savoir ».

L'exemple du cours sur le plan et la droite en classe de quatrième résume à lui tout seul les rapports entre formalisme et intuition, entre mathématiques et physique à cette période : le professeur pouvait dire quelques mots sur la droite ou sur le plan « physiques » que l'on était en train de « modéliser mathématiquement », mais il devait se dépêcher de se placer dans le cadre mathématique, et d'interdire la moindre figure qui pouvait détruire la pureté d'une structure mise en place pour couvrir, au besoin, le cas des droites ou des plans finis… D'ailleurs rappelons-nous encore un des credos des zélateurs de la réforme : « les enfants apprendront certes à compter plus tard, mais il le sauront mieux »… Tout simplement parce que, dans leur esprit (des réformateurs), il convenait d'apprendre d'abord les « nombres » et les

« ensembles de nombres » dans le cadre algébrique avant de pouvoir *modéliser* (!) des situations telles que : « deux pommes plus trois pommes font cinq pommes » ! Par contraste, il est particulièrement intéressant de relire aujourd'hui ce qu'écrivait Henri Lebesgue dans la première moitié du siècle à propos de l'enseignement des nombres. Il considérait au contraire comme indispensable d'éviter toute abstraction inutile et, surtout, d'éviter toute complication « métaphysique » :

> *Pour compter ou dénombrer, on attache mentalement un objet différent de la collection envisagée à chacun des mots successifs de la phrase (ou suite) des nombres ; le dernier nombre prononcé est le nombre de la collection.*
> *Ce nombre est considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compte rendu complet. Un résultat expérimental sert à dispenser d'autres expériences : les règles des quatre opérations nous dispensent des opérations de dénombrement de certaines collections que l'on peut former à partir de collections déjà dénombrées.*

Et il en va de même, par exemple, pour les complications arithmétiques telles que celles qui touchent aux fractions :

> *Je sais bien qu'à force de chercher on découvrirait quelques « applications » des fractions ; que certains mécaniciens pour tarauder un pas de vis font des calculs de fractions. Mais pas un sur dix d'entre eux n'a établi une relation quelconque entre la pratique du métier et l'enseignement scolaire et lorsque, par extraordinaire, ce rapport a été établi on peut affirmer que c'est la vis qui a fait comprendre les fractions bien plutôt que les fractions n'ont fait comprendre la vis.*[2]

On le voit : les « maths modernes » avaient balayé de tels scrupules pédagogiques et avaient pris l'exact contre-pied des idées d'un Lebesgue. Mais devant l'échec, le repli s'est surtout effectué en désordre et n'a pas vraiment donné lieu à un véritable retour en arrière. Aucune idée didactique ou épistémologique majeure n'est venu remplacer les dogmes bien assurés des réformateurs de 1970 et on a plutôt pu assister, à la fois, à l'abandon progressif de pans entiers des programmes et à un net affaiblissement, d'ailleurs assez anarchique, des divers formalismes introduits auparavant. Il est clair pourtant que certaines idées directrices ont sous-tendu les diverses modifications de programmes des trente dernières années, mais elles semblent bien contradictoires et on peut dire sans trop se tromper qu'aucune n'a été suffisamment porteuse pour contrebalancer une réforme qui reposait, somme toute, sur des choix cruciaux et extrêmement consistants, même s'ils se sont très vite avérés inadaptés aux problèmes de l'apprentissage. Les contre-réformateurs n'ont jamais vraiment suivi, par exemple, les idées de tous ceux qui s'élevaient contre la réforme au nom de la disparition de la géométrie ou de son éloignement de la physique, et si on a tenté de mettre en place un antidote particulier aux mathématiques formelles, celui-ci a surtout consisté en une montée en puissance d'une idée, ou peut-être tout simplement d'un slogan : celui de « modélisation »…

C'est précisément sur ce point qu'il nous faut nous arrêter maintenant, en tant que tentative de renouer les liens entre l'abstraction des outils mathématiques et l'analyse des phénomènes concrets.

(2) La mesure des grandeurs. Éditions Blanchard, 1975.

Sans caricaturer, en effet, car beaucoup ont pu en faire le constat en de nombreuses occasions : toute étude de « problème concret », tout appel au « sens des opérations », toute « mise en équation » d'énoncé de collège devient un prétexte à « changer de cadre », à jongler entre les différents « registres » et à « modéliser le réel » ! Les mathématiques s'intéressent certes de nouveau directement aux situations de la vie courante, mais dans un unique mouvement : la *mise en application* d'outils géométriques ou algébriques acquis dans le cours théorique pour offrir des *modèles* utilisables par les divers praticiens en quête de solutions à leurs problèmes extra-mathématiques.

L'ambition affichée est bien, parfois, de partir de situations concrètes pour introduire certains concepts – c'est sans doute là l'origine de l'encouragement officiel à commencer les cours par des « activités » –, mais bien peu de ces *activités* consistent en une approche un tant soit peu sérieuse de problématiques effectives et sensées. En réalité, le sens du mot « modélisation » qui s'est trouvé mis en jeu à partir de cette époque est surtout celui qui relève d'une acception parfaitement « moderne » et même, pourrait-on dire, « post-moderne »… Car le mot lui-même de « modélisation », est un néologisme créé dans les années 1970, qui n'a qu'indirectement à voir avec ce que nous avons rencontré jusqu'ici et qui pouvait se rattacher à l'idée de « modèle » en sciences physiques. Il a essentiellement été introduit pour renvoyer à la pratique consistant à mettre au point des « modèles » *en calcul scientifique* – c'est-à-dire le plus souvent des algorithmes – afin d'explorer des problèmes très spécifiques, notamment en météorologie ou en économie.

On a alors pris peu à peu l'habitude de l'utiliser, en sciences naturelles et même en sciences humaines, pour désigner des foules de tentatives consistant à simplifier et à « mathématiser » des situations variées et, comme par mimétisme, on a vu fleurir depuis lors dans l'enseignement des foules d'exemples, plus originaux les uns que les autres, destinés à appliquer des outils de l'analyse ou de la géométrie à diverses situations plus ou moins apparentées aux autres disciplines : reproduction des coccinelles, contours du disque solaire, débit des cours d'eaux, migrations des papillons, trajectoire d'un avion dans un labyrinthe, etc. J'en oublie évidemment, volontairement et involontairement…

Ce n'est naturellement pas mon propos de m'arrêter sur tel ou tel exemple précis ; certains ne mériteraient pas tant d'honneur, alors que d'autres constituent au contraire des sujets d'un intérêt indéniable. Mais il nous faut en revanche chercher à dégager les principaux traits de cette orientation nouvelle de l'apprentissage des mathématiques et je résumerai d'entrée de jeu ces principaux traits sous une formule simple : la « modélisation » repose sur *trois paradoxes de l'enseignement actuel* qu'elle contribue à mettre en lumière de façon inégalée jusqu'ici.

**a) le paradoxe de l'exemple paradigmatique**

Partons en effet, *avant même de considérer quelqu'exemple particulier que ce soit*, de simples remarques de bon sens : comment peut-on demander à un élève de savoir « modéliser » une situation qu'il ne connaît pas au départ, pour la simple et bonne raison que la connaissance de cette situation passerait de manière non négligeable par la manipulation de sa forme modélisée ? comment peut-on demander à un élève, en supposant qu'il connaisse tout de même un peu le problème en question, de savoir appliquer des outils mathématiques qu'il vient d'apprendre (ou qu'il est en train d'apprendre) dans une situation qui serait censée être consistante, intéressante et originale ? Bref : ou bien on s'imagine que l'élève peut apprendre des outils, des techniques, des méthodes, indépendamment des applications sur des exemples plus ou moins concrets et qu'il peut ensuite savoir les appliquer sur des problématiques non vides qu'il découvrirait pour la première fois ; ou bien on pense que l'apprentissage des outils mathématiques nécessite du temps, de nombreux exercices suffisamment semblables pour être assimilés ainsi que de nombreuses applications qui exigent, chacune, d'être domestiquées progressivement.

Disons-le autrement : il y a bien peu de situations réelles pour lesquelles le niveau de connaissances mathématiques du primaire ou du secondaire permet d'apporter des éclaircissements intéressants, même si on affuble cela du terme pompeux de *modélisation* et il faut bien reconnaître que lorsque l'on a la chance de mettre le doigt sur des exemples porteurs il n'y a aucune bonne raison pour se priver d'en tirer des foules d'exercices ou d'activités qui non seulement permettront aux élèves d'apprivoiser le sujet, mais aussi leur donneront l'occasion de faire fonctionner l'outil qu'ils sont en train d'apprendre dans un grand nombre de configurations proches l'une de l'autre.

C'est sans doute ainsi que sont apparus jadis les problèmes de robinets et de bassins qui se vident l'un dans l'autre, les problèmes de cyclistes et de trains qui se poursuivent ou qui se croisent, les problèmes sur les poids et contrepoids de la machine d'Atwood, les problèmes de décharge d'un condensateur dans des solénoïdes, … et j'en passe. En fait, les ressources exploitables n'ont jamais vraiment manqué et elles ont la plupart du temps donné lieu à des kyrielles d'exercices plus ou moins ritualisés. C'est ce que l'on peut à bon droit appeler des *exemples paradigmatiques* au sens où l'on dit, par exemple, que la conjugaison du verbe chanter constitue le paradigme des conjugaisons pour les verbes du premier groupe. Ainsi, les problèmes de trains ne sont rien d'autres que des *modélisations qui ont réussi* et constituent à l'évidence le « paradigme » des problèmes qui peuvent se poser autour de la formule « distance égale vitesse multipliée par le temps », et, de ce fait, autour d'un grand nombre de situations qui relèvent de la multiplication et de l'usage d'unités-quotients…

On peut évidemment fustiger tous ces « problèmes de robinets » mais, sous peine d'amateurisme, on ne peut pas – je veux dire les faiseurs de programmes ne peuvent pas – faire semblant de croire que des modélisations, que quelque malédiction paraît d'ailleurs prédestiner à être soit ridicules soit trop difficiles, puissent remplacer des *exemples paradigmatiques* pédagogiquement bien compris.

**b) le paradoxe du niveau de culture**

Quoi qu'on en dise, les exemples paradigmatiques qui sont maîtrisés à la fin d'une scolarité ne constituent pas autre chose que le *niveau de culture* de l'individu considéré, qu'il s'agisse d'un élève ou qu'il s'agisse d'un professeur. Je ne reviendrai pas sur la liste des exemples précédents, mais curieusement la quasi totalité ne font pas partie de la culture habituelle des professeurs de mathématiques. C'est-à-dire qu'en toute honnêteté, la modélisation des crues fluviales ou de la reproduction des papillons font bien partie de la cueillette insolite de quelques rédacteurs de conseils ou d'instructions, mais ne s'inscrivent dans aucun niveau de culture. Qu'il s'agisse évidemment de culture hydrologique ou entomologique, mais qu'il s'agisse aussi de culture mathématique. Peut-être faut-il incriminer ici l'ignorance générale des professeurs, mais n'est-il pas étonnant que les illustrations proposées ne s'inscrivent dans aucun contexte familier et ne semblent constituer, de leur côté, aucun champ précis de connaissance nouvelle ?

On retrouve là une autre facette du paradoxe précédent, mais éclairée sous un angle plus culturel : comment se fait-il qu'une fois un exemple traité en termes de modélisations, on ait d'abord l'impression de ne pas avoir appris grand chose, ensuite le fort sentiment d'avoir gâché l'intérêt originel de la situation en la tordant de façon à ce qu'elle veuille bien se plier à la modélisation choisie, enfin que l'on ait vite envie de l'oublier parce qu'elle ne porte plus en elle, sous l'angle où elle vient d'être soi-disant éclairée, le moindre germe de curiosité pour des situations analogues ?

En réalité, une « modélisation » mathématique correspond généralement à un travail de professionnels au sens suivant : un mathématicien est parfois – ou souvent, c'est selon… – consulté pour apporter ses compétences dans un problème très pointu que lui soumet un spécialiste d'une autre discipline… Il cherche alors comment mettre en équations (ou en algorithme) la question spécifique, puis c'est généralement par un dialogue avec l'expert extérieur que le problème peut trouver des éléments de solution. Mais le plus souvent, le modèle retenu ne contribue guère à *faire comprendre* la problématique initiale. Il peut sans doute permettre de *prédire* le résultats de futures mesures, il ne permet guère *d'expliquer* un fonctionnement. Les mathématiques fonctionnent un peu ici comme « prestataires de services » car la modélisation ressemble beaucoup plus à ce que l'on peut s'imaginer quand on parle de modélisation informatique, ou lorsque l'on évoque le « modèle du tas de sable » : le modèle construit n'a besoin que de constituer une sorte de boîte noire dont on attend seulement des résultats à la sortie ; il ne constitue en rien un modèle éclairant sur *les lois* du phénomène.

Pour le dire sur un exemple précis, il suffit de penser au problème classique de la chaînette : si on considère un fil souple et pesant que l'on suspend par les deux extrémités, il va prendre une allure que l'on peut évidemment « modéliser » d'une foule de façons. Assez généralement, l'utilisateur ne verra guère d'objections à regarder la forme obtenue comme une parabole ou comme un morceau de sinusoïde, car seule lui importe, en définitive, la précision des approximations finales. Or *culturellement parlant*, la véritable activité de modélisation ne consiste pas, en l'occurrence, à déterminer quelle courbe d'une famille choisie pour des raisons arbitraires va s'appliquer au mieux aux observations, elle consiste au contraire à chercher quelle est la « vraie courbe » réalisée par le fil, c'est-à-dire quelle est l'équation qui traduit physiquement le problème et en fait apparaître les lois…

On est loin alors des exemples dérisoires retenus habituellement, et ceci pour une raison très simple : la presque totalité des problèmes « modélisables » au sens précédent *dépasse le niveau des élèves de lycées* et, pour être tout à fait franc, on ne peut pas dire que les professeurs eux-mêmes soient particulièrement à l'aise avec eux dans la mesure où la plupart ont été négligés, voire carrément censurés, dans la culture universitaire des futurs enseignants !

**c) le paradoxe de l'occultation des obstacles**

On l'oublie souvent en effet : les problèmes un tant soit peu consistants où l'on peut parler d'une modélisation éclairante présentent toujours des difficultés indéniables. Nous sommes ici au niveau que j'ai désigné plus haut comme « l'interface » entre mathématiques et physique et j'ai déjà souligné les profondes difficultés épistémologiques que l'on ne peut manquer d'y rencontrer. Il est facile d'observer la pratique la plus courante de la part des professeurs de mathématiques et de physique dans ce genre de circonstances. Dès qu'un problème supposant par exemple une mise en équation se présente, les uns et les autres ont tendance à se renvoyer la balle. Le professeur de maths dira : « si on part de l'équation différentielle (E) établie par les physiciens, alors les mathématiques permettent de démontrer que… » ; le professeur de physique affirmera de son côté : « on peut montrer mathématiquement que le phénomène obéit à l'équation (E), et que les solutions sont de la forme… ».

Mais il est clair que nous sommes ici à un endroit particulièrement délicat, du moins pour l'enseignant de mathématiques qui nous intéresse ici, car il n'est jamais facile de traiter « correctement » les questions qui se posent. Ce sont des questions « infinitésimales » et l'on sait que ces « passages à la limite » sont non seulement difficiles à manipuler pour l'élève, mais qu'ils le sont encore plus à expliquer pour le maître… C'est évidemment ainsi que la plupart des difficultés de la mécanique et de la cinématique ont disparu peu à peu de l'enseignement et on reste parfois pantois devant la façon de traiter le peu de courbes paramétriques qui restent au programme et devant la manière dont les manuels essaient tant bien que mal de se sortir de notions aussi fondamentales que celles de *vitesse instantanée* ou de *vecteur tangent* : bien sûr, il est facile de *définir* ces notions en plaquant les mots concernés sur les formules adéquates ! Mais suffit-il vraiment de faire comme si l'on introduisait un nouvel *axiome* pour que l'élève ait l'impression d'avoir appris quelque chose qui se rapporte un tant soit peu à des intuitions géométriques et à des problématiques concrètes comme celles de vitesse et de tangente ?…

Je m'arrêterai simplement ici sur deux exemples qui me permettront d'enchaîner avec l'idéologie des programmes les plus récents en la matière. Le premier, que je ne cite que pour mémoire, concerne les probabilités et statistiques qui sont, comme chacun sait, un des domaines où le credo de la modélisation semble désormais s'être imposé. Au point de laisser croire qu'une nouvelle race de professeur est en train de naître – l'*homo statisticus* – et d'avoir donné lieu à de nombreuses productions d'exemples aussi concrets et passionnants que celui du problème de franc-carreau revisité ou celui du spaghetti cassé aléatoirement en trois de manière à obtenir les côtés d'un triangle… C'est clairement l'occasion pour certains de « rouler des mécaniques » tout en masquant les vraies questions difficiles soulevées par les choix de « modèles », mais au fond la mise en œuvre des statistiques dans les classes n'est pas forcément si dramatique : la technologie fondamentale de tous ces problèmes n'est jamais que celle des pourcentages et, comme pourrait sans doute le dire Henri Lebesgue : on ne sait pas si, pour les élèves, ce sont les statistiques qui éclairent les pourcentages ou les pourcentages qui éclairent les statistiques…

Le second exemple est plus profond et tient de plus près aux considérations précédentes, car il touche à deux études détaillées dans les « documents d'accompagnement » pour la terminale S, et sont pourtant de « vrais » cas de modélisation, dans la mesure où l'on se propose de déterminer sérieusement une équation traduisant une problématique physique. Il s'agit de ce que lesdits documents désignent sous le nom de « problème de robinet revisité » et de « l'exemple d'une pile de pont ». Le premier s'intéresse à la forme d'une colonne d'écoulement d'eau en chute libre, le second à celle d'une colonne solide et pesante dont la section doit subir une pression constante. Les deux solutions commentées sont – involontairement – extrêmement révélatrices de la façon dont ont tendance à réagir les professeurs de mathématiques sur ce genre de problème : dans chacun des deux cas on a *oublié de mettre le doigt* sur le vrai passage délicat et on a même *omis dans les programmes* de développer un tant soit peu les idées fondamentales nécessaires à la moindre compréhension de ce genre de question !

Comment donc espère-t-on qu'un élève puisse comprendre où est l'intérêt des problèmes et de leur solution ? Il est clair que, dans chacun des deux cas, le point clef est de *trouver la relation* qui permet de traduire le rétrécissement de la section. Il est tout aussi clair que la vraie difficulté de cette relation tient dans son caractère différentiel et que, sauf à faire semblant de croire que les élèves sont nettement plus forts que le professeur, bien peu sauront jongler suffisamment avec les dérivées et les primitives pour comprendre que dans le cas de la pile de pont, il suffit de parachuter au moment voulu la formule $\mathrm{V}(z) = \int_0^z \mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t$… Alors que la théorie des volumes – même de révolution – n'est nulle part ni expliquée, ni effleurée dans le reste du cours !

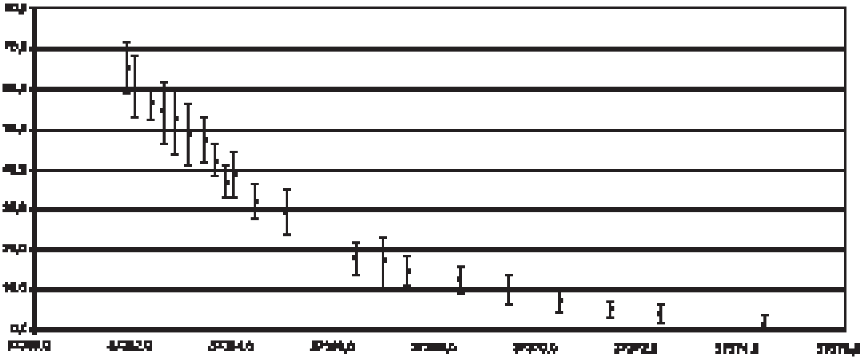
De façon analogue, dans le problème de l'écoulement, les rédacteurs ne craignent pas de faire appel de la manière la plus anodine qui soit à l'expression du *débit* D d'un écoulement de section $\sigma$ pour lequel la *vitesse du liquide* est $v$, sous la forme : $\mathrm{D} = \sigma v$… À quel moment aura-t-on cherché à concevoir la progression pour que l'élève soit en mesure, je ne dis même pas d'*imaginer* cette formule, mais tout simplement de la *comprendre* ? À quel moment aura-t-on indiqué aux professeurs des cheminements possibles pour parvenir, je ne dis même pas à *faire comprendre*, mais tout simplement à *présenter clairement* ce petit miracle qui vient résoudre le problème ?

On croirait rêver si on n'avait pas déjà senti, au regard des trois paradoxes précédents, que le but des programmes n'est pas de s'interroger sur les moyens d'apprendre efficacement des mathématiques, mais simplement sur le moyen de « faire semblant » et de donner l'impression que celles-ci ont des applications dans un grand nombre de problèmes de la vie courante. La vérité est malheureusement que l'on n'est jamais revenu en arrière depuis la période des maths modernes et que l'on n'est nullement en train de chercher avec humilité *comment s'apprennent* les mathématiques. On s'est simplement laissé entraîner par une nouvelle utopie, plus à la mode aujourd'hui et qui tient notamment à une évolution sociologique dans la communauté des mathématiciens : celle des « mathématiques appliquées ». Elle consiste à ne rater aucune occasion de signaler que l'on *applique* les mathématiques, alors que les maths modernes se raccrochaient désespérément aux mots d'ordre des *maths pour les maths*… Mais tout repose plus que jamais sur le même consensus implicite : les mathématiques s'apprennent en elles-mêmes et pour elles-mêmes, et puisqu'il suffisait naguère de demander à l'élève de les apprendre, il suffira désormais de lui demander – en plus – de savoir les appliquer !

Il semblait pourtant s'être produit ces deux dernières années un phénomène que l'on serait en droit de considérer comme historique : pour la première fois depuis la fameuse réforme qui s'était faite contre l'avis des physiciens, les groupes de réflexion chargés des programmes de physique et de mathématiques se sont de nouveau concertés et sont même parvenus à faire figurer des éléments communs dans les commentaires officiels… A-t-on revisité les problématiques fondamentales touchant les liens entre mathématiques et physique au sens où j'ai tenté de le mettre en place tout à l'heure ? A-t-on cherché les moyens les plus efficaces de faire avancer les progressions propres à chacune des deux disciplines de façon à faciliter la vie des élèves ? A-t-on enfin trouvé des idées nouvelles – qui sait… – permettant de faire comprendre plus efficacement telle ou telle partie du programme ?

Les deux comités eux-mêmes semblent considérer comme particulièrement emblématique de leur coopération l'introduction de considérations communes à propos d'un domaine phare de la physique, celui de *la radioactivité*, et d'un des points fondamentaux de l'analyse, celui de l'introduction de *la fonction exponentielle*. Oh ! il faut bien reconnaître que l'on n'aurait pas forcément oser rêver pareille affiche ! Discussion de phénomènes microscopiques aléatoires, mesures macroscopiques au photomultiplicateur, réflexions sur les approximations et les interpolations, suggestions de modèles mathématiques, passage à la limite après lissage des irrégularités, introduction d'une fonction à partir d'une équation différentielle, … et je passe évidemment les considérations sanitaires sur le cancer du poumon ou les applications mirifiques sur l'âge de l'univers…

Plus prosaïquement, une fois dégagé des complications adventices, le problème de l'exponentielle se réduit à ceci :
1) le cours de physique est censé montrer expérimentalement (en admettant d'ailleurs que cette expérience-là soit réalisable en classe…) que certain isotope du radon se désintègre sous la forme suivante :



2) le cours de mathématiques est censé expliquer que l'équation $f' = a.f$ permet, sans la connaître, de déterminer les propriétés essentielles d'une fonction que l'on appellera *exponentielle*…

Comment peut-on croire à ce point que l'on peut, avec des élèves en formation générale, introduire pêle-mêle une notion nouvelle imbriquée dans une autre, nouvelle aussi et plus difficile, le tout noyé dans un contexte pédant ? Je laisserai évidemment chacun se forger ses propres réponses à ce genre de questions. Je dirai simplement qu'il n'est pas interdit de penser que si Henri Lebesgue avait été le témoin de telles aberrations, il se serait sans doute contenté d'un immense éclat de rire, et il n'aurait pas eu à se demander, en tout cas, si c'était l'exponentielle qui venait éclairer la radioactivité ou si c'était la radioactivité qui venait éclairer l'exponentielle…

Une analyse superficielle aurait pu laisser penser qu'en matière de réformes des programmes, on assiste périodiquement à des « retours de balanciers » et que, quelque quarante années plus tard, on aurait tenté de revenir sur les erreurs de la réforme de 1970. Il n'en est rien. Ce n'est pas de mouvement pendulaire qu'il s'agit en l'occurrence mais de mouvement *spiralaire* et l'on ne peut que désespérément constater que la spirale dans laquelle est entraîné l'enseignement des mathématiques tient de la spirale exponentielle qui fascinait tant Bernoulli. Par sa manière de s'écarter éternellement du même angle par rapport au rayon central, *eadem mutata resurgo*, la réforme est toujours semblable à elle-même. Encore que la réforme des maths modernes avait au moins pour sa défense de s'appuyer sur des considérations didactiques qui, bien que démenties par la suite, montraient au moins que l'on s'était intéressé à la réalité des élèves et de l'apprentissage.

Le problème n'est évidemment pas simple et je pense avoir essayé de montrer, d'abord, que les rapports entre la pensée mathématique et la pensée de la physique sont loin d'être évidents à analyser, même s'ils sont indéniables et indispensables au progrès scientifique. Les mathématiques ne sont sans doute, en dernière analyse, que des *fictions*… Mais ce sont des *fictions qui réussissent*… et il reste aux philosophes à cerner la nature et les limites de ces fictions… tout autant peut-être que la nature et les limites de leur réussite… Mais les rapports entre ces deux moments de la pensée au niveau de l'apprentissage semblent, il faut bien l'avouer, encore bien plus difficiles à comprendre et à maîtriser comme ils mériteraient de l'être. Nul ne peut plus prétendre avoir de réponses aux grandes et vraies questions, comme celles que l'on croyait avoir résolues dans les années soixante et qui tournent toutes autour de la même interrogation lancinante : dans quelle mesure peut-on (et doit-on) séparer l'apprentissage des outils mathématiques des situations qui ont permis de les forger et aussi de celles auxquelles il est devenu possible de les appliquer ?

Sur ces questions les programmes actuels, comme d'ailleurs ceux qui les ont précédés, nous renvoient l'image d'un échec toujours renouvelé. Mais que l'on ne s'y trompe pas, cet échec n'est pas seulement celui des diverses commissions qui s'y collent, il est peut-être avant tout *celui des Irem*… Car malgré toutes nos réflexions, malgré tous les travaux entrepris, et peut-être encore plus particulièrement ici, en matière de recherche sur *l'épistémologie des mathématiques* et sur les rapports entre *mathématiques et sciences physiques*, nous n'avons pas su apporter les réponses qui auraient pu créer les conditions, ne disons pas de la réussite des réformes futures – ne rêvons pas… – mais des conditions interdisant au minimum cette dérive inéluctable des programmes…