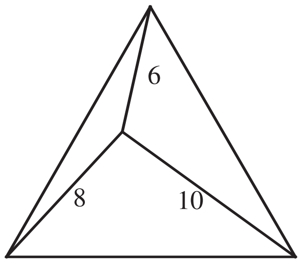
La forêt triangulaire(*)

I. Le problème

Mathias est perdu au cœur d'une forêt en forme de triangle équilatéral. Il ne connaît pas les dimensions de cette forêt, mais grâce à un matériel sophistiqué et à de savants calculs, il peut établir qu'il se trouve à 6 km d'un sommet de la forêt, à 8 km d'un autre et à 10 km du troisième.
Quelle est l'aire de la forêt ?

On prendra si besoin est 1,7321 pour $\sqrt{3}$ et on arrondira à 0,01 km^2.



II. Des solutions

En ses numéros 210 et 212, MATH-ÉCOLE a déjà proposé sept solutions … et ce n'est pas fini.
Certaines sont surtout calculatoires. Nous proposons ci-après des solutions d'un autre type, les quatre premières provenant de MATH-ÉCOLE, remerciée ici pour l'autorisation de reproduction.

II.1. Solution de Michel Criton

Décomposition de deux triangles équilatéraux de côté c en trois quadrilatères qui, à leur tour, forment 3 triangles rectangles « 6, 8, 10 » et trois triangles équilatéraux, de côtés 6, 8 et 10.

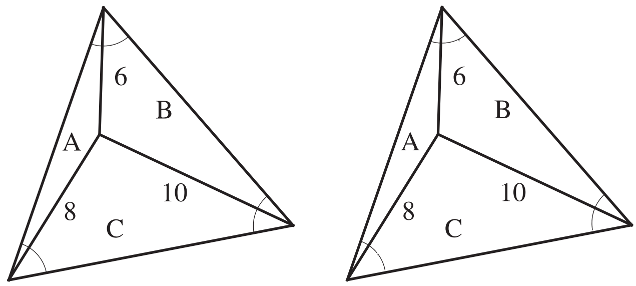
On prend deux exemplaires du triangle équilatéral et on partage chacun d'eux en trois triangles de côtés respectifs $\{6 ; 8 ; c\}$, $\{8 ; 10 ; c\}$ et $\{6 ; 10 ; c\}$ où c est la longueur d'un côté des triangles équilatéraux.

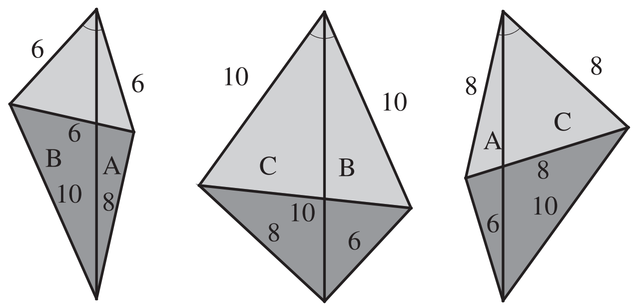
À l'aide des six petits triangles, on réalise les trois quadrilatères de la figure de la page suivante en les assemblant deux à deux par leur côté de longueur c.

On montre facilement que ces trois quadrilatères possèdent un angle de 60 degrés et que chacun est donc constitué d'un triangle équilatéral accolé à un triangle rectangle de côtés 6, 8 et 10. La somme des aires des trois quadrilatères est égale au triple de l'aire du triangle rectangle 6-8-10 augmenté des aires de trois triangles équilatéraux de côtés respectifs 6, 8 et 10.

En prenant la moitié de cette somme, on obtient l'aire d'un triangle équilatéral de côté c, d'où l'on déduit ensuite la valeur de ce côté.

(*) Texte issu de la revue suisse MATH-ÉCOLE, n^{os} 210 et 212.





II.2. Solution de Christian Bazzoni

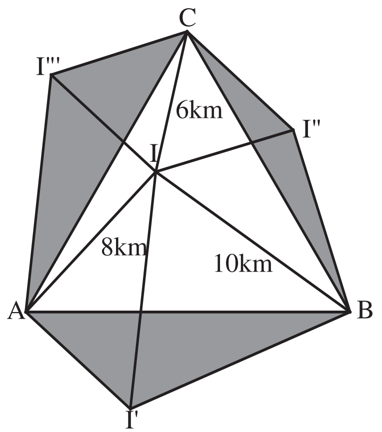
Christian Bazzoni sans découpage, en trois rotations, construit un hexagone dont l'aire est deux fois celle du triangle de départ, ce qui revient à une autre disposition des six pièces de la solution précédente.

Je partage, dit-il, le triangle équilatéral ABC en trois triangles auxquels je fais subir une rotation de 60° ainsi :

$$\mathrm{BIC} \xrightarrow[\mathrm{R(B;60°)}]{} \mathrm{AI'B}\,,$$

$$\mathrm{ABI} \xrightarrow[\mathrm{R(A;60°)}]{} \mathrm{AI'''C}\,,$$

$$\mathrm{AIC} \xrightarrow[\mathrm{R(C;60°)}]{} \mathrm{CBI''}\,.$$

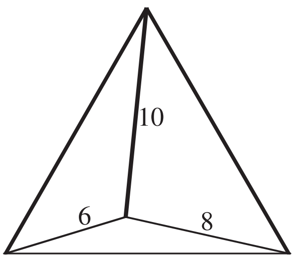


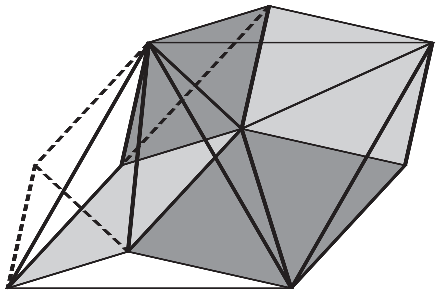
On fabrique ainsi trois quadrilatères BICI″, AI‴CI et BI′AI dont la somme des aires vaut le double de celui du triangle équilatéral. Chacun de ces quadrilatères est composé d'un triangle rectangle dont les cotés des angles droits valent 6 km et 8 km et d'un triangle équilatéral de respectivement 6 km, 10 km et 8 km de côtés.

Aire du triangle équilatéral : $\dfrac{3\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\right)+\frac{\sqrt{3}\cdot 6^2}{4}+\frac{\sqrt{3}\cdot 8^2}{4}+\frac{\sqrt{3}\cdot 10^2}{4}}{2}$.

Donc l'aire de la forêt est de : $30 + 25\sqrt{3} = 79{,}30$ km² !

II.3. Solution de D. Froidcœur





Voici la figure de base de D. Froidcœur et la figure finale, où l'on constate que l'aire de deux grands triangles (A) se décompose en deux triangles équilatéraux de coté 6 (T_6), deux triangles équilatéraux de côté 8 (T_8) et trois triangles rectangles de côtés 6, 8 et 10 (T_{10}). D'où :

$$A = T_6 + T_8 + \frac{3}{2}T_{10} = (9+16)\sqrt{3} + \frac{3}{2}24 = 25\sqrt{3} + 36.$$

II.4. Solution de F. Jaquet qui généralise

La Figure 1 montre, à gauche, le triangle équilatéral de côté d, d'aire $E(d)$, et sa répartition en trois triangles d'aires A, B, C, ayant un sommet commun P. Une rotation de 60 degrés et de centre O déplace le triangle (OPQ) en OP′Q′ (au centre). Le triangle OPP′ est équilatéral, de côté a car il a deux côtés isométriques et l'angle compris de 60 degrés, désigné par $E(a)$ sur la figure de droite. Le triangle PP′Q′ a pour côtés a, b, c, il est désigné par $T(abc)$ sur la figure de droite.

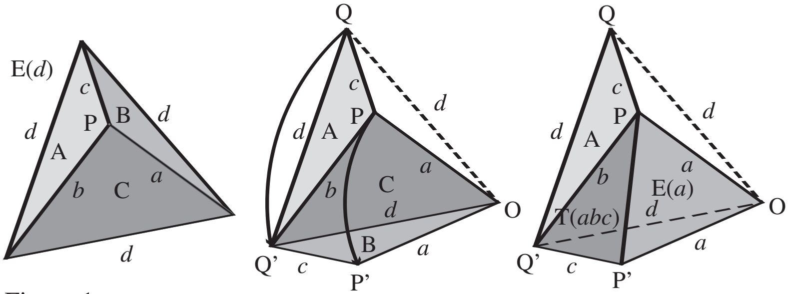


Figure 1

On a donc l'équivalence des aires :

$$\mathrm{E}(d) = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{E}\,(a) + \mathrm{T}(abc).$$

De même, par une rotation de la partie A (Figure 2, à gauche) et de la partie C {Figure 2. au centre) on obtient des décompositions du triangle initial en trois parties, respectivement C, T(abc), E(c) et B, T(abc), E(b). Le bilan des trois transformations donne la relation :

$$3\mathrm{E}(d) = (\mathrm{A} + \mathrm{E}\,(a) + \mathrm{T}(abc)) + (\mathrm{B} + \mathrm{E}\,(b) + \mathrm{T}(abc)) + (\mathrm{C} + \mathrm{E}\,(c) + \mathrm{T}(abc)),$$

$$3\mathrm{E}(d) = (\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}) + 3\mathrm{T}(abc) + \mathrm{E}\,(a) + \mathrm{E}\,(b) + \mathrm{E}\,(c),$$

$$2\mathrm{E}(d) = 3\mathrm{T}(abc) + \mathrm{E}\,(a) + \mathrm{E}\,(b) + \mathrm{E}\,(c).$$

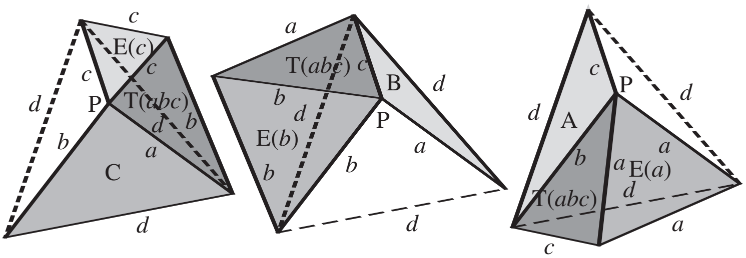


Figure 2

On retombe ici, sur la relation de la solution de M. Criton, mais pour le cas général. Si l'on passe aux mesures des côtés, il faut faire intervenir la formule de Héron (moins courante, mais qu'on trouve dans les formulaires) qui exprime l'aire d'un triangle en fonction de ses trois côtés (plus concise en faisant intervenir le demi-périmètre p) :

$$2d^2\frac{\sqrt{3}}{4} - a^2\frac{\sqrt{3}}{4} - b^2\frac{\sqrt{3}}{4} - c^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\left(2d^2 - a^2 - b^2 - c^2\right)^2 = 48p(p-a)(p-b)(p-c).$$

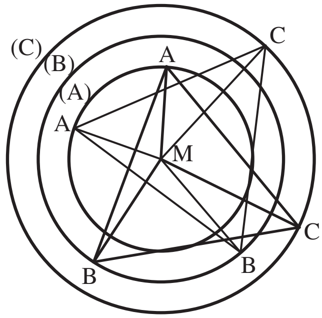
Selon la formule classique, le lecteur vérifiera aisément que, en substituant $\dfrac{a+b+c}{2}$ à p et en simplifiant l'équation, on obtient rapidement la formule :

$$3\left(a^4 + b^4 + c^4 + d^4\right) = \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^2.$$

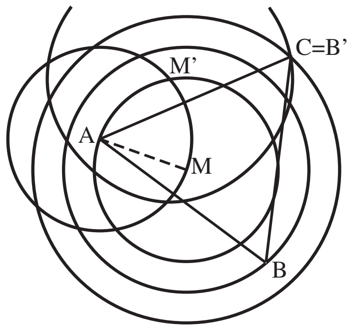
II.5. Solution de Jean-Pierre Friedelmeyer (solution analogue de Bruno Alaplantive)

Analyse du problème

1. L'énoncé ne donne aucune indication sur l'orientation de la forêt. On peut donc placer le triangle (ABC) dans le sens que l'on veut. Cela revient à dire que le triangle peut se déplacer autour du point M de telle façon que A décrive un cercle (A), B un cercle (B), C un cercle (C), les trois cercles centrés sur M et de rayons respectifs 6 ; 8 ; 10.

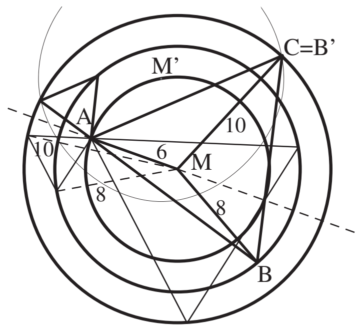


2. Fixons le point A sur le cercle (A). Alors le point C est l'image de B dans une rotation de centre A et d'angle 60°. Il est donc à l'intersection du cercle (C) et du cercle (B′) image du cercle (B) dans cette rotation… Nous avons donc une construction du point C et donc d'un triangle (ABC).



. Conclusion sur les triangles (ABC) possibles.

À une rotation près autour de M, il y a deux paires de triangles (ABC) symétriques par rapport à la droite (AM). Pour chacune des deux paires il y a un triangle avec le point M à l'intérieur et un triangle avec le point M à l'extérieur.

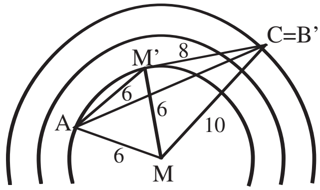


4. Aire du triangle

Reste à déterminer la longueur du côté du triangle et son aire. L'angle MM′C est droit à cause des côtés 6, 8, 10, donc par Al Kashi :

$$AC^2 = 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times \cos(150°)$$

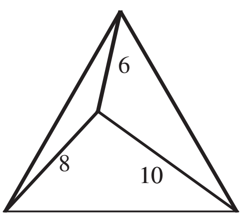
et donc l'aire du triangle ABC est $36 + 25\sqrt{3}$ en km² soit environ 79,30 km².

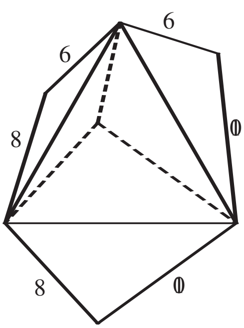


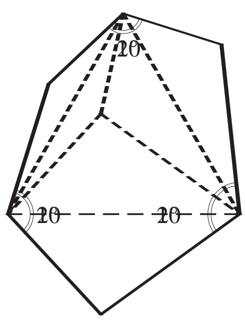
Remarque. Cette solution montre l'importance de l'information « **au cœur d'une forêt** ». On pourrait imaginer l'histoire plus réaliste d'un Mathias perdu, dont les seuls repères seraient trois points A, B, C disposés selon un triangle équilatéral. Alors, selon la situation – à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle – la réponse ne serait pas la même (l'aire du triangle dans le cas extérieur est $25\sqrt{3} - 30$ soit environ 7,30).

II.6. Autre solution de Bruno Alaplantive

Voilà, dit-il, ce que j'ai trouvé d'autre que les cercles concentriques auxquels j'avais d'abord pensé.
Dans ma démarche, j'ai imaginé voir un tétraèdre non régulier et, en prenant pour base un triangle équilatéral de côté au moins supérieur à 4 et au plus inférieur à 14 et des faces latérales d'arêtes 6 et 8, 6 et 10, 8 et 10, je pensais pouvoir calculer la hauteur du tétraèdre obtenu et faire tendre ensuite cette hauteur vers O...
Trop compliqué pour les circonvolutions de mon petit cerveau !
Mais comme j'ai quand même pris le temps de faire différents patrons sur Cabri (et de les découper pour VOIR) j'ai remarqué le triangle et l'ai reconnu pour être le 3,4, 5 à la taille près et comme en plus les rapports des longueurs obtenues à 6, 8 et 10 donnaient 1.74, 1.73 et 1.73, j'y ai reconnu racine de 3..., etc.
Attaqué comme ceci, c'est très riche !



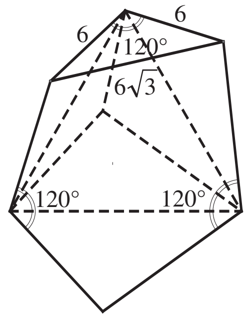


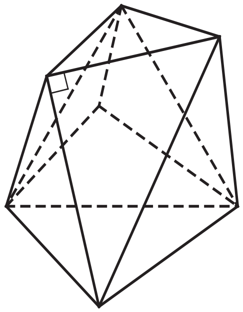


On ouvre « l'enveloppe » par les côtés 6, 8 et 10 et on déplie selon le contour équilatéral.
La demi-base vaut $6 \times \sin 60°$,

soit $6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$,

et la base vaut bien $6\sqrt{3}$.





De même les autres côtés valent-ils 8 $\sqrt{3}$ et 10 $\sqrt{3}$, ce qui assure que le triangle est rectangle : agrandissement du triangle 6, 8, 10 lui-même double du fameux 3, 4, 5.

Remarque : la construction du triangle 6 $\sqrt{3}$, 8 $\sqrt{3}$, 10 $\sqrt{3}$ assure celle du triangle équilatéral.

CALCULS

1. Al Kashi permet d'écrire :

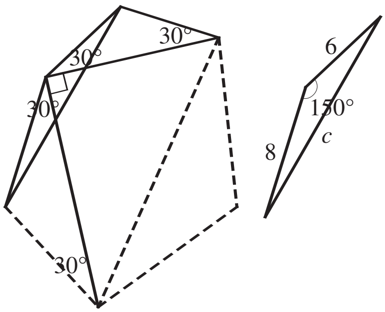
$$c^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \cos 150°,$$

c'est-à-dire

$$c^2 = 100 + 2 \times 48 \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

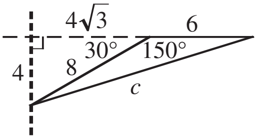
soit

$$c^2 = 100 + 48 \times \sqrt{3}.$$



L'aire d'un triangle équilatéral étant donnée par la formule $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$, on obtient finalement ici :

$$\text{Aire} = 36 + 25\sqrt{3} \text{ (en unité d'aire)}$$



2. **Mais pas besoin d'Al Kashi** (on reste au niveau collège) : un peu d'imagination et Pythagore fait le reste … :

$$\begin{aligned} c^2 &= \left(4\sqrt{3}+6\right)^2 + 4^2 \\ &= 48 + 36 + 48\sqrt{3} + 16 \\ &= 100 + 48\sqrt{3}. \end{aligned}$$

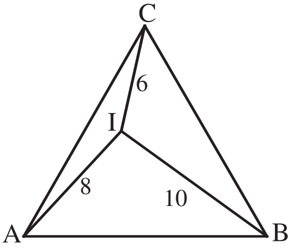
II.7. Solution de Henri Bareil

qui prend le problème autrement et avec une désinvolture finale**…**

On suppose que, ayant un « matériel sophistiqué », et prêt à de « savants calculs », notre égaré (physiquement seulement) dispose aussi d'une règle graduée, d'un compas, qu'il sait diviser un segment dans un rapport donné, et que, A et B étant donnés, le lieu des points M (d'un plan qui les contient) tels que MA/MB = k ($k \neq 1$ donné) est le cercle de diamètre [UV] (U et V divisant [AB] dans le rapport k). Dès lors :

a) Principe d'une solution :

– *Dessinons un triangle équilatéral* A′B′C′ *de côté arbitraire* (appelons *l* sa longueur). Ce triangle est semblable au triangle-forêt ABC.



– Plaçons-y l'homologue I′ du point I :
I′C′/I′B′ = 6/10 (= 3/5). Donc I′ est sur le cercle Γ_1 …
I′B′/I′A′ = 10/8 (= 5/4). Donc I′ est sur le cercle Γ_2 …
Ces deux cercles ont un point commun, et un seul, à l'intérieur du triangle A′B′C′. Ce point est I′ (et l'on a bien I′C′/I′A′ = 6/8).

– *Il suffit, dès lors, de mesurer, par exemple,* I′B′. Le rapport I′B′/IB est aussi A′B′/AB. D'où le côté du triangle-forêt, etc.

b) Mais comment mesurer I′B′ ?

Méthode 1 – calculatoire – :

Prendre un repère orthonormé. Déterminer les équations de Γ_1 et Γ_2. D'où les coordonnées de I′, etc.

Méthode 2 – « Mesurages » – :

Eh oui ! La précision attendue d'un calcul n'est-elle pas illusoire s'agissant d'une forêt (bords « flous », etc.). Et que penser de la précision de ces 10 km, 8 km, 6 km ?
Alors, si mon dessin est assez grand et « bien fait », je mesure I′B′ à la règle graduée … et le tour est joué !

La morale de l'histoire :

Voilà un joli problème … habillé en forêt. C'est parfois dangereux. Cf. la forêt qui marche sur le château de Macbeth ! Ici, c'est dangereux pour la précision mathématique, récusable ! Pourquoi ne pas en profiter ? … en s'appuyant sur un principe de résolution peu usité, mais efficace…

III. Les autres solutions de « Math-École »

Lisez « Math-École » : elles ont aussi pas mal d'intérêt…
La revue « Math-École », animée par notre ami François JAQUET, concerne essentiellement École et Collège, mais, avec diverses solutions ici, plusieurs textes souvent, mord aussi sur les Lycées. 4 numéros par an, excellents !
Abonnements :

CHF 45, Revue « Math-École », Institut de mathématiques,
11 rue Émile Argand, CH-2007 NEUCHÂTEL.
Site : www.math-ecole.ch