Une curiosité mathématique : Le nombre 37(*)

1. Considérons la suite S des multiples de 3 : 3, 6, 9, … Donnez très vite, **en calcul mental**, le produit de 37 par l'un des termes α, arbitrairement choisi, de la suite S.

2. Vous ne savez pas ? Essayez à la calculette… Que constatez-vous ? Sans doute de belles interventions de $\alpha/3$?

3. Voici quelques explications, **si $\boldsymbol{n = \alpha/3}$** est un entier naturel :
La clé : $37 \times \alpha = 37 \times 3 \times n = 111 \times n$. *Dès lors* :

– **si $\boldsymbol{1 \leq n \leq 9}$**, $37 \times \alpha = 111 \times n = \overline{nnn}$ (**).
Ainsi $37 \times 24 = 888$.
– **si $\boldsymbol{10 \leq n \leq 19}$**, en écrivant n sous la forme $10 + a$,

$$37 \times \alpha = 111 \times (10 + a) = 1\ 110 + \overline{aaa}.$$

Avec une addition sans retenue, ce qui exclut $n = 19$ (soit $\alpha = 57$), nous obtenons :

$$37 \times \alpha = \overline{1(a+1)(a+1)a}.$$

Ainsi $37 \times 45 = 1\ 665$.
– **si $\boldsymbol{20 \leq n \leq 29}$**, en écrivant n sous la forme $20 + a$,

$$37 \times \alpha = 111 \times (20 + a) = 2\ 220 + \overline{aaa}.$$

Avec une addition sans retenue, ce qui exclut $n = 28$ et $n = 29$ (soit $\alpha = 84$ et $\alpha = 87$), nous obtenons : $37 \times \alpha = \overline{2(a+2)(a+2)a}$.
Ainsi $37 \times 78 = 2\ 886$.
– etc. (il faudra, pour nos belles régularités dans les produits, exclure les multiples par 3 de 39, 38, 37), puis de 49, 48, 47, 46, puis …).

(suite p. 792)

(*) D'après « Curiosités et récréations mathématiques » par Gaston Bouchery (Éd. Larousse), et son texte relatif à 37 signalé par René Gastou, Résidence des 7 Deniers, Toulouse

(**) $\overline{cdu}$ signifie $u + 10d + 100\,c$, $\overline{c(b+1)u}$ signifie $u + 10(b + 1) + 100\,c$.

(suite de la page 758)

4. **Extensions**. Par exemple, comme 111 111 : 3 = 37 037, vous pouvez multiplier *souvent* aisément mentalement 37 037 par α, …

Mais

- 111 111 est aussi divisible par 7 : 111 111 = 15 873 × 7 : il serait donc facile de multiplier 15 873 par des multiples de 7 … pourvu qu'il ne survienne pas de retenue.
- 111 111 est aussi divisible par 11 : 111 111 = 10 101 × 11. Mais, ici, la multiplication mentale directe est aisée.
- 111 111 est aussi divisible par 13 : 111 111 = 8 547 × 13 : il est donc aisé de multiplier 8 547 par des multiples de 13 … pourvu que ….
- etc. s'il y a d'autres diviseurs (en réalité : un, 37).

On trouvera dans l'ouvrage cité une généralisation utilisant **certaines** fractions du type $\frac{1}{9 \times n}$ et leur écriture décimale périodique illimitée. Elle permet de découvrir des paires de nombres dont le produit ne s'écrit qu'avec des 1.

Henri BAREIL