7 fois 8 ? $(a + b)^2$? La mémorisation des réponses relève-t-elle de la responsabilité des professeurs ?

Florence Genestoux

Dans l'atelier, nous avons considéré l'apprentissage des tables de multiplication comme un paradigme pour réfléchir aux moyens de faciliter la transmission des théorèmes les plus fondamentaux (ceux qui sont destinés à être utilisés comme des outils, durablement et de manière fiable par les élèves). Nous avons prolongé cette réflexion sur un autre répertoire de formules, celui des identités remarquables.

Partie 1 : les répertoires de savoirs

À partir d'un document rassemblant plusieurs présentations de tables, nous avons distingué :

- La taille des répertoires (de 72 à 158 formules dans le document). À l'époque des calculatrices, il paraît raisonnable de seulement retenir 36 produits comme élémentaires(1).
- L'ordre (de présentation ou d'introduction) des formules(2). Dans les années 20 et jusqu'aux programmes de 1945 était préconisé l'enseignement conjoint des tables de 2, 4 et 8 ; et celles de 3, 6 et 9 (celles de 5 et de 7 étant considérées à part). L'ordre propice à l'apprentissage est-il celui de la formalisation logique ?
- Quatre fonctions pour ces tables :

1) Une <u>désignation</u> : disposer d'une courte et simple étiquette pour désigner toute une collection de formules est une économie langagière appréciable. La formulation « table de » reste largement partagée, elle est demeurée stable de réformes en contre-réformes.

2) Un <u>abaque</u> : la table en tant qu'objet concret est un instrument qui facilite la tâche du calculateur. Elle possède une ergonomie propre (la familiarité de l'utilisateur joue aussi un rôle). Un « tableau à double entrée » présente l'avantage par rapport aux tables linéaires (présentation langagière ou symbolique) d'offrir trois entrées possibles (lignes, colonnes et cases). En classe le professeur lutte contre

(1) Ils figuraient il y a longtemps dans certains manuels et sont obtenus en réduisant la table de Pythagore par commutativité et en écartant les produits par 1, par 10 et par zéro. Condorcet l'explicite en 1799 dans *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité* (in Coutel et al., édité chez ACL aux Éditions du Kangourou, 1988, p. 145 et avoisinantes).

(2) Dans le document présenté, la table « en désordre » intrigue. Extraite d'un manuel de 1973, elle est la trace d'un type d'activités qui a fleuri dans les années 1970 : des tableaux à compléter.

l'intrusion non contrôlée[3] des outils de la vie pratique, parce que l'enseignement vise justement à affranchir les élèves d'une trop grande dépendance matérielle.

3) Le stockage de savoirs : une table peut représenter l'ensemble de ce qui sera maîtrisé une fois l'apprentissage terminé. En tant qu'objet de référence, une table de Pythagore tire profit d'une organisation rationnelle et exhaustive (selon l'ordre des naturels, incluant les conditions extrêmes, exhibant la clôture logique du système et ses propriétés).

4) Un support d'apprentissage : une table c'est aussi l'objet qui transite entre la classe et la maison. L'apprentissage des tables est en grande partie renvoyé à l'étude personnelle des élèves (à chacun son rythme pour les devoirs du soir). Le pluriel est d'ailleurs un indice linguistique de cette utilisation (la totalité ne pouvant être apprise en une seule fois, elle est découpée en une suite d'apprentissages successifs). Lorsque les accompagnateurs de l'étude (parents, fratrie, animateur de l'aide aux devoirs) posent des questions avec la table en mains, ils peuvent suivre l'ordre indiqué ou procéder à reculons (d'un coup d'œil l'exhaustivité est assurée), mais les plus experts choisiront de bousculer l'ordre de la mémorisation (trouver un ordre judicieux fait partie des compétences de l'accompagnateur).

Pour améliorer la transmission des savoirs mathématiques les plus fondamentaux, mais qui paraissent tellement banals que leur étude est dévaluée (parfois même rejetée en marge de notre discipline)[4], j'ai cherché des moyens de porter un regard plus professionnel sur les formules élémentaires. L'idée est de mieux faire converger les efforts engagés de part et d'autre, sur une longue durée, dans et hors des classes[5].

Mes suggestions :
– Contrôler la taille des répertoires et faire porter l'enjeu sur leur contenu et non pas sur l'organisation qui lie les formules (l'élève doit pouvoir utiliser chaque formule de manière indépendante et aléatoire[6]).
– Trier ce qui est à mémoriser sous un statut de formule et ce qui peut être rapidement retrouvé à l'aide des connaissances mathématiques.
– Expliciter les étayages (liens mathématiques) commodes entre formules[7] pour soulager le rappel mnésique et contribuer à la culture du calcul réfléchi et au recours à la vérification.

(3) Bien sûr rien n'empêche d'associer un abaque à un projet d'enseignement, en prévoyant des règles spécifiques et transitoires d'utilisation durant la séance.
(4) Au cours du XXe siècle le développement des études surveillées, dirigées, périscolaires et l'engouement pour la transversalité a incité à substituer un apprentissage (collectif et guidé en classe) des produits élémentaires par une mémorisation (individuelle et à la maison) de tables.
(5) Partager les responsabilités de l'apprentissage est un enjeu important par ses conséquences. Les « troubles sélectifs du rappel des faits arithmétiques » appartiennent à l'étiologie d'une nouvelle pathologie : la dyscalculie.
(6) Au cours de l'atelier, des erreurs « par proximité dans les tables » ont été présentées (réponses d'élèves en CE2).
(7) Il est toujours possible de construire une formule à partir d'autres, mais certains étayages sont plus ou moins ergonomiques pour la mémorisation. Par exemple, 6 fois 7 est facilement retrouvé à partir du double de 3 fois 7, tandis que 6 fois 9 l'est moins à partir du double de 3 fois 9 (ce qui n'exclut pas de faire fonctionner systématiquement dans un exercice le « 6 fois … comme double de 3 fois … »).

– Privilégier des découpages et des ordonnancements non figés, de manière à les adapter (à un premier apprentissage ou à un entraînement ou à l'entretien régulier et sélectif des formules les plus dures à acquérir[8]). Les regroupements de formules selon diverses propriétés (les carrés, les doubles et moitiés[9], les produits qui font 24, etc.) peuvent remplacer la partition en tables juxtaposées, les recouvrements contribuent à réorganiser les connaissances.
– Engendrer un ordre impromptu de questions à l'aide d'un paquet de cartes (une carte par formule, au verso une « question », au recto une « réponse ») : dispositif d'étude autocorrectif, transportable partout et qui sert « dans les deux sens » (« 3 fois 4 ? » et « 12, c'est ? »).
- Veiller à ce que les « jeux » d'entraînement (jeu de l'oie, …) ne diluent pas les sollicitations sur un trop grand nombre de formules.
– Différencier :
  – les répertoires de stockage de savoirs (formulaire, affiche dans la classe, …) ;
  – les répertoires qui servent d'abaques (avec mode d'emploi) ;
  – les répertoires donnés à voir comme une représentation (de ce qui va être étudié, de ce qui est déjà su, …) ;
  – les répertoires destinés à une mémorisation ;
  – les répertoires conçus comme des supports d'apprentissage (exercice, guide pour étudier seul ou pour l'accompagnateur de l'étude personnelle).

Les répertoires seront tantôt vastes (pour montrer la portée du futur apprentissage ou l'état avancé de la progression en cours) ou réduits (pour ménager le courage et les efforts à fournir) ; tantôt standards (destinés à informer un large public non averti) ou spécifiques (au service d'objectifs précis d'enseignement).

En application : la taille du répertoire des « identités remarquables ».
Classiquement elles sont au nombre de 3, mais on pourrait n'en retenir que 2 (en prenant appui sur les connaissances algébriques qui sont enseignées à ce même niveau).
L'organisation d'une leçon[10] peut suggérer aux élèves qu'ils ont 6 formules à mémoriser (3 pour développer, 3 pour factoriser). Un choix qui s'apparente à celui d'une table de division.

Partie 2 : les questions pour enseigner l'usage des formules

À partir d'un ancien exercice de calcul mental[11], nous avons analysé les 12 questions orales[12].

(8) Les efforts ne portent pas sur les mêmes formules au début du cycle 2 ou en quatrième, lorsque la motivation des élèves est extrêmement faible (alors que souvent seules 10 formules posent problème).
(9) Avec éventuellement quelques prolongements utiles : le double de 15, le double de 25, le triple de 25, …
(10) Par exemple, le manuel *Triangle* (Hatier) de Troisième.
(11) *Nouvelle Arithmétique cours moyen et supérieur.* C. Legrand (fin XIX^{e} - tout début XX^{e}), n° 269, p. 49.
(12) Il s'agissait de calculer le produit de deux entiers naturels par une méthode imposée qui établit d'abord l'ordre de grandeur sur les dizaines, puis compléter le résultat par un terme correctif (produit des unités).

12 multiplié par 4	15 multiplié par 5	18 multiplié par 8
24 multiplié par 7	64 multiplié par 6	56 multiplié par 9
72 multiplié par 5	85 multiplié par 4	96 multiplié par 6
98 multiplié par 7	55 multiplié par 8	87 multiplié par 5.

19 formules sont mobilisées (dont 16 du répertoire minimal, parmi lesquelles 5 sont très familières, 9 sont de difficulté moyenne et 5 sont plutôt difficiles à retenir).
Redondance : 5×8 (3 fois) ; 6×6 (2 fois) ; 7×5 (2 fois) ; 6×9 (2 fois).
Il semble qu'un même principe organisateur règle à la fois l'ordre d'entrée des formules et le déroulement du calcul, instaurant par là un certain profil de résolution dans l'exercice :

- un démarrage facilité ;
- une progression dans laquelle un seul élément nouveau est introduit à chaque pas ;
- un pic de difficulté au moment où le calculateur est bien échauffé ;
- une détente des exigences et maintien du rythme de croisière visé.

Ce profil, analysable *a priori*, ne garantit pas qu'il sera vécu comme tel par les élèves. Mais, ritualisé, il devient susceptible de fournir une représentation collective de l'entraînement. L'insertion d'un relief dans la difficulté met en scène l'effort comme un événement attendu et préparé. L'élève qui réussit toutes les questions sauf cette performance particulière, est un calculateur honorable. Ceux qui n'ont pu répondre qu'à quelques questions se sont confrontés à des difficultés identifiées ; ils bénéficient durant la phase finale d'une nouvelle chance de se rallier au peloton (une progression régulière ne le permet pas : elle exclut au fur et à mesure).

<u>Comparaison avec des exercices d'entraînement d'aujourd'hui :</u>
– dans le manuel *Cinq sur Cinq* en Sixième (Hachette), comptage des occurrences des formules multiplicatives à partir des pages de la rubrique « de tête ou à la calculette » :
2 occurrences pour 3×8 ; 8 pour 4×5 ; une seulement pour 6×7 et aucune pour 8×8.
– dans l'ouvrage de C. Lethielleux *Le calcul mental au cycle des apprentissages fondamentaux* (Armand Colin) : 19 occurrences pour 2×3 ; 5 occurrences pour 8×7.
– À partir d'un exercice sur les identités remarquables en Troisième[13] : analyse de 12 questions semblables[14] : l'organisation sous-jacente semble se référer à un ordonnancement logique qui déclinerait certaines variables alternativement sur chaque formule, en suivant une progression ascendante de difficultés. Dès les premières questions, les difficultés se combinent entre elles, chaque pas contient une nouveauté épistémologique importante, la redondance est réduite. C'est un profil fréquent pour la plupart des exercices d'entraînements actuels. Bon indicateur pour l'enseignant de l'éventail des variétés possibles, cet agencement est-il ergonomique du point de vue de l'apprentissage des élèves ? Offre-il des occasions de se constituer des routines (objectif d'un exercice d'entraînement) ?

(13) Manuel *Triangle* (Hatier), classe de Troisième, n° 6, p. 85.
(14) Il s'agissait de factoriser des expressions (si possible).

Ni la répétition, ni la variété ne favorisent en eux-mêmes l'apprentissage. La notion d'« assortiment »(15) permet une analyse didactique des suites de questions semblables.

Partie 3 : des modèles pour analyser l'organisation des devoirs du soir et l'accompagnement des apprentissages difficiles

Les modélisations qui suivent visent à faire apparaître les responsabilités didactiques(16) du professeur et de l'élève, pour les répartir plus finement et de manière évolutive :

Six responsabilités à faire glisser du professeur vers l'élève

Déterminer / reconnaître un contexte (identifier des conditions).
Adapter une décision à des conditions (choix d'une réponse dans un éventail de possibles).
Contrôler la validité d'une réponse par un raisonnement.
Algorithmiser une réponse à l'aide d'un savoir (synthétiser conditions, décision et contrôle).
Contrôler l'emploi d'un savoir par un raisonnement.
Maintenir disponible dans un répertoire la conversion savoir/connaissances.

Sept niveaux de familiarité avec une formule

1. niveau de l'**exécution** (le professeur porte toutes les responsabilités relatives à la formule).
2. niveau de la **construction** (établissement du résultat).
3. niveau de la **production** (la construction est automatisée).
4. niveau de la production **auto-contrôlée** (l'élève mobilise formule et connaissances).
5. niveau de l'**aptitude** (l'élève mobilise directement la formule).
6. niveau de l'**expertise** (l'élève mobilise directement la formule sous son propre contrôle).
7. niveau de la **maîtrise** (l'élève porte toutes les responsabilités relatives à la formule).

On attend des élèves qu'ils sachent utiliser chaque formule avec fiabilité et en comprenant ce qu'ils font (niveau 6). Mais il peut y avoir malentendu. L'élève peut croire qu'il s'agit pour lui de mémoriser des formules pour les citer (niveau 5). Selon les conditions d'évaluation, les performances d'un même élève diffèrent : si la restitution des formules est plongée dans un contexte complexe, une familiarité de niveau 5 ne suffit plus ; les parents peuvent penser que leur enfant a « oublié » ce

(15) Notion qui se situe au confluent de deux concepts de la Théorie des Situations Didactiques, ceux de Contrat et de Milieu (F. Esmenjaud-Genestoux (2000), *Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques,* thèse de troisième cycle, Univ. Bordeaux 1).
(16) C'est-à-dire à la fois spécifiques des mathématiques et relatives à l'intention d'apprendre ou d'enseigner.

qu'il savait la veille au soir, alors qu'il aurait su répondre dans une interrogation non problématique.

Pour que les élèves puissent convertir une formule en connaissances mathématiques, envisageons un processus qui leur offre des occasions de la construire et de la reconstruire (niveaux 2 et 3). Mais inévitablement arrive le temps du saut épistémologique qui consiste à remplacer une production devenue habituelle par l'emploi direct et opportun du savoir correspondant. Un tel projet doit être soutenu par un tiers, car un élève ne peut apprécier, seul et tout de suite, le profit qu'il retirera de l'application d'un théorème. Le niveau 4 désigne ce moment intermédiaire (qui dure parfois longtemps) durant lequel formule et étayage sont alternativement mobilisés (pas toujours comme le professeur le demande publiquement, en exigeant la formule puis un argument pour convaincre de la validité de ce qui est affirmé). La justification après coup (qui peut être le moyen effectif d'établir la réponse) deviendra par la suite une vérification privée.

En amont de l'enseignement des formules, le modèle prévoit le niveau 1 où un professeur les reconnaît dans la réponse des élèves, mais pas les élèves (ils effectuent une somme de termes égaux sans soupçonner une multiplication). En aval, l'objectif terminal est atteint lorsque l'élève active son répertoire de sa propre initiative, sans plus d'effort, au point qu'il en oublie même l'époque où il n'en disposait pas. Au niveau 7 du modèle, le professeur n'a plus à se préoccuper de ménager de conditions particulières. L'utilisation fréquente réactive d'elle-même l'entretien du répertoire. Mais auparavant, la rétention doit être volontairement provoquée (niveau 6). Un enseignant sait bien par expérience que même si un élève sait parfaitement ses tables un jour, il n'est pas sûr qu'il en soit de même quelques mois plus tard s'il ne s'en sert jamais. Il peut lui demander de se débrouiller pour réviser seul. Il peut aussi l'accompagner en fournissant régulièrement des occasions judicieuses de réactiver certaines formules et en maintenant l'intérêt de continuer à s'entraîner.

Ainsi une formule apparaît comme :

– la *solution d'un exercice* au niveau 2 ;
– une *connaissance locale* au niveau 3 ;
– un *savoir à étudier* au niveau 4 ;
– un *savoir exigible* au niveau 5 ;
– un *savoir utilisable* au niveau 6.

Nous retiendrons deux temps forts au cours desquels les questions se densifient et pour lesquelles l'analyse en terme d'assortiment peut éclairer certaines décisions locales :

– celui où le professeur vise le niveau 3, et fait dévolution d'un <u>apprentissage</u> qui donne du sens aux formules et leur attache des conditions de référence ;
– celui où le professeur vise le niveau 6 et fait dévolution d'un <u>entraînement</u> pour que les formules puissent servir d'outil même dans des conditions complexes.

Voici quelques uns des caractères que nous avons retenus pour :

<u>Les exercices pour entraîner le déjà appris :</u>
– Redondance moyenne (plusieurs rencontres avec la même formule dans le même exercice).
– Variété des questions pour lutter contre la lassitude d'une répétition pourtant indispensable.
– Insertion progressive de perturbations (identifiables par l'élève qui étudie hors de la classe, afin qu'il puisse doser individuellement et sélectivement ses efforts).
– Modulation de la difficulté par le biais d'une organisation séquentielle interne, en particulier aménagement d'un rythme qui favorise le développement de l'endurance.

<u>Les exercices pour apprendre le nouveau :</u>
– Forte redondance.
– Forte réduction de la taille du répertoire mobilisé (pas trop de nouveauté à la fois).
– Pas de standardisation précoce d'écriture ou de présentation ; sollicitation de la vigilance cognitive pour que l'élève ne soit pas dupé par une disposition spatiale de symboles(17) .
– Plongement du nouveau dans un déjà connu non problématique(18).

<u>Le soutien, la différenciation, l'évaluation :</u>
Pour réguler les différences personnelles d'appropriation et aider les élèves à apprendre (et non pas à répondre juste), un professeur peut prendre localement à sa charge plus longuement et plus finement chaque responsabilité didactique.
Les questions pour évaluer répondent encore à d'autres caractères (redondance au service de la fiabilité du mesurage et non plus à celui de l'apprentissage, formules choisies en fonction de leur caractère de représentativité car l'exhaustivité est rarement possible, etc.).

---

(17) Par contre, les écritures canoniques gagnent à être employées dans les exercices d'entraînement lorsque leur forme ne risque plus d'être perçue par les élèves comme constitutive de ce qui est à contrôler.
(18) C'est lorsque les cas deviennent litigieux qu'il est intéressant de disposer directement d'une formule pour dégager plus d'attention cognitive, mais au moment de l'apprendre l'environnement familier paraît plus adapté.