

## Les problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes », ... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice. La rubrique s'efforce de rendre compte de la pluralité des méthodes proposées par les lecteurs, des généralisations des problèmes... Entre la publication d'un énoncé et la publication de sa solution, un bulletin intermédiaire fournira des pistes pour faciliter l'étude du problème et rendre la rubrique davantage accessible.

Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Solutions et énoncés sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,  
9 quai de la Seine,  
75019 Paris.

### Indications sur des énoncés déjà publiés

**Énoncé 305** (*pavage par des sphinx ou des parallélogrammes*) :

- a) seuls sont pavables par des sphinx les triangles de côté multiple de 12.
- b) dans un hexagone de côté 3, on peut mettre au plus 12 parallélogrammes.

**Énoncé 306** (*une caractérisation des droites de Simson*) :

Quelle méthode recommander ? que les droites de Simson relatives à ABC sont les asymptotes des hyperboles équilatères passant par A, B et C ?

### Nouveaux énoncés

**Énoncé n° 307 (François DUC, 84-Orange)**

On veut pouvoir peser avec une balance Roberval n'importe quel objet de masse entière, inférieure ou égale à M grammes, en disposant uniquement de  $n$  poids dont la somme des masses ne dépasse pas M. Exprimer en fonction de M la plus petite valeur possible de  $n$ , et indiquer les masses des poids correspondants.

**Énoncé n° 308 (François LO JACOMO, 75-Paris)**

Soient  $(D_1)$  et  $(D_2)$  deux droites de l'espace. À quelle condition, si l'on compose une rotation d'un tiers de tour autour de  $(D_1)$  avec une rotation d'un tiers de tour autour de  $(D_2)$ , obtient-on une rotation d'un tiers de tour ? À quelle condition, si l'on compose une rotation d'un quart de tour autour de  $(D_1)$  avec une rotation d'un quart de tour autour de  $(D_2)$ , obtient-on une rotation d'un quart de tour ?

**Énoncé n° 309 (Frédéric de LIGT, 17-Montguyon)**

Un triangle partage son cercle circonscrit en trois arcs. À partir de chaque arc, on construit le symétrique du milieu de l'arc par rapport à la corde qui le sous-tend. Montrer que l'orthocentre du triangle obtenu coïncide avec le centre du cercle inscrit dans le triangle initial.

**Solutions****Énoncé n° 299 (Abderrahim OUARDINI, 33-Talence)**

Étant donnés  $n$  points sur une sphère (S) de rayon  $R$ ,  $n \geq 3$ , on en choisit deux, et l'on construit le plan perpendiculaire à leur segment et passant par l'isobarycentre des  $(n-2)$  restants.

Montrer que tous les plans ainsi construits ont un point commun, et que la puissance de ce point par rapport à (S) vaut :

$$\frac{4(n-1)R^2 - K}{(n-2)^2}$$

où  $K$  est la somme des carrés des distances mutuelles des  $n$  points.

**SOLUTION**

L'isobarycentre  $G$  des points  $A_i$  vérifie par définition :

$$n \cdot \overrightarrow{OG} = \sum_{1 \leq i \leq n} \overrightarrow{OA_i}.$$

Donc quels que soient les points  $A_i$  et  $A_j$ , si l'on nomme  $G_{ij}$  l'isobarycentre des  $(n-2)$  restants on a :

$$\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j} = n \cdot \overrightarrow{OG} - (n-2) \cdot \overrightarrow{OG_{ij}}.$$

En appelant  $H$  le point défini par :

$$\overrightarrow{OH} = \frac{n}{n-2} \cdot \overrightarrow{OG},$$

ceci peut s'écrire :

$$\frac{\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}}{n-2} = \overrightarrow{G_{ij}H}.$$

Or  $A_i$  et  $A_j$  étant sur une même sphère,

$$\overrightarrow{OA_i}^2 - \overrightarrow{OA_j}^2 = 0,$$

donc  $\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}$  est perpendiculaire à  $\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_j} = \overrightarrow{A_jA_i}$ . On en déduit que  $H$  appartient au plan perpendiculaire à  $A_iA_j$  passant par  $G_{ij}$ , et ce, quels que soient  $i$  et  $j$  :  $H$  est le point cherché.

La puissance de  $H$  par rapport à la sphère vaut par définition :  $OH^2 - R^2$ . Or l'identité, valable pour toute famille  $(a_j)$  de  $n$  éléments d'un espace euclidien quelconque :

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 + \sum_{i < j} (a_i - a_j)^2 = n \sum_{i=1}^n a_i^2$$

devient, si  $a_i = \overrightarrow{OA_i}$  :

$$n^2 OG^2 + K = n^2 R^2,$$

soit

$$OH^2 = \frac{n^2 R^2 - K}{(n-2)^2}.$$

Donc la puissance de H vaut bien :

$$OH^2 - R^2 = \frac{(4n-4)R^2 - K}{(n-2)^2}.$$

J'ai reçu 11 réponses à ce problème facile, de Richard BECZKOWKI (71-Chalon-sur-Saône), Pierre BORNSZTEIN (78-Maisons-Laffitte), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Christian DUFIS (87-Limoges), Christine FENOGLIO (69-Lyon), Michel HÉBRAUD (31-Toulouse), Gérard LAVAU (21-Dijon), René MANZONI (76-Le Havre), Christian PERROUD (74-Habère-Lullin), Gérard PRIGENT et Claude TALAMONI (93-Dugny et Aulnay), Pierre RENFER (67-Ostwald).

Les démonstrations ne sont pas très différentes. On peut utiliser l'« équation » du plan  $(\Pi_{ij})$  passant par  $G_{ij}$  et perpendiculaire à  $A_i A_j$ , qui s'écrit pour Gérard Lavau (avec  $a_i = \overrightarrow{OA_i}$ ,  $x = \overrightarrow{OM}$ ):

$$\langle a_i - a_j, x - \frac{1}{n-2} \sum_{k \neq i, j} a_k \rangle = 0,$$

et pour Christine Fenoglio :

$$\left( n \overrightarrow{MG} - 2 \overrightarrow{MO} \right) \cdot \overrightarrow{A_i A_j} = 0.$$

On peut aussi remarquer que l'homothétie de centre G et de rapport  $\frac{2}{2-n}$  transforme le milieu de  $A_i A_j$  en  $G_{ij}$ , donc le plan médiateur de  $A_i A_j$  (qui passe par O) en  $(\Pi_{ij})$ , qui passe par H (homothétique de O).

Gérard Prigent et Claude Talamoni signalent que cet énoncé figure (6, page 90) dans le livre de Moissotte : *1850 exercices de mathématiques pour l'oral du CAPES* (Dunod, 1978), et que sa première question a fait l'objet d'un article dans la « modestissime » et aujourd'hui disparue revue du groupe de mathématiques du lycée Voillaume (93-Aulnay).

Ce problème se généralise à n'importe quel espace euclidien, mais surtout, il possède des cas particuliers intéressants. Richard Beczkowski signale que si les points sont cocycliques, ils appartiennent à une infinité de sphères, et les plans  $(\Pi_{ij})$

ont une droite en commun. C'est en particulier le cas lorsque  $n = 3$  : la droite passe alors par l'orthocentre du triangle, et l'on retrouve les relations classiques :

$$\overrightarrow{OH} = 3 \cdot \overrightarrow{OG},$$

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Pierre Bornsztein ajoute que la première partie est une généralisation à l'espace d'un résultat dû à M. B. Cantor (1829 - 1920), dont on peut trouver l'énoncé dans le poly du stage olympique de Saint-Malo (été 2003), exercice 11 de la muraille : en appelant  $(\Delta_i)$  la perpendiculaire à la tangente au cercle en  $A_i$  passant par l'isobarycentre des  $(n - 1)$  autres points, les droites  $(\Delta_i)$  sont concourantes. Et Michel Hébraud signale une généralisation de la notion d'orthocentre (J. Trignan, *La géométrie des nombres complexes*) : l'orthocentre  $H$  d'un polygone inscriptible étant défini par  $\overrightarrow{OH} = \sum \overrightarrow{OA_i}$ ,  $H$  est l'intersection de tous les cercles de centres  $H_i$  (orthocentre du polygone privé du sommet  $A_i$ ) et de rayon  $R$  (car  $\overrightarrow{H_iH} = \overrightarrow{OA_i}$ ). Les droites joignant l'isobarycentre de  $p$  points et l'orthocentre des  $(n - p)$  restants sont concourantes.

### Énoncé n° 300 (Moubinool OMARJEE, 75-Paris)

Soit  $a_n$ , pour  $n \geq 1$ , une suite d'entiers naturels tels que :

$$\sum_{d|n} a_d = 2^n.$$

Montrer que pour tout  $n$ ,  $n$  divise  $a_n$ .

### SOLUTION

Cet énoncé a suscité 13 solutions, de Richard BECZKOWSKI (71-Chalon-sur-Saône), Pierre BORNSTZEIN (78-Maisons-Laffitte), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Christian DUFIS (87-Limoges), Christine FENOGLIO (69-Lyon), Michel HÉBRAUD (31-Toulouse), Michel LAFOND (21-Dijon), Gérard LAVAU (21-Fontaine-lès-Dijon), René MANZONI (76-Le Havre), Jean-Louis NICOLAS (69-Villeurbanne), Gérard PRIGENT (93-Dugny), Pierre RENFER (67-Ostwald) et Pierre SAMUEL (92-Bourg-la-Reine).

La méthode généralement adoptée consiste à prouver par récurrence que, pour tout nombre premier  $p$ , si  $n$  est divisible par  $p^\alpha$ ,  $a_n$  est lui aussi divisible par  $p^\alpha$ .

Et pour cela, on fait appel à deux petits lemmes : tout d'abord, si  $x \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ ,  $x^p \equiv 1 \pmod{p^{\alpha+1}}$ . Cela se démontre classiquement :

– soit avec la formule du binôme, en développant  $x^p = (1 + q \cdot p^\alpha)^p$ ,

– soit en factorisant :  $x^p - 1 = (x - 1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1)$  ; les  $p$  termes de la deuxième parenthèse étant tous congrus à 1 modulo  $p$ , leur somme est multiple de  $p$ .

Il en résulte un second lemme : pour tout entier  $y$ , tout nombre premier  $p$  et tout entier  $\alpha$ ,

$$y^{p^\alpha} \equiv y^{p^{\alpha-1}} \pmod{p^\alpha}.$$

En effet,

$$y^{p^\alpha} - y^{p^{\alpha-1}} = \left( y^{(p-1)p^{\alpha-1}} - 1 \right) y^{p^{\alpha-1}}.$$

Si  $y$  n'est pas multiple de  $p$ ,  $y^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , donc  $y^{(p-1)p} \equiv 1 \pmod{p^2}$  et, par récurrence,

$$y^{(p-1)p^{\alpha-1}} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}.$$

C'est une généralisation classique du petit théorème de Fermat. Si  $y$  est multiple de  $p$ ,  $y^{p^{\alpha-1}}$  est multiple de  $p^{p^{\alpha-1}}$ . Or, pour tout  $p \geq 2$  et tout  $\alpha \geq 1$ ,  $p\alpha \leq p^\alpha$  (à nouveau par récurrence sur  $\alpha$  :  $\frac{\alpha+1}{\alpha} \leq 2 \leq p$ ). Donc  $p^{\alpha-1} \geq \alpha$ , et  $y^{p^{\alpha-1}}$  est divisible par  $p^\alpha$ .

Dès lors, revenons à notre problème. Supposons la conclusion vraie pour tout entier strictement inférieur à  $n$ . Si  $p$  est un facteur premier de  $n$ , posons:  $n = k \cdot p^\alpha$  ( $k$  premier avec  $p$ ), et montrons que  $a_n$  est divisible par  $p^\alpha$ . Ceci prouvé,  $a_n$  sera divisible par tout diviseur  $p^\alpha$  de  $n$ , donc par leur PPCM, à savoir  $n$ .

Les diviseurs de  $n$  qui ne divisent pas  $k \cdot p^{\alpha-1}$  sont nécessairement multiples de  $p^\alpha$ . L'hypothèse peut donc s'écrire :

$$2^n = 2^{k \cdot p^\alpha} = \sum_{d|k \cdot p^{\alpha-1}} a_d + \sum_{d|k, d < k} a_{d \cdot p^\alpha} + a_n.$$

La première somme vaut, par hypothèse,  $2^{k \cdot p^{\alpha-1}}$ . Dans la seconde somme,  $d \cdot p^\alpha$  étant strictement inférieur à  $n$ , d'après l'hypothèse de récurrence,  $a_{d \cdot p^\alpha}$  est divisible par  $d \cdot p^\alpha$ , donc cette seconde somme est divisible par  $p^\alpha$ . On en déduit que

$$a_n \equiv 2^{k \cdot p^\alpha} - 2^{k \cdot p^{\alpha-1}} \pmod{p^\alpha},$$

soit, en utilisant le second lemme ci-dessus avec  $y = 2^k$ , que

$$a_n \equiv 0 \pmod{p^\alpha}.$$

Plusieurs lecteurs signalent que l'on peut remplacer  $2^n$  par  $c^n$  pour n'importe quel entier  $c$  : la démonstration ci-dessus est inchangée, on a juste  $y = c^k$ . Certains font appel à la fonction  $\mu$  de Möbius :  $\mu(1) = 1$  ;  $\mu(p_1 p_2 \dots p_m) = (-1)^m$  si tous les  $p_i$ , pour  $1 \leq i \leq m$ , sont premiers distincts ; et si  $n$  est divisible par le carré d'un nombre premier,  $\mu(n) = 0$ .

Cette fonction vérifie entre autres : si pour tout entier  $n$ ,

$$\sum_{d|n} a_d = A_n,$$

alors pour tout entier  $n$ ,

$$a_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) A_d.$$

En effet, si  $n$  possède  $m$  diviseurs premiers ( $m \geq 1$ ), il existe  $C_m^r$  produits de  $r$  facteurs premiers distincts parmi les diviseurs de  $n$ , qui vérifient  $\mu(d) = (-1)^r$ , de

sorte que

$$\sum_{q|n} \mu\left(\frac{n}{q}\right) = \sum_{r=0}^m C_m^r (-1)^r = (1-1)^m = 0.$$

Alors que si  $n = 1$ ,

$$\sum_{q|n} \mu\left(\frac{n}{q}\right) = \mu(1) = 1.$$

Il en résulte :

$$a_n = \sum_{b|n} a_b \sum_{q|\frac{n}{b}} \mu\left(\frac{n}{bq}\right),$$

la seconde somme étant nulle sauf pour  $b = n$ . En permutant les sommations, et en posant  $d = bq$ , on obtient :

$$a_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{b|d} a_b = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) A_d.$$

Or si  $n = k \cdot p^\alpha$  ( $k$  premier avec  $p$ ), les seuls diviseurs de  $n$  vérifiant  $\mu\left(\frac{n}{d}\right) \neq 0$  sont

les  $q \cdot p^\alpha$  et les  $q \cdot p^{\alpha-1}$ , pour  $q | k$  tels que  $\mu\left(\frac{k}{q}\right) \neq 0$  et l'on a :  $\mu\left(\frac{k}{q \cdot p}\right) = -\mu\left(\frac{k}{q}\right)$ ,

si bien que

$$a_n = \sum_{q|k} \mu\left(\frac{k}{q}\right) \left(2^{q \cdot p^\alpha} - 2^{q \cdot p^{\alpha-1}}\right)$$

est divisible par  $p^\alpha$  d'après nos lemmes du début.

Richard Beczkowski donne les 32 premières valeurs de la suite (2, 2, 6, 12, 30, 54, 126, 240, 504, 990, 2 046, 4 020, 8 190, 16 254, 32 730, 65 280, 131 070, etc.) et Gérard Prigent signale que cette suite est répertoriée sous la référence A027375 dans « the On-Line Encyclopedia of Integer Sequences » ([www.research.att.com](http://www.research.att.com)).  $a_n$  y est présenté comme le nombre de suites binaires non périodiques de longueur  $n$  :

$$a_3 = 6 = \text{Card} \{001, 010, 100, 011, 110, 101\}.$$

Gérard Lavau en donne une variante : si l'on colorie en deux couleurs les  $n$  sommets d'un polygone régulier, et qu'on fait opérer sur ces coloriages le groupe des rotations du polygone, chaque coloriage décrit une orbite dont la longueur divise  $n$ . Si  $O_d$  est le nombre d'orbites de longueur  $d$ , le nombre de coloriages de ces orbites est  $d \cdot O_d$ . Et ce nombre dépend de  $d$  et non de  $n$  : un tel coloriage équivaut à une suite binaire

non périodique de  $d$  couleurs, qui se répète  $\frac{n}{d}$  fois tout autour du polygone. Comme

il existe  $2^n$  coloriages au total,  $2^n = \sum_{d|n} d \cdot O_d$ , ce qui entraîne :  $a_n = d \cdot O_d$ . Enfin

Jean-Louis Nicolas ajoute que  $O_d$  est aussi le nombre de polynômes irréductibles unitaires de degré  $d$  sur le corps à deux éléments.