

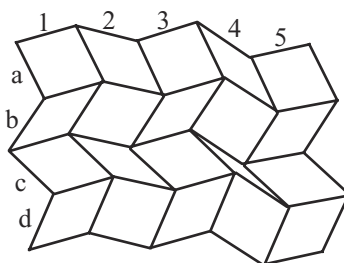
Exercices de ci, de là

Nouveaux énoncés

1) Un exercice d'entraînement du Rallye Mathématique POITOU-CHARENTES 92

Le réseau ci-contre est formé de barres de longueurs 1 reliées entre elles seulement par leurs sommets. Pour rendre une maille rigide et carrée, il suffit de relier deux sommets opposés

de cette maille par une barre de longueur $\sqrt{2}$. Combien faut-il au minimum de telles barres pour rendre rigide le réseau ci-contre ?



2) Proposé par Jacques Chayé, de Poitiers

Soit ABC un triangle quelconque. Soient A' , B' et C' les pieds des hauteurs respectivement sur (BC) , (CA) et (AB) ; soit I , J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$; soit U , V et W les milieux respectifs de $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$. Démontrer que les droites (IU) , (JV) et (KW) passent par un même point.

3) Proposé par Frédéric de Ligt, de Montguyon

Une grille de loto est constituée de cases numérotées de 1 à 14. On remplit une grille en cochant 3 cases. Combien faut-il remplir de grilles pour être certain de trouver au moins 2 des 3 numéros qui vont sortir ?

4) Problème de dénombrement

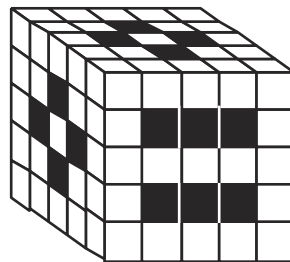
le problème ci-dessous a été proposé aux participants d'un rallye lors du Salon des Jeux Mathématiques 2001 organisé à Paris par le C.I.J.M. (1 - 4 juin).

Le cube était présenté sur une table ; il est constitué de 125 petits cubes blancs ou noirs.

Chaque carré noir vu sur la face avant (respectivement latérale), (respectivement supérieure) est la base d'un parallélépipède formé par 5 petits cubes noirs (le grand cube est donc traversé par des barres de 5 petits cubes noirs).

Combien y a-t-il de cubes blancs ?

Si l'on enlève une couche de cubes sur chaque face du grand cube, combien reste-t-il de petits cubes blancs ?



Solutions

Exercice n° 3 du BV n° 451

Tout plan mené par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre divise ce solide en deux parties équivalentes (même volume).

(Leçons de géométrie. Jacques Hadamard - Armand Colin 1901).

Solution de Louis Rivoalan (Rochefort)

Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires et O l'isobarycentre de ces quatre points. Soit I, J, K, L, P et Q les milieux respectifs de [AC], [BD], [AD], [BC], [CD] et [AB].

Un calcul barycentrique usuel montre que O est aussi le milieu de [IJ], [KL] et [QP].

Soit $\vec{u} = \vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC})$; $\vec{v} = \vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OD})$ et $\vec{w} = \vec{OQ} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$.

Considérons le repère $\left(O, \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)\right)$. Dans ce repère, les points A, B, C et D ont pour coordonnées : A (1 ; 1 ; 1) ; B (-1 ; -1 ; 1) ; C (1 ; -1 ; -1) et D (-1 ; 1 ; -1).

Considérons la transformation affine f qui au point M (x ; y ; z) associe M'

(x' ; y' ; z') avec :
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$$
. L'application linéaire associée est définie par les mêmes

relations, et on a : $f(\vec{u}) = \vec{u}$; $f(\vec{v}) = -\vec{v}$; $f(\vec{w}) = -\vec{w}$. On a $f \circ f = \text{Id}$.

De plus $f(A) = C$, $f(B) = D$, $f(I) = I$, $f(J) = J$ et $f(O) = O$. Par suite l'image de [AB] est [CD] et celle d'un plan $\pi \left(O, \vec{u}, \vec{t}\right)$ avec $\vec{t} = a\vec{v} + b\vec{w}$ est $\pi' \left(O, \vec{u}, -a\vec{v} - b\vec{w}\right)$.

Donc $\pi' = \pi$.

Soit M le point d'intersection de π et de [AB] et $P = f(M)$. Alors

$$P = f([AB] \cap \pi) = f([AB]) \cap f(\pi) = [CD] \cap \pi.$$

Rappel : le volume d'un tétraèdre ABCD est $\frac{1}{6} \left| \det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) \right|$.

Pour montrer l'invariance énoncée par J. Hadamard, il suffit de montrer que le volume de AMIJ est égal à celui de CPIJ. En effet, les volumes formés par le tétraèdre et le plan π sont respectivement égaux à ABCJ + IJCP - AMIJ d'une part et ACDJ + AMIJ - IJCP d'autre part, et il est facile de voir que les volumes de ABCJ et de ACDJ sont égaux à la moitié du volume de ABCD.

$$\det(\vec{IJ}, \vec{IC}, \vec{IP}) = \det\left(f(\vec{IJ}), f(\vec{IA}), f(\vec{IM})\right) = \det(f) \times \det(\vec{IJ}, \vec{IA}, \vec{IM}).$$

Or $\det(f) = -1$. Par suite

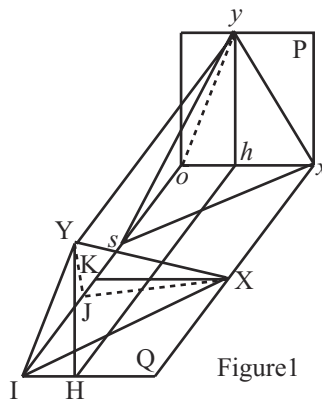
$$V(\text{IJCP}) = \frac{1}{6} \left| \det(\vec{IJ}, \vec{IC}, \vec{IP}) \right| = \frac{1}{6} \left| \det(\vec{IJ}, \vec{IA}, \vec{IM}) \right| = V(\text{IJAM}).$$

Ce qui démontre la proposition.

Solution de Serge Parpay (Niort)

Dans ce qui suit l'aire d'une surface S sera notée $\mathcal{A}(S)$, le volume d'un solide V sera noté $\mathcal{V}(V)$. Les parenthèses ou crochets en usage maintenant ne seront pas utilisés sauf risque de confusion. Les projections utilisées sont des projections orthogonales : on ne le précisera donc pas à chaque fois.

Données (figure 1) : Tétrahèdre $IJXY$;
 Q : plan du triangle IJX ; XK : hauteur du triangle IJX ; YH : hauteur du tétrahèdre (base IJX) ;
 P : plan perpendiculaire à IJ en un point o ;
 s : point de IJ tel que $so = IJ$;
 x, y, h : projections orthogonales de X, Y, H sur P .



Dénomination : oxy sera appelé profil du tétrahèdre dans la direction IJ .

Les deux tétrahèdres $IJXY$ et $soxy$ ont même volume :

$$\mathcal{V}(IJXY) = \frac{1}{3} \mathcal{A}(IJX) \cdot YH = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} IJ \cdot XK \right) \cdot YH,$$

$$\mathcal{V}(soxy) = \frac{1}{3} \mathcal{A}(oxy) \cdot so = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} ox \cdot yh \right) \cdot so.$$

Mais $IJ = so$, $XK = ox$, $YH = yh$: l'égalité des volumes est démontrée.

Propriété : Soit un tétrahèdre $IJXY$, ℓ la longueur de l'arête IJ , oxy le profil de $IJXY$ dans la direction IJ . Le volume du tétrahèdre est $\mathcal{V}(IJXY) = \frac{1}{3} \ell \cdot \mathcal{A}(oxy)$.

Remarque : en conséquence, tous les tétrahèdres $I'J'X'Y'$ de profil oxy et d'arête $I'J'$, I' et J' étant sur la droite IJ et $I'J' = IJ$, ont même volume.

L'exercice proposé :

Données (Figure 2) : Tétrahèdre $ABCD$;
 I et J : milieux de AB et CD ;
 P : plan perpendiculaire à IJ en un point o ; a, b, c, d : projections orthogonales de A, B, C, D sur P .

Le quadrilatère $abcd$ est le profil du tétrahèdre $ABCD$ dans la direction IJ . I et J étant les milieux de AB et CD , o (leur projection commune) sera le milieu de ab et cd : le quadrilatère $abcd$ est un parallélogramme de centre o .

Soit un plan Π passant par IJ . Π est perpendiculaire à P et toute droite de Π se projette en la droite Δ , intersection de P et de Π , cette droite passant évidemment par o .

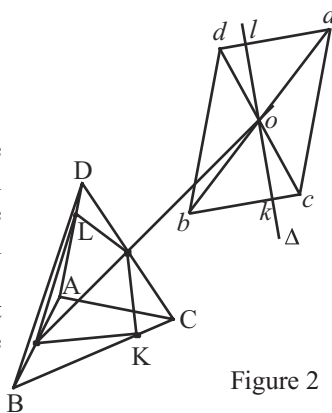


Figure 2

Le plan Π coupera le tétraèdre en deux parties.

Quatre cas sont à envisager :

1) Δ coupe ad en ℓ et bc en k : le plan Π coupe alors AD en L (se projetant en ℓ) et BC en K (se projetant en k).

2) Cas limite du cas précédent : ℓ en a , k en b , donc L en A et K en B.

3) Δ coupe bd en ℓ' et ac en k' : le plan Π coupe alors BD en L' (se projetant en ℓ') et AC en K' (se projetant en k').

4) Cas limite du cas précédent : ℓ' en d , k' en c , donc L' en D et K' en C.

Dans ces différents cas, les sections du tétraèdre par le plan Π sont le quadrilatère IKJL, le triangle BJA, le quadrilatère IK'JL', le triangle ICD.

Le raisonnement suivant porte sur le cas 1). Les autres cas se traiteraient par un raisonnement semblable (certains volumes seraient nuls).

On découpe le tétraèdre en six tétraèdres d'arête commune IJ : IJLD, IJDB, IJBK, IJKC, IJCA et IJAL. Leurs profils sont respectivement old , odb , obk , okc , oca et oal .

On a par symétrie de centre o et calcul des volumes selon la propriété énoncée plus haut :

$$\mathcal{A}(old) = \mathcal{A}(okc) \text{ donc } \mathcal{V}(IJLD) = \mathcal{V}(IJKC),$$

$$\mathcal{A}(odb) = \mathcal{A}(oca) \text{ donc } \mathcal{V}(IJDB) = \mathcal{V}(IJCA),$$

$$\mathcal{A}(obk) = \mathcal{A}(oal) \text{ donc } \mathcal{V}(IJBK) = \mathcal{V}(IJAL).$$

En « regroupant » les tétraèdres IJLD, IJDB et IJBK d'une part, les tétraèdres IJKC, IJCA, IJAL d'autre part et compte tenu des égalités précédentes, on prouve que les deux polyèdres IKJLBD et IJKLAC ont même volume, volume égal en conséquence à la moitié du volume du tétraèdre ABCD. Il en est de même des cas limites : les tétraèdres ABJC et ABJD, CDIA et CDIB.

Tout plan passant par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre coupe ce tétraèdre en deux parties équivalentes.

Remarque : tous les tétraèdres de profil $abcd$ relativement à IJ (I milieu de AB, J milieu de CD, IJ de longueur donnée ℓ) ont la même propriété, les volumes restant les mêmes.

Exercice 8 du BV n° 451

Montrer que tout entier impair non divisible par 5 a un multiple dont l'écriture ne comporte que des 1.

Solution de Pierre Chevrier (Niort)

Des exemples pour voir :

$$3 \times 37 = 111 ; 7 \times 15\,873 = 111\,111 ; 9 \times 12\,345\,679 = 111\,111\,111 ; 11 \times 1 = 11 ; \\ 13 \times 8\,547 = 111\,111 ; 17 \times 65\,359\,477\,124\,183 = 111\,111\,111\,111\,111.$$

Reformulation du problème :

Dire qu'un nombre est impair et non divisible par 5 équivaut à dire qu'il est premier avec 10.

Dire que l'écriture décimale d'un nombre ne comporte que des 1 signifie que ce

nombre est de la forme $\frac{10^{n+1}-1}{9}$ (n entier naturel). $\left[1+10+\dots+10^n = \frac{10^{n+1}-1}{9} \right]$.

Il s'agit donc d'établir que, pour tout nombre x premier avec 10, $9x$ a un multiple de la forme $10^{n+1} - 1$.

Une démonstration au niveau de terminale S :

Soit x un entier premier avec 10, alors $9x$ est aussi premier avec 10 ; pour tout entier p , désignons par r_p le reste obtenu dans la division euclidienne de 10^p par $9x$; tous les restes r_p vérifient $1 \leq r_p < 9x$.

Parmi les restes r_1, r_2, \dots, r_{9x} , il y en a donc au moins deux égaux, r_s et r_t avec $s < t$. On a donc des égalités de la forme $10^t = k \times 9x + r_t$; $10^s = \ell \times 9x + r_s$, avec $r_s = r_t$, d'où, en retranchant membre à membre :

$$\begin{aligned} 10^t - 10^s &= (k - \ell) \times 9x, \\ 10^s (10^{t-s} - 1) &= (k - \ell) \times 9x. \end{aligned}$$

$9x$ est premier avec 10^s ; il divise par conséquent $10^{t-s} - 1$, d'après le théorème de Gauss. C.Q.F.D.

Remarque :

La méthode utilisée dans cette démonstration peut faire l'objet d'un algorithme pour trouver effectivement un multiple du nombre x ne comportant que des 1 dans son écriture dans le système décimal ;

(exemple : $x = 3$; les deux premières puissances de 10 donnant le même reste dans la division par $27 = 3 \times 9$ sont 10^2 et 10^5 . $10^3 - 1 = 999 = 9 \times 111$; on trouve 111).

Au niveau terminale + ? , le résultat repose sur le théorème d'Euler ; en effet, on peut reformuler le problème ainsi : il s'agit de trouver un entier n tel que

$$10^{n+1} \equiv 1 \pmod{9x} ;$$

or $9x$ étant premier avec 10, le théorème d'Euler nous dit que

$$10^{\varphi(9x)} \equiv 1 \pmod{9x}.$$