Naissance d'un énoncé

Daniel Reisz

On peut se demander comment naît un problème, ou plutôt comment naît un énoncé de problème, comme ceux que nous utilisons dans nos classes. Les démarches sont diverses selon les goûts et les habitudes de chacun. Et même chez un professeur donné de multiples démarches se font jour au cours d'une carrière.

Je voudrais « raconter » ici comment, récemment, m'est venue l'idée d'un problème, débouchant sur un énoncé, à partir d'une discussion tout à fait informelle avec mon collègue et ami, Patrick Brandebourg. « Raconter » a un coté puéril, intimiste, qui nécessite d'étaler ses ignorances, ses essais, alors qu'il est bien évident que d'autres savaient sans doute tout ce qui s'est mis en place. Mais il me semble qu'il y a quelque intérêt à comprendre la genèse de quelque chose qui, tout à la fin, va avoir un aspect propre, bien hiérarchisé, d'où toute trace d'essai, d'ignorance, de fausses idées, aura disparu. Ces mathématiques « aseptisées » que nous proposons aux élèves effacent toute une vie antérieure faite de questionnements, d'essais, d'échecs, de recherche, de conversations avec les uns et les autres, …, c'est-à-dire d'activité mathématique.

Bien sûr, il ne saurait être question d'associer constamment les élèves à une telle démarche, mais le jeu en vaut peut-être la chandelle de leur expliquer au moins une fois par quel cheminement on arrive à un problème « scolaire ». Il y a là à la fois un intérêt didactique, psychologique, voire plus largement éducatif qui participerait sans doute à installer chez eux une image moins déformée des mathématiques.

Bien sûr il ne saurait être question d'abandonner l'utilisation d'énoncés tout faits (sujets d'examen, exercices d'entraînement, énoncés de manuel, …) ne serait-ce que pour des raisons de temps, mais aussi parce qu'ils ont leur utilité propre. Mais de temps en temps, bâtir un énoncé, transformer une idée, un questionnement, des essais, en un énoncé utilisable dans une classe, est une activité non seulement passionnante, mais aussi très formatrice pour un enseignant.

I – L'idée initiale et les réflexions plus ou moins pertinentes qu'elle a induites

Notre discussion avec Patrick Brandebourg partait d'une idée fausse, évidemment fausse, mais si séduisante qu'on l'aurait voulue vraie : *Puisque les trois médianes d'un triangle coupent chacune le triangle en deux parties d'aires égales, il doit bien en être de même avec toute droite passant par le centre de gravité* (Figure 1). Cette idée, fausse, était d'autant plus séduisante en l'absence de toute réflexion qu'il y avait là quelque chose de « barycentriquement correct ».

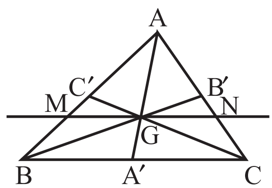

Figure 1

D'ailleurs même Élisabeth Busser et Gilles Cohen se sont récemment laissés séduire par cette idée dans leur rubrique hebdomadaire du journal « Le Monde », ce qui les a amenés à un rectificatif dès la semaine suivante. En tout cas, il a fallu vite déchanter, puisque de façon évidente une parallèle à l'un des côtés du triangle et passant par le centre de gravité G partage le triangle en deux aires, l'une valant 4/9 et l'autre 5/9 de l'aire du triangle ABC (on peut utiliser pour cela l'homothétie de centre A et de rapport 2/3, donc les aires… ; on peut aussi utiliser de simples arguments thalésiens).

Une autre idée, encore plus idiote, était de penser à une parallèle à un côté, tracée à mi-hauteur. Un coup d'œil montre à l'évidence que ce n'est pas une idée raisonnable. Et les mêmes arguments homothétiques ou thalésiens amènent à conclure à deux aires valant l'une 1/4, l'autre 3/4 de l'aire du triangle ABC. Par contre un calcul « inverse » permet de placer la « bonne » parallèle (Figure 2). Elle devra passer par le point X de la hauteur AA_1 tel que $AX = \frac{1}{\sqrt{2}} AA_1 \approx 0,7 AA_1$.

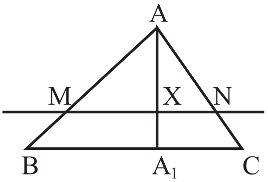

Figure 2

Avec les trois médianes et ces trois nouvelles droites, nous avions là six droites répondant au problème, droites qui nous montraient que le problème était plus complexe que prévu (Figure 3).

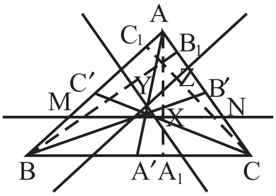

Figure 3

Une autre façon de voir les choses est de choisir un point M sur un des côtés du triangle, AB par exemple, et de faire pivoter autour de M une droite qui va couper le triangle en deux parties, l'une triangulaire, l'autre quadrangulaire, sauf lorsque cette droite passe par l'un des sommets, auquel cas on est en présence soit de deux triangles (sommet C) ou d'un seul triangle (sommets A ou B). Un argument intuitif de continuité permet de se convaincre qu'il existe une position de la droite telle que les deux parties découpées aient même aire. L'observation permet aussi de se convaincre que, sauf le cas où M est le milieu du côté AB (alors les deux parties d'aires égales sont deux triangles), le découpage en deux parties de même aire produira un triangle et un quadrilatère. Or, si l'aire d'un triangle se manipule en général de façon assez conviviale, il n'en est pas de même de l'aire d'un quadrilatère. Mais c'est là que, lors d'une conversation, Jean-Pierre Friedelmeyer m'a rappelé une méthode d'une grande élégance qui permet de ramener l'aire du quadrilatère à celle d'un triangle. J'avais complètement oublié ce qu'il disait là-dessus dans l'excellent article « Le professeur de mathématiques peut-il encore apprendre quelque chose d'Euclide ? » paru dans [Repères nº 53]. Une autre conversation, cette fois avec Henri Bareil, m'a amené à regarder l'exercice proposé en 2003 aux Olympiades académiques de la Guadeloupe (voir cela dans la passionnante [Brochure APMEP nº 158] consacrée aux Olympiades Académiques de Mathématiques 2003) où il fallait montrer qu'une droite qui coupait un triangle en deux polygones d'aires *et* de périmètres égaux, passait par le centre du cercle inscrit. Cet exercice et les commentaires qui l'accompagnent sont très intéressants, parce que l'apparition du centre du cercle inscrit et de la condition d'égalité des périmètres induit une toute autre approche que celle utilisée ici.

Appelons dorénavant N le second point d'intersection de notre droite « bissectrice d'aire » avec le triangle ABC. Si M se trouve sur le côté AB, N se trouvera sur l'un des côtés BC ou CA. Une observation un peu plus attentive nous permet même de conjecturer que si C′ est le milieu du côté AB, alors :
– si M ∈ [AC′], le triangle répondant à la question aura pour sommet autre que M et N le point B ;
– si M ∈ [BC′], le triangle aura pour sommet autre que M et N le point A.

À ce point de nos investigations intuitives et contradictoires (au sens policier du mot) il nous fallait faire le point :

Que peut-on dire de toutes ces droites bissectrices d'aire ? Sans doute rien de très simple, mais un logiciel de dessin géométrique ou de courageux dessins à la main, peuvent donner une petite idée : ces droites semblent être tangentes à des arcs de courbe dont il n'y a plus qu'à espérer qu'ils soient accessibles de façon relativement élémentaire. Selon la précision du dessin on peut imaginer quelque chose qui ressemblerait au dessin de la figure 4, que l'on aurait complété par des tracés analogues dans les deux autres régions concernées (ici sont simplement tracées des droites « bissectrices d'aires », s'appuyant sur les côtés AB et AC).

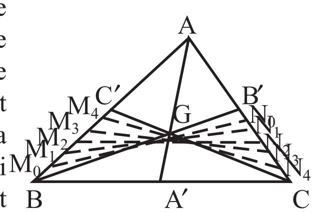

Figure 4

Bref, il faudrait chercher l'*enveloppe* d'une famille de droites et cela est un problème délicat si on l'aborde de front. Rappelons le marteau-pilon, d'ailleurs non justifiable au niveau du lycée.

Soit

$$\mathrm{A}(m)x + \mathrm{B}(m)y + \mathrm{C}(m) = 0$$

l'équation d'une famille de droites dépendant d'un paramètre m. Alors l'enveloppe est un morceau de la courbe obtenue en éliminant m entre

$$\begin{cases} \mathrm{A}(m)x + \mathrm{B}(m)y + \mathrm{C}(m) = 0 \\ \mathrm{A}'(m)x + \mathrm{B}'(m)y + \mathrm{C}'(m) = 0 \end{cases}$$

où $\mathrm{A}'(m)$, $\mathrm{B}'(m)$, $\mathrm{C}'(m)$ désignent les dérivées par rapport à m de $\mathrm{A}(m)$, $\mathrm{B}(m)$, $\mathrm{C}(m)$.

Une façon détournée de faire est de conjecturer la courbe enveloppe, de montrer que toutes les droites sont tangentes à cette courbe et enfin de montrer que toute tangente à cette courbe est une droite de notre famille.

II – L'outillage du problème

Arrivé à ce point il faut à présent se donner les outils qui permettront *peut-être* de gérer le problème de façon plus technique, plus rigoureuse, moins intuitive. Le choix des outils est évidemment inspiré des observations faites précédemment.

a) Quelques notations

Fixons d'abord quelques notations (Figure 5) :

$BC = a$	$AM = x$	$0 \le x \le c$
$CA = b$	$AN = y$	$0 \le y \le b$
$AB = c$		

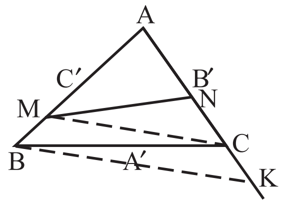

Figure 5

b) Mise en équation de notre problème

Soit K le point d'intersection de la parallèle à la droite (MC) passant par B avec la droite (AC).

Alors

Aire(MNCB) = Aire(MNC) + Aire(MCB) = Aire(MNC) + Aire(MCK) = Aire(MNK)

Notre égalité d'aires

$$\text{Aire(AMN)} = \text{Aire(MNCB)}$$

se traduira donc par

$$AN = NK,$$

soit encore par

$$AK = 2\ AN.$$

D'où, à partir de K, la construction de N sur [AC], et plus précisément sur [B′C], pour autant que M soit sur [C′B]. De simples considérations thalésiennes permettent d'écrire

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AK},$$

soit

$$\frac{x}{c} = \frac{b}{2y},$$

d'où

$$xy = \frac{1}{2}bc.\text{[1]}$$

Et une première remarque s'impose, confirmant nos observations précédentes : si on exprime y en fonction de x, soit

$$y = \frac{bc}{2x},$$

alors

x	0	$c/2$	c
y	$+\infty$ ↘	b ↘	$b/2$

(1) N'était l'objectif de déterminer d'abord (MN), M connu, cette égalité pouvait s'obtenir aussitôt par la classique formule $S = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$ également appliquée au triangle AMN supposé exister.

Et les seules valeurs qui conviennent pour nos droites MN (sous réserve que le troisième sommet soit A) sont

$$x \in \left[\frac{c}{2}, c\right], \quad y \in \left[\frac{b}{2}, b\right].$$

les deux cas extrêmes $\left(\frac{c}{2}, b\right)$ et $\left(c, \frac{b}{2}\right)$ correspondant aux médianes BB′ et CC′.

Cette étude et ces conclusions se reproduisent évidemment par permutation circulaire pour les sommets B et C.

c) Étude de la famille de droites (MN)

Pour nous placer dans un environnement convivial faisons pivoter notre figure et introduisons le repère normé $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{A}u}, \overrightarrow{\mathrm{A}v}\right)$. Dans ce repère l'équation de la droite (MN) sera

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = 1$$

avec

$$xy = \frac{1}{2}bc.$$

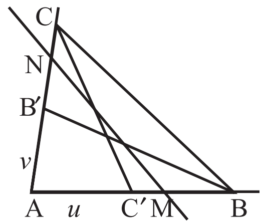

Figure 6

Lorsque x parcourt l'intervalle $\left[\frac{c}{2}, c\right]$, on passe de la position extrême CC′ à l'autre position extrême BB′, c'est à dire les deux médianes.

d) Deux propriétés tangentielles de l'hyperbole

L'idée clé, mettant en jeu une culture élémentaire concernant les coniques, est de se rappeler que si une hyperbole est rapportée à ses asymptotes, son équation est de la forme $xy = k$, le triangle formé par les asymptotes et une tangente a une aire constante et le point de contact de cette tangente à l'hyperbole est le milieu du segment de tangente limité par les asymptotes.

C'est bien la situation dans laquelle nous croyons nous trouver puisque la traduction de

Aire (AMN) = Aire (MNCB)

est bien

$$xy = \frac{1}{2}bc$$

sauf que (x, y) sont les coordonnées d'un point P qui n'a rien à voir avec notre droite (MN). Mais c'est précisément là que notre seconde propriété tangentielle va nous sauver. Si P est un point de l'hyperbole

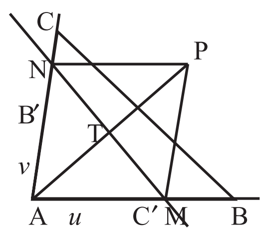

Figure 7

d'équation

$$xy = k,$$

le point T, milieu de AP, mais aussi milieu de MN (ah ! le bon parallélogramme) se trouve lui sur l'hyperbole d'équation

$$xy = \frac{k}{4}.$$

Le lycéen actuel n'a plus dans sa boite à outils ces propriétés tangentielles de l'hyperbole et il va donc falloir les lui faire rétablir. La méthode la plus accessible sinon la plus élégante est de passer par la géométrie analytique. C'est ce que proposera la première partie de l'énoncé du problème (une approche plus géométrique se trouve par exemple dans [Illiovici et Robert], Livre II, chapitre 4).

III – Un énoncé possible (parmi bien d'autres)

L'objectif de ce problème est de mettre en place deux propriétés tangentielles de l'hyperbole dans la perspective d'étudier les droites qui découpent un triangle en deux parties d'aires égales.

Première partie : deux propriétés tangentielles de l'hyperbole

Lorsqu'on choisit pour axes du repère les deux asymptotes d'une hyperbole, l'équation de cette dernière est d'une forme particulièrement simple :

$$xy = k$$

avec

$$k \neq 0$$

ou encore, sous une forme plus fonctionnelle

$$y = \frac{k}{x}.$$

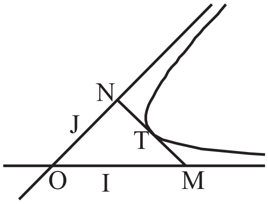

Figure 8

Dans toute la suite du problème on se situera dans un plan euclidien et on supposera le repère normé $\left\|\overrightarrow{OI}\right\| = \left\|\overrightarrow{OJ}\right\| = 1$.

1°) Soit T le point de l'hyperbole (H) d'abscisse x_0 (on supposera $x_0 > 0$ pour des raisons de confort). Écrire l'équation de la tangente (t) à (H) en T.

2°) *Une première propriété.*
Montrer que T est le milieu des points d'intersection M et N avec les asymptotes (axes du repère).

3°) *Une deuxième propriété.*
Après avoir justifié que l'aire du triangle OMN est donnée par la formule

$$\text{Aire(OMN)} = \frac{1}{2}\text{OM} \cdot \text{ON} \sin\theta,$$

où θ est une mesure de l'angle formé par les deux asymptotes (axes du repère), montrer que cette aire est constante quelle que soit la position de T sur l'hyperbole.

Deuxième partie : droites découpant un triangle en deux parties d'aires égales

Soit un triangle ABC de côtés BC = a, CA = b et AB = c.

1°) Montrer que les trois médianes AA′, BB′ et CC′ découpent chacune le triangle en deux triangles d'aires égales. En est-il de même des autres droites passant par G ?

2°) Soit A_1 le pied de la hauteur issue de A. Déterminer la position du point α de AA_1 (en évaluant par exemple $\dfrac{A\alpha}{AA_1}$) telle que la parallèle au côté BC, passant par α, découpe le triangle en deux parties (un trapèze et un triangle) d'aires égales.

Outre cette parallèle on peut évidemment trouver deux autres droites respectivement parallèles à CA et AB découpant le triangle en deux parties d'aires égales, d'où pour l'instant six droites (les trois médianes et les trois parallèles qu'on vient de mettre en place) découpant le triangle en deux parties d'aires égales. Représenter ces six droites sur une figure.

3°) On voudrait maintenant étudier l'ensemble de toutes les droites découpant le triangle ABC en deux parties d'aires égales. On se convaincra d'abord, sur des dessins successifs, qu'hormis les trois médianes de telles droites « bissectrices d'aires » découpent le triangle en une partie triangulaire et une partie quadrangulaire et que la partie triangulaire a évidemment pour un de ses sommets un sommet du triangle ABC. Nous pourrons donc restreindre notre étude aux triangles de sommet A et dont les deux autres sommets M et N se trouvent respectivement sur les cotés AB et AC, quitte à compléter l'étude par une permutation circulaire sur les trois sommets du triangle ABC. On pose AM = x, AN = y avec $0 \le x \le c$ et $0 \le y \le b$.

a) Soit K le point d'intersection de la parallèle à la droite (MC) passant par B avec la droite (AC). Montrer que l'aire du quadrilatère MNCB est égale à celle du triangle MNK.

b) En déduire que x et y vérifient $xy = \dfrac{1}{2}bc$ ou encore $y = \dfrac{bc}{2x}$. En étudiant les variations de y en fonction de x, déduire les positions respectives de M et N par rapport aux milieux C′ et B′ de AB et AC, en observant que les positions extrêmes correspondent aux médianes BB′ (valeurs de x et de y ?) et CC′ (valeurs de x et de y ?).

c) En introduisant le repère normé $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$ avec $\vec{i} = \dfrac{1}{c}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \dfrac{1}{b}\overrightarrow{AC}$ et en s'appuyant sur les deux propriétés démontrées dans la première partie, montrer que les droites (MN) sont toutes tangentes à un arc d'hyperbole. On déterminera l'équation de cette hyperbole dans le repère $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et les deux extrémités de l'arc utile.

d) Par permutation circulaire sur les trois sommets A, B et C compléter l'étude et réaliser un dessin mettant en évidence les trois arcs d'hyperbole sur lesquels s'appuient les « droites bissectrices d'aires ».

Bibliographie.

BROCHURE APMEP Nº 158, *Les Olympiades Académiques de Mathématiques* 2003.

REPÈRES Nº 53, octobre 2003,Topiques.

SORTAIS, *La géométrie du triangle*, Hermann, 1987.

CARRAL, *Géométrie*, Ellipses, 1995.

ILLIOVICI, ROBERT, *Géométrie*, Eyrolles, 1937.

COXETER, GREITZER, *Redécouvrons la géométrie*, Dunod, 1971.

DELTHEIL et CAIRE, *Compléments de géométrie*, Baillère et Fils, 1951.

ROUCHE et COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*, Tomes 1 et 2, Gauthier-Villars, 1900.

F. G-M, *Exercices de géométrie*, tomes 1 et 2, Mame et Fils,1920.

LEBOSSÉ et HÉMERY, *Géométrie* (classe de Mathématiques), Nathan.

Les quatre derniers titres ont fait l'objet de rééditions auprès des Editions GABAY.