Cinq classes au pays de 9 et 11

Marie-Claire Combes, Henri Saumade,
Mireille Sauter & David Théret(*)

Pour la troisième année consécutive, depuis septembre 2003, dans le cadre du Sfodem(1) un groupe de recherche de l'Irem(2) de Montpellier propose à des classes de l'Académie de résoudre collaborativement un problème ouvert, en utilisant via internet une plate-forme à distance. Pendant l'année 2003-2004, 22 classes de l'Académie et une classe des Landes ont participé à l'aventure. Tous les niveaux, de la Sixième à la Seconde étaient représentés, et nous avons même eu le plaisir d'avoir une Terminale (BEP Bois).

Nous vous proposons de suivre la recherche de deux groupes de classes :

- Une classe de Sixième du collège Pierre Moréto de Thuir dans les Pyrénées-Orientales, une Cinquième du collège du Salagou de Clermont-l'Hérault dans l'Hérault et une Cinquième du collège Langevin Wallon des Landes, qui ont travaillé en échangeant leurs travaux par l'intermédiaire de la plate-forme à distance Pléi@d(3),
- Deux classes de Quatrième du collège François Villon de Saint-Gély du Fesc dans l'Hérault, qui ont échangé leurs travaux par affiches.

La communication a été organisée différemment dans les deux groupes :

- le premier groupe a toujours travaillé à distance par l'intermédiaire de la plate-forme en archivant les travaux des différentes classes sur un forum ;
- les deux classes de Quatrième se trouvant dans le même collège, l'organisation a été plus souple, mais le problème de la mémoire du travail s'est posé car il devient rapidement difficile de laisser toutes les affiches exposées en classe. Il serait intéressant de prévoir un endroit en intranet ou sur une plate-forme en accès libre, afin d'archiver tout le travail réalisé. Il est essentiel, également, de participer au travail d'un réseau plus élargi afin de se sentir acteurs d'un travail plus conséquent et de bénéficier de la relance et de la clôture du chercheur.

1. Apprendre à se poser des problèmes

En général, dans leur apprentissage des mathématiques, les élèves apprennent à résoudre des problèmes. Des connaissances sont introduites par l'enseignant en vue de cette résolution. Les problèmes eux-mêmes sont en général assez typés :

(*) Du groupe Résolution Collaborative de Problèmes Ouverts de l'Irem de Montpellier.

(1) Suivi de formation à distance : Dominique Guin, Michelle Joab, Luc Trouche. Cdrom Suivi de Formation à distance pour les Enseignants de Mathématiques. Bilan de la phase expérimentale (2000-2002)

(2) http://www.irem.univ-montp2.fr

(3) Pléi@d est la plate-forme mise à notre disposition par le CNAM pour l'expérience du Sfodem où sont archivés sur un forum tous les travaux des classes du premier groupe.

- on apprend à résoudre un problème, puis on travaille seul sur une suite de variantes de ce problème, souvent assez peu élaborées. La résolution se fait surtout par imitation. C'est souvent la difficulté technique qui augmente au fur et à mesure des exercices ;
- parfois les problèmes sont plus intéressants, plus ambitieux : il faut que l'élève pense à utiliser une des questions précédentes, un résultat du cours, etc. Cela dit, on n'attend pas (sauf dans des cas exceptionnels) que l'élève invente lui-même les questions intermédiaires. Et ces questions sont là parce que sinon il ne saurait pas résoudre ce problème trop difficile pour lui.

Le constat est que l'enseignant, et l'élève, sont souvent démunis lorsque l'élève ne sait pas faire ce qui lui est demandé. Nous déplorons régulièrement le manque d'autonomie de nos élèves, mais notre réaction est en général de donner des indications très spécifiques au problème donné (les questions intermédiaires), voire de donner toute la solution.

Pourtant, pour résoudre un problème, il faut en général se poser d'autres problèmes. Que faire quand on ne sait pas faire ? Il faut s'inventer quelque chose que nous sachions faire, et qui nous rapproche du but désiré. Mais comment faire ? Comment chercher ? Cette étape du travail est trop souvent occultée dans ce que nous proposons à nos élèves. Au lieu d'inviter un élève à se poser un autre problème, nous le proposons soit *a priori* (les questions intermédiaires) ou *a posteriori* (s'il ne sait pas faire ceci, je vais lui donner ce problème plus facile). Nous apprenons à résoudre des problèmes, mais nous n'apprenons pas à nous en poser. Il y a certainement à cela des raisons diverses :

- ce n'est pas dans notre culture d'enseignant ;
- c'est un peu du domaine de la sphère de l'intime (ce qui se passe dans ma tête, lors de ma recherche personnelle, ne regarde que moi ; je ne veux pas que l'on sache par quels errements je suis passé pour arriver au résultat) ;
- il y a une difficulté psychologique pour l'enseignant (et aussi pour l'élève) de faire face à l'inconnu : chaque élève sera particulier, beaucoup de choses peuvent apparaître, des questions resteront sans réponses, etc.

Pourtant une part fondamentale des mathématiques réside en ceci : se poser des questions (et les résoudre). Dans notre travail à l'Irem dans le cadre du Sfodem, nous essayons précisément de proposer aux élèves des situations qui leur demandent de se poser des questions.

2. Choix du problème

2.1. Caractéristiques de ces problèmes

- Ces problèmes doivent être de véritables problèmes ouverts **(cf. Annexe 1)** et non pas des problèmes fermés où la solution est unique et imposée.
- Il n'y a pas de méthode proposée, pas d'indications, pas de questions intermédiaires.
- On privilégie les problèmes qui ont un contenu intuitif immédiat.
- Mais du coup, la formulation du problème reste volontiers un peu imprécise.

- On choisit des problèmes simples (du moins en apparence), qui se situent dans un champ de connaissances où les chercheurs peuvent prouver ou infirmer la validité de leurs conjectures.
- Ces problèmes devraient susciter la curiosité, partant de l'idée qu'il faut avoir envie de résoudre le problème avant de commencer à le faire.
- On privilégie des problèmes qui admettent des généralisations, des spécialisations, des variantes, des interprétations différentes.
- Enfin, on donne des problèmes qui sont trop difficiles pour être résolus par une personne seule ou bien trop riches pour qu'une seule personne puisse en explorer toutes les possibilités.

2.2. Historique du problème proposé

En préalable au travail des classes, nous rencontrons les enseignants volontaires pour cette expérience et nous leur faisons vivre la résolution collaborative de deux problèmes :

- le premier, lors de notre première rencontre,
- le deuxième, à distance en utilisant la même plate-forme que celle qui sera utilisée par les élèves.

Le problème proposé aux adultes en septembre 2003 était le suivant :
Quel est le plus grand nombre que l'on ne peut pas atteindre comme somme de 7 et de 13 ?

Parallèlement, lors d'une réflexion sur le rapport PISA(4), nous avons découvert que l'un des tests proposés aux élèves avait beaucoup de points communs avec la situation proposée aux enseignants lors de notre rencontre.
Serait-il possible d'utiliser un système de monnaie (ou un système de timbres) qui utiliserait exclusivement les valeurs 3 et 5 ? Plus spécifiquement, quels montants pourrait-on obtenir ainsi ? S'il s'avérait possible, un tel système serait-il souhaitable ?

Étant donné le travail intéressant fait par les enseignants autour du Premier problème, nous avons décidé d'utiliser l'énoncé proposé dans le rapport en apportant une légère variante. Nous avons donc proposé à la réflexion des classes l'énoncé ci-dessous :
Problème de monnaie : *Serait-il possible d'utiliser un système de monnaie où il n'existerait que des pièces de valeur 9 et 11 ?*

Nous pensions que les élèves suivraient une démarche analogue à celle des adultes : traiter d'abord le cas (plus facile *a priori*) où on peut rendre la monnaie, puis celui où on ne le peut pas, et que l'on pourrait ensuite proposer une variante correspondant au problème traité par les adultes avec 7 et 13.
La suite vous montrera que les élèves n'ont pas exploré les mêmes pistes et c'est ce qui rend le travail encore plus passionnant.
Nous avons ainsi constaté que cet habillage concret du problème a entraîné les élèves dans des voies auxquelles nous n'avions pas pensé.

(4) Rapport PISA http://www.pisa.oecd.org/

3. Les itinéraires communs

3.1. L'organisation pratique du travail en classe

D'un commun accord avec les enseignants des différentes classes engagées dans l'expérience, la résolution du problème s'est étalée sur une période de huit semaines avec obligation de communiquer avec les autres classes du groupe, au moins une fois tous les quinze jours. En pratique la communication a été hebdomadaire pendant les trois premières semaines, puis est devenue un peu plus irrégulière pendant la deuxième période.

Les enseignants ont consacré une séance par semaine à ce travail, pendant les premières semaines. L'organisation du travail alternait des moments de recherche en groupe et des moments de débat ou de synthèse du travail, classe entière.

3.2. Les différentes phases du travail mathématique

Les différents problèmes testés ces trois dernières années font apparaître des régularités quant à l'activité mathématique menée par les différentes classes. Cinq phases caractéristiques se succèdent :

3.2.1. Quel(s) problème(s) va-t-on résoudre ?

La première séance est consacrée dans les différentes classes aux questions que l'on se pose et que l'on va poser aux autres pour essayer de comprendre la situation et pour décider de ce que l'on va essayer de résoudre. Cette phase est spécifique du travail proposé et a une importance capitale pour la suite. Le rôle du professeur est à ce moment là très particulier, il accompagne le travail mais doit rester en retrait par rapport aux mathématiques qui commencent à être explorées. Il ne doit pas répondre aux questions posées, mais les renvoyer à la responsabilité de la classe.

À la fin de la première séance une liste de questions est envoyée aux autres classes.

Les questions posées par les classes sont très diverses, mais de la Sixième à la Seconde les préoccupations sont sensiblement les mêmes et peuvent se classer en trois catégories :

- Motivation
  - *Est-ce que ce sont des francs ou des euros ? Est-ce qu'il y a un lien avec les euros ? Est-ce que c'est aussi pareil dans d'autres pays, ou seulement en France ?*
  - *Y-a-t-il d'autres moyens de paiement (chèques, carte bleue) ?*
  - *Les marchands n'en profiteront-ils pas pour augmenter les prix ?*
- Choix des problèmes que l'on va résoudre
  - *Serait-il possible d'utiliser des centimes ?*
  - *Comment rendre la monnaie ?*
  - *Peut-on faire tous les nombres ?*
    - *En rendant la monnaie ?*
    - *Sans rendre la monnaie ?*

- Entrée dans les mathématiques
    - *Peut-on trouver 1 ?*
    - *Pourquoi avoir choisi 9 et 11 ?*
    - *Y-a-t-il plusieurs façons de faire 19 ?*

3.2.2. Réponses aux questions des autres classes et premiers choix

La deuxième séance met en sommeil dans un premier temps le travail déjà amorcé pour se consacrer uniquement aux interrogations des autres classes issues du même groupe.

Cependant, les préoccupations sont souvent très proches et le travail de chaque classe peut se poursuivre.

Voici le travail de la Sixième de Thuir en réponse aux questions de la Cinquième du Salagou :

« **1) Êtes-vous d'accord sur le fait qu'on puisse payer 1, 2, 3, 4, etc., c'est-à-dire toutes les factures " entières " avec uniquement des pièces de 9 et de 11 ?**
Nous sommes d'accord avec vous. À partir du moment où l'on a 1, on peut tout avoir.
Avec des pièces de 9 et 11 unités : $1 = (9 \times 5) - (11 \times 4)$
Avec des pièces de 9 et 11 centimes
$(9 + 11) + (9 + 11) + (9 + 11) + (9 + 11) + (9 + 11) = 100$ *centimes* $= 1$ *unité*
2) Comment faites-vous pour des centimes ?
On prend des pièces de 9 et 11 centimes.
3) Pensez-vous comme nous que cela devient très encombrant pour les grosses factures parce qu'il y aura beaucoup trop de pièces ?
Très encombrant et complexe mais tout est possible.
4) Le groupe d'Anaïs dit que le système de monnaie est peut-être possible mais vraiment pas commode car il faudrait trop de pièces.
Entièrement d'accord.
5) Andoni demande : si je dois acheter quelque chose qui coûte 9 et que je n'ai qu'une pièce de 11 : on ne peut pas me rendre la monnaie donc le système n'est pas possible.
Avec des pièces de 9 et 11 centimes cela est possible. Par contre pour payer 9 centimes avec une pièce de 11 centimes c'est impossible.
En conclusion nous pensons que le système est possible mais qu'il faut toujours avoir beaucoup de pièces, donc très encombrant . »

3.2.3. Relance

À la fin de la deuxième séance, les classes, pour la plupart, pensent que le problème initial est résolu, mais commencent à se poser de nouvelles questions :
« *Les élèves de Cinquième 3 du Collège Du Salagou adressent le bilan du débat qu'ils ont eu en prenant connaissance du travail des deux autres classes :*

1) Ils pensent qu'il est inutile de parler d'euros et donc de centimes.
2) Ils sont convaincus qu'il ne faut utiliser que des nombres entiers
3) Ils disent que du moment qu'on peut atteindre 1 tout nombre entier peut alors être atteint en prenant des multiples « équivalents ».
4) Ils admettent qu'il faudra avoir beaucoup de ces pièces pour atteindre des grands nombres.
5) Ils ont remarqué que 2 peut être obtenu avec 18 pièces mais aussi avec seulement 2 pièces. Ils cherchent donc le minimum de pièces pour obtenir 1, 2, 3, 4, 5, etc.
6) Ils ont également constaté qu'en prenant que des pièces de 6 et de 4 à la place de 11 et de 9 ils ne pouvaient atteindre ni 1, ni 3, ni 5... mais seulement 2, 4, 6, … Ils pensent donc que les nombres 11 et 9 n'ont pas été pris au hasard. »

Les classes partant dans plusieurs directions, une **relance (Annexe 2)** destinée à tous paraît alors nécessaire pour que ces différentes classes puissent continuer à échanger sur des préoccupations communes.

Cette relance est faite par un enseignant-chercheur de la Faculté des Sciences de Montpellier qui travaille dans notre groupe de recherche.

Son rôle est important car il a une vue d'ensemble sur le travail effectué par les différentes classes.

3.2.4. Derniers choix et premières conjectures

Les classes ayant pris connaissance de la relance, réagissent aux propositions et poursuivent leur travail scientifique en proposant de nouvelles conjectures aux autres.

Nous trouvons ci-dessous les réactions de la Cinquième de Langevin Wallon

« Nous avons pris connaissance des recherches des autres classes et nous avons essayé de travailler en essayant d'autres nombres que 9 et 11. En fait nous avons essayé d'obtenir 1.
Êtes-vous d'accord pour dire qu'avec 8 et 12 cela ne marche pas ?
Nous proposons de choisir des nombres impairs qui ne sont pas dans la même table.
Que pensez-vous de ce choix ? »

3.2.5. Débat scientifique autour des conjectures

Des moments de débat scientifique sont alors organisés dans les classes, afin d'invalider certaines conjectures ou d'essayer d'apporter une preuve.

« En réponse aux collèges Langevin Wallon et Pierre Moréto, les élèves de la Cinquième 3 du collège du Salagou :

- *Sont d'accord sur le fait qu'une fois qu'on obtient 1, le problème est possible*
- *Pour obtenir 1, ils sont tombés d'accord pour écrire les tables respectives de chacun des nombres et de rechercher quand l'écart était de 1.*
- *Pensent qu'avec deux pairs ça ne marche pas mais n'arrivent pas à le prouver indéfiniment.*

- *1 et n'importe quel autre nombre ça marche toujours étant donné que les multiples de 1 forment tous les nombres possibles sans que l'autre nombre joue un rôle.*
- *Ont répertorié des cas où ça marche : 3 et 5 ; 3 et 7 ; 9 et 11 ; 5 et 7 ; 5 et 11, …*
- *Ont répertorié des cas où ça ne marche pas : 4 et 6 ; 21 et 7 ; 3 et 15 ; … sans pouvoir vraiment dire que ce sera pas possible à un moment. Ils pensent que pour l'expliquer il va falloir utiliser leurs multiples.*

En fin de séance, nous cédons au découragement car une explication générale nous paraît trop compliquée face à tous les cas à étudier. Pourriez-vous nous sortir de cet enlisement… ? pourrions-nous conclure ensemble ? »

À l'occasion de ce travail sur les conjectures, il peut alors apparaître la nécessité d'inventer de nouvelles définitions communes à l'ensemble des chercheurs pour que les conjectures restent valides.

Les élèves du collège du Salagou rajoutent les remarques suivantes :

« La formulation de Wallon : des nombres impairs qui ne sont pas dans la même table a soulevé de nombreuses interrogations sur son véritable sens. Les Cinquièmes 3 pensent qu'elle devrait être reformulée de façon à être plus précise (laquelle table ?) »

Ces interrogations vont permettre de donner un statut moins artificiel aux définitions données en cours de mathématique.

3.2.6. Clôture du problème

Au bout de deux mois, il est alors essentiel de clôturer le problème. Les élèves et leurs enseignants ont besoin de faire le point sur ce qui a été démontré, sur les nouvelles connaissances rencontrées, sur les questions qui restent encore en suspens.

Les enseignants doivent sentir qu'ils n'ont pas « perdu leur temps » par rapport au programme, et que les élèves ont acquis des connaissances qu'ils pourront réinvestir.

Le chercheur propose donc un texte **(Annexe 3)** que chaque enseignant va utiliser à sa guise en prenant ce qui correspond au travail de sa classe.

3.3. Synthèse des notions mathématiques abordées

3.3.1. Importance du nombre 1

Lors de la première séance les avis concernant la possibilité de réussir à obtenir la valeur 1, étaient divers, certains pensaient que l'on ne pouvait réaliser que des multiples de 9 ou de 11. Au fil des débats l'importance de ce nombre qui parfois ne paraît servir à rien en mathématique est apparue.

Un groupe d'élèves de la Quatrième 3 de Saint-Gély lors de la séance de réponses aux questions nous dit qu'il peut faire tous les nombres entiers :

> *« Pour faire 1 on donne 5 pièces de 9 et on nous rend 4 pièces de 11.*
> *Pour faire le nombre que l'on veut trouver qu'on appelle n :*
> *On donne 5 pièces de 9 multiplié par le nombre n et on nous rend 4 pièces de 11 multiplié par le nombre n :*
> $9 \times 5\,n - 11 \times 4\,n = 45\,n - 44\,n$ *»*

3.3.2. Le choix de 9 et 11

Après la relance, le travail des différentes classes s'est axé sur la possibilité de changer les valeurs 9 et 11. Un travail ambitieux a alors démarré.

La Sixième11 du collège Pierre Moréto envoie ses remarques :

> *« Suite à vos derniers envois, nous nous sommes penchés sur la question :*
> *9 et 11 ont-ils été pris au hasard ? Nous pensons que non.*
> *Quels sont les couples de nombres pour lesquels le système monétaire serait possible ?*
> *Pour cela il suffit de réussir à obtenir 1.*
> *Ce qui fonctionne :*
> - *Tous ceux qui contiennent 1 : 1 et 2, 1 et 3, ….*
> - *Deux impairs avec 2 d'écart : 3 et 5 ; 5 et 7 ; …*
> - *Un impair et un pair à condition que le pair ne soit pas un multiple de l'impair : 2 et 5 ; 4 et 7 ; …*
>
> *Ce qui ne fonctionne pas :*
> - *Deux nombres pairs*
> - *Un impair et un pair avec le pair multiple de l'impair*
>
> *À étudier*
> - *Deux impairs avec un écart différent de 2. »*

3.3.3. La fréquentation de notions étudiées plus tard dans le cursus scolaire

Ces problèmes permettent une première fréquentation de concepts approfondis plus tard dans la scolarité. On peut penser que ces notions paraîtront alors beaucoup moins artificielles.

• *Rôle du PGCD de deux nombres*

La Quatrième 3 de Saint Gély propose :

> *« Si on changeait 9 et 11 par 5 et 10 :*
> *On ne peut payer que les multiples de 5, car tous les nombres finiront par 0 ou 5*
> *Si on changeait 9 et 11 par 8 et 12 :*
> *On trouve toujours un nombre pair.*
> *On ne trouve que les multiples de 4 »*

• *Nombres premiers entre eux, algorithme d'Euclide et égalité de Bézout*

Le lien pourra se faire alors entre l'importance du 1 dans ce problème et le 1 trouvé à la fin de l'algorithme d'Euclide lorsque les nombres sont premiers entre eux, ainsi que plus tard avec le 1 de l'égalité de Bézout.

3.3.4. Renforcement de certaines notions déjà rencontrées

• ***La parité***

Les classes ont souvent envisagé de travailler avec des nombres pairs ou impairs. La familiarité avec ces nombres leur a permis de trouver des conjectures assez raisonnables qui ont permis ensuite de généraliser encore plus le problème.

• ***Les multiples d'un nombre et leur écriture algébrique***

Les Quatrièmes ayant travaillé sur l'écriture algébrique d'un nombre pair et d'un nombre impair, ont trouvé assez rapidement l'écriture algébrique d'un multiple de 4 ou d'un multiple de 5 et ont pu ainsi valider leurs réponses à la relance.

• ***La distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction***

Ils ont réinvesti la factorisation pour prouver certaines de leurs conjectures.

4. Deux itinéraires spécifiques

4.1. Les préoccupations et les stratégies des Sixièmes et Cinquièmes

• ***Écrire les tables des deux nombres en face l'une de l'autre***

La Cinquième du collège Langevin Wallon a proposé :

« On peut faire 1 de plusieurs manières possibles :
Exemple : avec 13 et 8

$13 \times 1 = 13$	$8 \times 1 = 8$
$13 \times 2 = 26$	$8 \times 2 = 16$
$13 \times 3 = \mathbf{39}$	$8 \times 3 = 24$
$13 \times 4 = 52$	$8 \times 4 = 32$
$13 \times 5 = \mathbf{65}$	$8 \times 5 = \mathbf{40}$
$13 \times 6 = 78$	$8 \times 6 = 48$
$13 \times 7 = 91$	$8 \times 7 = 56$
$13 \times 8 = 104$	$8 \times 8 = \mathbf{64}$
$13 \times 9 = 117$	$8 \times 9 = 72$
$13 \times 10 = 130$	$8 \times 10 = 80$ »

• ***Minimiser le nombre de pièces***

La Sixième 11 s'est penchée sur ce problème annexe :

« Nous avons essayé de rendre le système monétaire avec des pièces de 9 et de 11 le plus efficace possible.
Nous avons cherché le nombre minimum de pièces nécessaires pour faire les entiers de 1 à 29.
En conclusion : le fait que ce système soit “ lourd ” est discutable. Le nombre de pièces est important pour des petites sommes mais il devient raisonnable pour des sommes plus importantes.
Si on le compare à un système composé uniquement de pièces de 1 et de 2 alors il devient assez vite plus “ rentable ”. »

• *Essai de généralisation du problème en prenant des nombres qui ne sont pas dans une même table*

La Cinquième B a fait une nouvelle proposition :

« Le groupe d'Emma a trouvé que si on prenait un nombre au hasard et que le deuxième nombre était choisi en faisant 2 fois le premier + 1, cela marchait à chaque fois. »

La Cinquième 3 a réfléchi également sur le sujet :

« Les élèves de la Cinquième 3 pensent que ça devrait être possible s'il y a un pair et un impair ou s'il y a 2 impairs que si l'un des deux nombres n'est pas dans la table de l'autre. Mais ils butent sur une explication globale et doutent même de ce choix. »

Ils se trouvent confrontés à des problèmes qu'ils n'arrivent pas à résoudre et ressentent le besoin de connaissances nouvelles.

• *Et si on ne rendait pas la monnaie*

La Sixième11, qui n'est pas à court d'idées propose une nouvelle piste :

« Nous avons travaillé sur un système de monnaie comprenant uniquement des pièces de 11 et de 9, mais sans rendre la monnaie. Partant du principe que toutes les sommes ne seraient pas possibles, nous avons cherché les sommes possibles. Notre surprise fut grande. À partir de 80 toutes les sommes sont possibles.
À partir d'un certain rang on obtient les sommes en ajoutant 9 ou 11 aux sommes précédentes.
Surprenant non ? »

4.2. les préoccupations et les stratégies des Quatrièmes

• *Nombres pairs et impairs*

Les deux classes de Quatrième ont travaillé sur les conjectures suivantes, conjectures qui avaient émergé lors des précédents débats :

o Si on multiplie deux nombres pairs le résultat sera toujours pair.
o Si on multiplie deux nombres impairs le résultat sera toujours impair.
o Si on prend deux nombres consécutifs on peut faire 1.
o Si on prend deux nombres impairs consécutifs on peut faire 1.

• *Essai de généraliser grâce à l'algèbre*

En essayant de démontrer certaines de leurs conjectures, les Quatrièmes 3 ont été amenés à calculer $(2 \times n) \times (2 \times m)$ et $(2n + 1) \times (2m + 1)$.

Pour chaque expression plusieurs conjectures ont été proposées. Lors d'une séance de débat certaines conjectures ont été invalidées par des contre-exemples. Enfin la preuve quant au premier résultat a été apportée grâce à la commutativité de la multiplication.

4.3. Commentaires

Ce problème est l'occasion d'introduire de façon naturelle de nouveaux concepts qui permettront de valider certaines conjectures. Le travail en Sixième et Cinquième, plus spontané, a permis d'explorer un grand nombre de notions.

En Quatrième, le choix de l'enseignant a été de privilégier l'utilisation des règles algébriques pour justifier les conjectures envisagées. Le travail sur la seconde expression citée précédemment a amené assez naturellement l'institutionnalisation de la **double distributivité en Quatrième**. La **factorisation** déjà rencontrée en **Cinquième**, est réinvestie pour apporter notamment la preuve que si les deux nombres sont dans une même table alors on ne pourra pas trouver 1.

5.Conclusion

Les professeurs participant à cette expérience découvrent que le rôle de l'adulte, lors d'une activité de recherche de la classe, est bien spécifique. Nous donnons à ce propos la parole à l'un d'entre eux qui propose la définition suivante :
« Coordonnateur “ candide ” et “ grand séquenceur ” allant de groupes en groupes pour mettre en confiance les uns et interpeller les autres. Bref, animer sans (trop) dévoiler mais surtout en essayant de créer un autre état d'esprit (celui plus scientifique du chercheur) dans la pratique des mathématiques. »

Quant à l'élève, il prend conscience que la validation ou l'infirmation ne provient plus de l'enseignant mais des pairs.

De plus ce travail réussit à valoriser certains élèves en difficulté d'habitude. C'est le cas de Virginie en échec scolaire depuis la Sixième qui a exhibé, avec fierté, un contre-exemple concernant la proposition de l'un de ses camarades de Quatrième : $(2 \times n) \times (2 \times m) = 2 \times n \times m$.

Ils peuvent découvrir qu'émettre des conjectures n'est pas si « risqué » et que l'essentiel est d'être capable d'avoir un regard critique sur son travail de « chercheur ».

Les élèves ayant vécu de telles situations sont beaucoup plus actifs lors des moments de débat scientifique instaurés tout au long de l'année car le fait d'émettre une conjecture, de l'infirmer ou de la valider devient naturel.

En conclusion, nous remercions tous les élèves qui ont participé à cette expérience et leurs enseignants pour la richesse du travail effectué, travail qui a souvent débordé du cadre du programme. Cela nous montre que les capacités de nos élèves sont souvent mésestimées. Nous ne savons jamais à l'avance dans quelles directions vont nous conduire les élèves, mais c'est toujours un plaisir de voir leurs capacités à réfléchir, anticiper et conduire une véritable activité scientifique.

Annexe 1

Exemples d'énoncés

Énoncés des problèmes donnés dans le cadre du Sfodem

Problème du berger :

Un berger souhaite construire un enclos pour ses moutons au milieu d'une vaste plaine herbeuse. Pour cela, il a à sa disposition : 10 piquets et une certaine longueur de fil de fer (environ 30 m).
Comment doit-il s'y prendre pour que ses moutons aient le plus d'espace possible dans leur enclos ? Doit-il utiliser tout son fil de fer ? Tous ses piquets ? Comment doit-il les disposer ?

La roulette hollandaise :

Des billes sont réparties en plusieurs tas. À chaque coup, on prélève une bille dans chaque tas, puis on forme un nouveau tas avec les billes prélevées.
Que se passe-t-il à la longue ? Combien de coups sont-ils nécessaires avant de retomber sur une configuration déjà obtenue ?

Les gardiens de musée :

On s'intéresse à la surveillance d'une salle de musée, dont les murs sont rectilignes : on y place des gardiens qui sont assis sur des chaises. Ces chaises sont fixées au sol (les gardiens ne peuvent donc pas se déplacer dans la salle), mais elles sont pivotantes (les gardiens peuvent donc voir dans toutes les directions à partir de leur position).
Quel est le nombre minimum de gardiens dont il faut disposer pour surveiller toute la salle, et où faut-il les placer ?

Les carrelages :

On veut carreler une forme rectangulaire de largeur m et de longueur n (multiples entiers d'une même unité de longueur) avec des carreaux blancs et identiques de largeur 1 et de longueur 2
Est-ce possible ?
Et si oui, de combien de manières différentes peut-on le faire ?

Le quadrillage :

Sur un quadrillage donné, combien peut-on dessiner de triangles qui ont comme sommets les nœuds du quadrillage ?

- D'autres énoncés peuvent être trouvés sur le site de Math en jeans à l'adresse suivante :

http://www.mathenjeans.free.fr

- Une mine d'énoncés de problèmes un peu moins « ouverts », mais tout aussi intéressants pour mettre les élèves en situation de recherche est aussi disponible dans deux brochures éditées par l'APMEP :
  Pour un enseignement problématisé des Mathématiques au lycée, Groupe Problématiques au lycée. Brochures APMEP n^os^ 150 et 154.
  Les Narrations de Recherche de l'école primaire au lycée, par Freddy Bonafé, Arlette Chevalier, Marie-Claire Combes, Alain Deville, Liliane Dray, Jean-Pierre Robert, Mireille Sauter. Brochure APMEP n° 151.

Annexe 2

Problème des monnaies : relance (13-12-2003)

• Ce qui a été fait.

Le problème : il s'agit donc de déterminer toutes les sommes possibles si on est autorisé à rendre la monnaie. Beaucoup d'entre vous ont trouvé que dans ce problème **n'importe quelle somme peut être réalisée**.

Des questions. Vous avez posé de nombreuses questions. Observez que certaines d'entre elles, mêmes si elles pourraient être importantes d'un point de vue pratique, n'ont aucune influence sur le problème mathématique. Par exemple : s'agit-il de francs ou d'euros ? Ou encore : peut-on utiliser des billets au lieu des pièces ? Quelle que soit la réponse, le problème mathématique restera exactement le même ! Ou encore : s'agit-il d'euros ou de centimes d'euros ? Il est évident que s'il s'agit de 9 et 11 euros, on ne pourra jamais obtenir des centimes, et donc la question est forcément de savoir quelles sommes en euros on peut obtenir. S'il s'agit de centimes d'euros, la question est de savoir quelles sommes en centimes d'euros on peut obtenir, et le problème est exactement le même ! Pouvez-vous trouver d'autres questions posées qui sont de la même nature ?
D'autres questions pourraient avoir un intérêt mathématique, mais posées ainsi elles sont trop vagues pour pouvoir être traitées mathématiquement. Par exemple : un tel système serait-il pratique ? Observez que ce sont des questions d'un type différent des précédentes. Pouvez-vous trouver d'autres questions posées qui sont de la même nature, c'est-à-dire qui ne sont pas du domaine des mathématiques (quel que soit leur intérêt) ?

• Ce que vous pourriez faire.

Certains d'entre vous ont eu l'idée de prendre d'autres nombres que 9 et 11. Voilà une idée intéressante. Qu'est-ce qui change si on prend 5 et 10 (au lieu de 9 et 11) ? Ou bien si l'on prend 8 et 12 ? Ou bien 13 et 15 ?
Pouvez-vous donner un résultat général : comment choisir deux nombres pour pouvoir payer toutes les sommes possibles ?

Annexe 3

Problème de la monnaie : Bilan final

Voici la clôture du problème de la monnaie. Vous y trouverez un bilan global sur l'ensemble de vos recherches, des réponses à certaines questions que vous vous êtes posées, et des prolongements possibles.

1. Le problème

Depuis la première relance, le problème s'est stabilisé : il n'y a plus trop de références aux euros ou aux centimes d'euros, à savoir si on pourrait utiliser des billets, ou aux différents pays qui participeraient à l'opération, etc. Vous cherchez un problème plus abstrait, plus mathématique, que celui posé au départ. Cela n'empêche pas d'être amené à se poser des questions inspirées par le contexte concret de l'énoncé initial – et c'est très bien comme ça –. Par exemple : ce système va être lourd, beaucoup de pièces seront nécessaires, peut-on avoir une idée du nombre minimum de pièces nécessaires pour réaliser telle ou telle somme ?

2. Les résultats

Vous avez tous observé qu'il y a des cas où on peut faire toutes les sommes (en rendant la monnaie), par exemple avec 9 et 11, et qu'il y a aussi des cas où on ne peut pas faire toutes les sommes, par exemple avec 6 et 9.

Comment prouver qu'on peut réaliser toutes les sommes ?

Vous avez eu la très bonne idée de remarquer que si on peut faire 1, alors on peut tout faire. Cela vient du fait que 1 « engendre » tous les nombres par l'addition.

Sur un exemple concret il est alors possible de montrer explicitement que l'on peut faire 1. Par exemple avec 9 et 11, on a

$$1 = 5 \times 9 - 4 \times 11,$$

c'est-à-dire que nous donnons 5 pièces de 9 et qu'on nous rend 4 pièces de 11. Remarquez d'ailleurs que cela prouve du même coup qu'on peut réaliser 1 avec 5 et 11, ou encore avec 5 et 4, ou encore avec 9 et 4 !

Il reste des questions : y a-t-il plusieurs solutions possibles ? Y a-t-il une formule pratique pour réaliser 1 si on donne deux nombres différents de 9 et 11 ? Y a-t-il une manière de faire 1 qui demande le moins de pièces possibles, et si oui laquelle et avec combien de pièces ?

Une fois qu'on a fait 1, on sait faire les autres sommes en multipliant le nombre de pièces utilisées, par exemple

$$10 = 50 \times 9 - 40 \times 11.$$

Mais quand on a fait 10 comme cela, ce n'est pas très économique ! Cela nous demande 50 + 40 = 90 pièces, or on peut aussi dire que 10 c'est 11 moins 1, et que 11 est un pièce et qu'on sait faire 1 avec 5 + 4 = 9 pièces.

Cela nous amène aux mêmes questions que pour faire 1 : y a-t-il une manière de faire une somme quelconque qui demande le moins de pièces possibles, et si oui laquelle ?

Comment prouver qu'on ne peut pas réaliser toutes les sommes ?

La question semble plus difficile, parce que nous ne pourrons jamais faire toutes les combinaisons possibles de 9 et de 11 – il y en a une infinité ! –. Il nous faut donc trouver un raisonnement qui nous permette de conclure … et vous l'avez bien trouvé : dans votre langage, vous dites « *si les deux nombres sont dans la même table, alors on ne pourra pas tout réaliser* ». Par exemple, 6 et 9 sont tous les deux dans la table de 3 ; et toutes les combinaisons possibles de 6 et de 9 seront elles-mêmes toujours dans la table de 3.

Que signifie « être dans la même table » ? Naturellement, si on prend cela au sens strict, alors tous les nombres sont dans la table … de 1 ! On a donc envie de dire : si les deux nombres sont dans une même table autre que la table de 1, alors on ne peut pas réaliser toutes les sommes. En effet : si les nombres sont « dans la même table », cela signifie qu'ils apparaissent tous les deux dans la table de multiplication d'un même nombre, autrement dit qu'ils sont tous les deux multiples de ce nombre. Ce qui se dit encore : ils ont un diviseur commun (autre que 1). Mais dans ce cas, comme vous l'avez bien remarqué pour beaucoup d'entre vous, cela implique que toutes les sommes seront elles-mêmes divisibles par ce même nombre.

Quels sont les nombres qui permettent de réaliser toutes les sommes ?

Vous avez essayé de donner des conditions pour dire « si les deux nombres vérifient ceci ou cela, alors on peut réaliser toutes les sommes ». Par exemple :

- Des nombres successifs, par ex, 20 et 21 : dans ce cas il est clair qu'on obtient tout de suite 1 en soustrayant le plus petit du plus grand.
- Deux nombres impairs successifs, c'est à dire à une distance de 2, par exemple 13 et 15 : dans ce cas on obtient tout de suite 2, et en prenant un des deux nombres impairs et en enlevant suffisamment de fois 2, on tombe sur 1.
- Si on prend deux pairs, ça ne marche pas car les sommes seront toujours des nombres pairs.
- Un pair et un impair : parfois ça marche, par exemple 10 et 11, mais parfois non, par exemple 10 et 15 (ils sont dans la table de 5).
- De même, un impair et un pair qui n'est pas multiple de l'impair ne marche pas toujours (10 et 15).
- Un nombre n et l'autre $2n + 1$, par exemple 5 et $11 = 2 \times 5 + 1$

Certains d'entre vous ont eu l'idée (correcte) que la bonne condition, c'est-à-dire la condition la plus générale, est de demander aux nombres de ne pas être dans la même table…

Si les nombres ne sont pas « dans la même table » ?

Cela signifie qu'il n'existe pas un autre nombre dans la table duquel ils apparaissent, autrement dit qu'ils ne sont pas multiples d'un même nombre. Ce qui se dit encore : ils n'ont pas de diviseur commun. Sauf qu'il existe un nombre qui divise toujours, c'est 1. Mais comme il divise toujours, il n'est pas très intéressant pour la multiplication ou la division. On dira alors : **les deux nombres n'ont pas de diviseur commun autre que 1**, ou encore que les deux nombres sont **premiers entre eux**. Dans ce cas, on peut montrer qu'il est effectivement possible de construire le nombre 1, mais c'est plus difficile : c'est le **théorème de Bézout**.

Comment trouver toutes les solutions ?

Sur notre exemple : on sait que

$$1 = 5 \times 9 - 4 \times 11$$

mais on a aussi

$$1 = 16 \times 9 - 13 \times 11$$

ou encore

$$1 = -6 \times 9 + 5 \times 11$$

La première solution est meilleure que les deux autres, puisqu'elle nous fait utiliser $5 + 4 = 9$ pièces, au lieu de $16 + 13 = 29$ ou $8 + 5 = 13$ pièces. Peut-on faire mieux ? On sent bien que non … mais comment le dire ?

De manière générale, le théorème de Bézout nous dit que si deux nombres, a et b, ne sont pas dans la même table, alors il existe deux autres entiers u et v tels que

$$au + bv = 1.$$

En existe-t-il d'autres ? Beaucoup d'autres ? Il est facile de voir que oui : si u et v conviennent, alors $u + b$ et $v - a$ conviennent aussi, puisqu'alors :

$$a(u + b) + b(v - a) = au + ab + bv - ba = (au + bv) + (ab - ba) = 1 - 0 = 1.$$

De même, $u + 2b$ et $v - 2a$ conviennent, ainsi que $u + 3b$ et $v - 3a$, $u + 4b$ et $v - 4a$, etc. de même que $u - b$ et $v + a$, $u - 2b$ et $v + 2a$, etc.

Il y a donc une infinité de solutions u et v ! On peut montrer que ce sont là toutes les solutions, qu'il n'y en a pas d'autres.

Quelle est la solution la plus économique ?

Pour l'instant, on cherche la solution la plus économique pour faire 1.

Pour faire 1 avec des pièces de valeur a et de valeur b, il faut faire $1 = au + bv$. Sauf si $a = 1$ ou $b = 1$, ce qu'on exclut, il faut donner des pièces et en rendre. Autrement dit, u et v ne sont pas tous les deux positifs…

Essayons d'abord de voir ce qui se passe si on donne des pièces de valeur a et si on rend des pièces de valeur b. On peut montrer que, parmi toutes ces solutions, il y en a une et une seule qui vérifie

$$0 < u < b \text{ et } -a < v < 0$$

(on donne u pièces de monnaie de la valeur a, et on rend v pièces de valeur b).

Dans ce cas, le nombre de pièces échangées est $u - v$, qui est donc inférieur ou égal à $a + b - 2$.

Dans notre problème initial, on a vu que 9 pièces suffisaient. On a effectivement :

$$9 < 9 + 11 - 2 = 18.$$

Pouvez-vous trouver un exemple où il faut a + b - 2 pièces pour faire 1 ? Et que peut-on dire sur la manière la plus économique de faire une autre somme que 1 ?

Et si on ne rend plus la monnaie ?

Voici une variante du problème que vous avez étudié : maintenant on ne s'autorise plus à rendre la monnaie. Toujours avec 9 et 11, on peut donc faire certaines sommes, mais évidemment pas toutes : on peut faire 9, 11, 18 = 9 + 9, 20 = 9 + 11, etc, mais on ne peut pas faire 1, 2, 3, …, 8, 10, 12, etc.

Cependant, si on fait la liste par ordre croissant de toutes les sommes possibles par cette méthode, on voit quelque chose de surprenant. Dans le groupe 3, la classe de Sixième 11 du collège de Thuir a ainsi remarqué qu'on ne peut pas obtenir 79, mais qu'à partir de 80 toutes les sommes sont possibles !

Est-ce un hasard ? Pouvait-on le prévoir à l'avance ? Aurait-on le même phénomène en prenant d'autres nombres que 9 et 11, par exemple 11 et 13, ou 5 et 6, ou autre chose encore ? Voici un prolongement possible, et fort intéressant, à votre recherche !