L'activité menée par Guillaume Lambert dans sa classe de Troisième du Collège de Volgelsheim (68) mérite attention. Elle tente de remettre en cause une idée erronée, fortement ancrée dans les esprits : le volume d'un objet double quand on double ses dimensions ! De façon plus générale, comme Jean Fromentin le signalait au dernier séminaire de l'APMEP, un nombre considérable d'élèves (et d'adultes) pensent que le volume d'un solide *est proportionnel à ses dimensions*(*).
Guillaume Lambert choisit, pour mieux les convaincre de leur erreur, une *méthode expérimentale*. Il fait peser la masse d'eau contenue dans des demi-sphères. L'esprit de la « Main à la Pâte » n'est pas loin. Cette méthode de pesée s'applique aussi à l'approximation d'aires pour lesquelles on ne connaît pas de formule ou de méthode de calcul.
Il prolonge l'activité par le tracé du volume en fonction du rayon : les élèves prennent alors conscience que la droite n'est pas la seule « courbe » possible ! La difficulté d'utilisation du tableur est soulignée (c'est la délicate notion de variable qui est en cause).
L'activité complémentaire consiste (problème important pour la physique) à apprécier et à représenter l'erreur sur le volume d'une sphère résultant d'une erreur de mesure affectant son rayon.
Dans les deux tracés le choix des unités sur les axes (s'il n'est pas automatique) est une redoutable difficulté : l'absence de tout tracé sanctionne un choix naïf (un repère orthonormé par exemple).
Peut-être Guillaume aurait-il pu faire réfléchir les élèves à la « dimension » d'un volume (produit de 3 longueurs). L'idée de comparer le volume au cube du rayon aurait alors pu naître dans les esprits les plus agiles…

Gérard Kuntz

Volume d'une sphère

Guillaume Lambert

Première séance

L'objectif de l'activité

Déterminer le volume de sphères (outils mathématiques : proportionnalité, expression littérale). Établir une expression littérale permettant de déterminer le volume d'une sphère en fonction de son rayon.

Les moyens

L'achat des sphères en plastique s'effectue dans un magasin de bricolage (6 sphères soit 12 demi-sphères reviennent à 10 Euros environ).
La classe se trouve dans une salle de sciences physiques où chaque paillasse est dotée d'un évier.
Pour les mesures, on utilise le matériel de pesée des collègues de sciences physiques.

(*) NDLR. Les programmes de Collège insistent, depuis 1985 au moins, sur le fait que si, pour un objet, les longueurs sont multipliées par k, les aires le sont par k^2 et les volumes par k^3.

Activité

L'idée est de faire mesurer par les élèves la masse de sphères aux volumes différents : les premières mesures correspondent aux masses des sphères vides, les deuxièmes correspondent aux masses des sphères remplies d'eau. Dans la pratique, les élèves utilisent des demi-sphères et déduisent les masses pour les sphères en multipliant par 2. Cette déduction n'est pas explicite sur le document de travail remis et la trouver par soi-même fut source de joie pour beaucoup. Dans l'enthousiasme de cette découverte qui me semble, malgré tout, élémentaire, un élève a affirmé : « Je suis trop fort, je vais faire H.E.C. ». Cette anecdote me confirme que ce qui « nourrit » la personne, ce n'est pas la grandeur des choses qui lui sont montrées mais ce qu'elle découvre par elle-même.
Puis, on leur fait calculer la masse de l'eau dans chaque sphère (en grammes) et l'on déduit immédiatement le volume de la sphère (en cm^3) puisque 1g d'eau correspond à $1cm^3$. Cette affirmation fut un réel obstacle pour tous les élèves malgré les travaux similaires de sciences physiques. Il a fallu refaire des tableaux de conversions … pour en convaincre les élèves.
Pour la suite, il s'agissait de mesurer le rayon de chaque sphère. Plusieurs méthodes sont utilisées, par exemple celle de tracer un cercle en faisant un contour de la demi-sphère, déterminer le centre par la médiatrice de deux cordes et mesurer le rayon.
Enfin, il s'agissait de constater que le volume d'une sphère n'est pas proportionnel à son rayon, mais est proportionnel à R^3.

On détermine la constante $K = \dfrac{\text{volume}}{R^3}$. On compare K avec $\dfrac{4\pi}{3}$. On déduit que :

$$\text{volume} = \frac{4\pi}{3} \times R^3.$$

Ce que j'ai pu constater durant ces travaux pratiques et les conclusions que j'en tire

En maniant les sphères, en les remplissant d'eau, en notant leurs propres résultats, les élèves sont beaucoup plus acteurs et, de fait, beaucoup plus intéressés et motivés par ce qu'ils font.
Ordinairement, la classe est plutôt passive, dans le sens où elle est à l'écoute, mais ne questionne guère et ne répond que timidement (les mots sortent du bout des lèvres).
Au cours de ces travaux pratiques, les questions sont beaucoup plus nombreuses, plus directes et faites à voix haute et distincte : « Monsieur, comment passe-t-on d'une masse d'eau à un volume ? », « Comment mesurer le rayon ? », etc.
Les commentaires sont plus spontanés entre les élèves : ils échangent sur leur méthode de travail ; ce qui crée une sorte de stimulation-émulation. L'ambiance est plus conviviale, mais elle reste studieuse.
Cependant, le volume sonore de ce type d'activité se rapproche plus de celui d'un hall de gare, d'une salle de café ou d'une place de marché que d'une salle de conférence. Après vérification, le bruit de nos conversations n'est toutefois pas

suffisant pour déranger les classes voisines ; les élèves de ma classe sont ravis ! Pour moi qui aime le calme, il me reste le silence de la nature pour écouter les mouches voler…
Pour la suite de cette activité, la mesure du rayon mérite de s'y arrêter : le problème de savoir où se situait le centre de la sphère s'est posé naturellement. Également, est-ce que l'épaisseur en plastique de la sphère était importante dans la considération du volume ? Pour cette dernière question, il a été suggéré la possibilité de faire une approximation de l'erreur, ce qui permet de réinvestir immédiatement la formule établie.

Document pédagogique

Objectifs :

1. Déterminer le volume de sphères (utilisation de grandeurs proportionnelles).
2. Établir une expression littérale permettant de déterminer le volume d'une sphère en fonction de son rayon.

Matériel nécessaire pour la manipulation :

• Sphères de volumes différents. Elles sont nommées par ordre croissant de volumes A, B, C, D et E.
• Une boîte cubique de 1 décimètre d'arête.
• Une règle graduée.
• Une balance.
• Un point d'eau.

Déterminer le volume des sphères.

• Mesurer la masse de chacune des sphères vides.
• Mesurer la masse de chacune des sphères remplies d'eau.
• Calculer la masse d'eau contenue dans chacune des sphères.
• Déterminer la masse d'eau contenue dans la boîte cubique de 1 dm d'arête.
La masse d'eau contenue dans la boîte cubique de 1 dm d'arête est de grammes.
• Sachant que les masses d'eau contenues dans les sphères et leur volume sont deux grandeurs proportionnelles, déterminer le volume de chaque sphère.

Sphère	A	B	C	D	E
Masse de la sphère vide en grammes.					
Masse de la sphère pleine en grammes.					
Masse de l'eau dans la sphère en grammes.					
Volume de la sphère en cm^3.					

• Mesurer le rayon de chaque sphère.
• Montrer que le volume d'une sphère n'est pas proportionnel à son rayon.
• Calculer R^3 (« Rayon au cube ») pour chaque sphère.
• Montrer que le volume d'une sphère est proportionnel à R^3.

Sphère	A	B	C	D	E
Volume de la sphère en cm^3.					
Rayon de la sphère en centimètres.					
Rayon au cube en cm^3.					

• Déterminer une valeur approchée de la constante $K = \dfrac{4\pi}{3}$.

• Comparer K et le quotient $\dfrac{\text{volume}}{R^3}$.

• Établir une expression littérale permettant de déterminer le volume d'une sphère en fonction de son rayon.

Deuxième séance

Objectif

Tracer le graphe d'une fonction non linéaire définie par $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Matériel

La séance s'est déroulée en salle multimédia avec 15 postes pour la classe. Autant dire que pour certains, c'est une aubaine car il peuvent observer un camarade en train de travailler pendant toute la séance ou presque. Je crois que cette méditation peut être fructueuse … à long terme !

Il est à noter que les 15 postes ne sont pas tous opérationnels : l'un ne permet pas d'imprimer un document, l'autre n'a plus le logiciel Géoplan installé, etc. Plus contrariant, le réseau ne fonctionnant pas tous les jours, il faut prévoir une disquette et une vingtaine de minutes avant la séance pour enregistrer le document de travail sur chaque poste. Tel est l'équipement d'un Collège de base !

Déroulement de la séance

Première étape : Effectuer un grand nombre de calculs grâce à un tableur.
Vérifier la croissance du volume avec celle du rayon.
Donner une allure du graphe de la fonction.

Deuxième étape : Tracer le graphe de la fonction à l'aide du logiciel Géoplan.

Le choix de deux logiciels a pour objectif d'aider les élèves à décomposer les étapes de construction du tracé d'une fonction. À l'issue de chacune d'elles, ils impriment leurs résultats.

Obstacles rencontrés :

<u>Première étape :</u>
– Les élèves ont été confrontés au problème de la notation. Ils ont vu en cours la notation f ou g pour une fonction et x pour une variable. Pour surmonter cette difficulté, il a été proposé de tracer la fonction f définie par $f(x)=\frac{4}{3}\pi x^3$.

– Il y en a beaucoup qui confondent *la relation* $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ et *la fonction* V qui à R associe $\frac{4}{3}\pi R^3$.
– Il a aussi fallu préciser qu'il était possible de remplacer π par une valeur approchée. Un moyen mnémotechnique pour retenir une valeur approchée de π est de compter les lettres de chaque mot de la phrase suivante : « Que j'aime à faire connaître un nombre utile aux sages ».
– Malgré l'apprentissage de l'usage des tableurs, en cours de technologie, peu d'élèves (voire aucun) ont effectué un calcul sans explication. Certains faisaient les calculs avec une calculatrice puis retranscrivaient les résultats sur le tableau proposé. La simple notion que les cases sont repérées par un numéro de ligne et de colonne était étrange ou incompréhensible pour la plupart. Utiliser le nom de cette case (ou cellule) pour exécuter des calculs fut laborieux.
– Le format du nombre a également posé problème. Il arrivait d'obtenir plusieurs fois le même volume pour des rayons distincts, le format du nombre étant de deux chiffres significatifs. Pour simplifier la tâche par l'obtention de valeurs numériques entières, il a été proposé de tracer la fonction g définie par $g(x) = 4x^3$.

<u>Deuxième étape :</u>
– L'utilisation de Géoplan pour placer les points de coordonnées $(x\,;f(x))$ puis pour tracer le graphe de la fonction n'a posé aucune difficulté.

Travail complémentaire

Pour les élèves qui terminent avant la fin de la séance : il leur a été proposé de tracer le graphe de la fonction h définie par $h(x)=4\pi\cdot 10^2x+4\pi\cdot 10x^2+\frac{4}{3}\pi\cdot x^3$.

La fonction donne une approximation de l'erreur du volume d'une sphère de 10 cm de rayon pour une erreur de x cm sur la mesure du rayon.

Explication de la fonction *h*

L'expression donnant le volume d'une sphère de rayon 10 cm est : $\frac{4}{3}\pi \cdot 10^3$.

Développer l'expression donnant le volume d'une sphère de rayon (10 + x) cm :

$\frac{4}{3}\pi \cdot (10+x)^3 =$

Simplifier l'expression suivante : $\frac{4}{3}\pi \cdot (10+x)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 =$

À quoi correspond-t-elle ?

Conclusion

Les élèves ont imprimé un tableau de valeurs et le tracé obtenu.
Ils se sont rendus à l'évidence que toutes les fonctions n'étaient pas représentées par des droites.
L'utilisation d'un tableur pour les calculs des coordonnées des points du graphe de la fonction fut la partie difficile pour les élèves.
Très peu d'élèves ont commencé le travail complémentaire et aucun ne l'a terminé pendant la séance.

Ce qui m'a surpris, c'est que de très bon élèves sur « papier crayon », rencontraient des difficultés suffisamment sérieuses pour bloquer leur production et, du coup, masquer leurs compétences. D'autres, au contraire, ont révélé des capacités qu'ils n'exploitaient pas lors d'activités sans l'outil informatique. Je prendrais pour exemple une des élèves les plus en difficulté de la classe qui a réalisé le tracé et une partie du travail complémentaire avec très peu d'explications.