Des problèmes vraiment concrets(*)

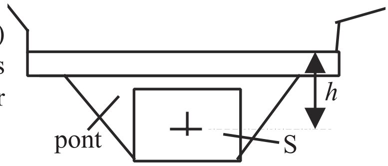
Christophe Pétre

Problèmes pour le lycée

Problème n° 6 (suite niveau lycée)(1)

(Thème : fonctions et résolution approchée d'équations ; classes de lycées, dont BTS).

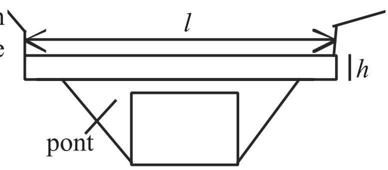
4) On peut exprimer le débit d'eau Q_p (en m^3/s) traversant un « pertuis » (le passage, sous pression, sous une arche de pont par exemple) par la formule suivante :



$$Q_p = 0{,}70\,S\sqrt{2gh}$$

avec S l'aire du « pertuis » (en m^2),
g l'accélération de la pesanteur (≈ 9,8 SI),
h la hauteur (en m) entre le centre de gravité de la surface du « pertuis » et la surface libre de l'eau.

On peut exprimer le débit d'eau Q_d (en m^3/s) traversant un « déversoir » (débit d'un écoulement à surface libre, par dessus une route par exemple) par la formule suivante :



$$Q_d = 0{,}30\,\ell\,h\sqrt{2gh}$$

avec g l'accélération de la pesanteur (≈ 9,8 SI),
ℓ la largeur du « déversoir » ou de la surface libre (en m),
h la hauteur (en m) entre le haut du déversoir et la surface libre de l'eau.

Si un pont est submergé par un cours d'eau, le débit total le traversant est $Q_p + Q_d$.

Calculer la hauteur maximale (approchée au cm) de l'eau au dessus de la route au pont de la Terrasse, avec le débit maximum du Ramel calculé à la question précédente (cf. Bulletin 453, p. 545-547).

Corrigé : Le débit Q au niveau du pont de la Terrasse peut devenir égal au débit de pluie tombant, soit $0{,}112 \times 26{,}5 \times 10^6 : (6 \times 60) \approx 825$ m^3/s.

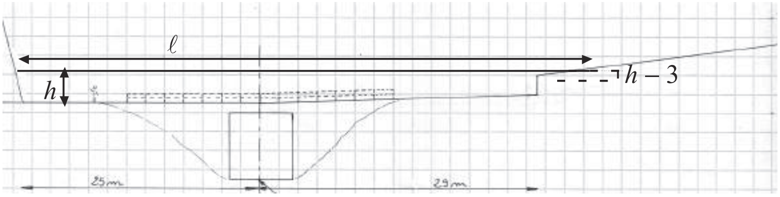
Soit h la hauteur (en m) atteinte au maximum par l'eau au dessus du niveau du pont. On peut vérifier que $3 \leq h \leq 12$.

(*) Suite de l'article paru dans le n° 453, p. 539-547.
(1) Problème réalisé grâce à la collaboration du Service d'annonces de crues de la Direction Départementale de l'Équipement de la Haute Loire, que je remercie.

Dans ces conditions,

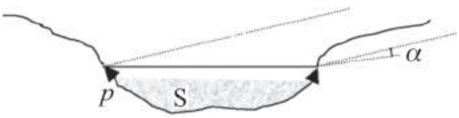
$$Q = Q_p + Q_d = 0{,}30(54 + 0{,}25h + 7{,}5(h-3))h\sqrt{2\times 9{,}8h}$$
$$+6{,}5\times 7\times 0{,}7\times\sqrt{2\times 9{,}8\times(4{,}5+h)}.$$

La résolution de l'équation Q = 825 donne la racine utile $h \approx 3{,}22$ m.
La hauteur h maximale atteinte par l'eau au dessus du pont est d'environ 3,22 m.



lit du Ramel

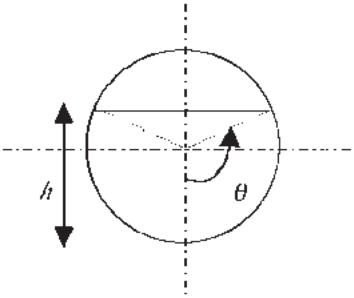
Prolongements :
Il serait intéressant de faire un tel calcul pour un fleuve important au voisinage d'une ville.
Dans le cas d'un écoulement à surface libre à travers une section sans obstacle, on peut exprimer le débit d'eau Q (en m^3/s) par la formule suivante :



$$Q = S\times\left(\frac{S}{p}\right)^{\frac{2}{3}}\times k\times\sqrt{\tan\alpha}$$

avec S l'aire de la surface mouillée (en m^2),
p le périmètre mouillé (en m) (c'est-à-dire la longueur de la ligne de contact eau/sol),
k un coefficient fonction de la rugosité du sol ($k \approx 15$ à 20 pour un ruisseau aux bords accidentés),
tan α la pente du cours d'eau par rapport à l'horizontale.

Cas particulier :
On peut aussi étudier les variations du débit d'eau s'écoulant dans une « buse » d'évacuation d'eaux pluviales, cylindrique de révolution de rayon R, en fonction de la hauteur d'eau :



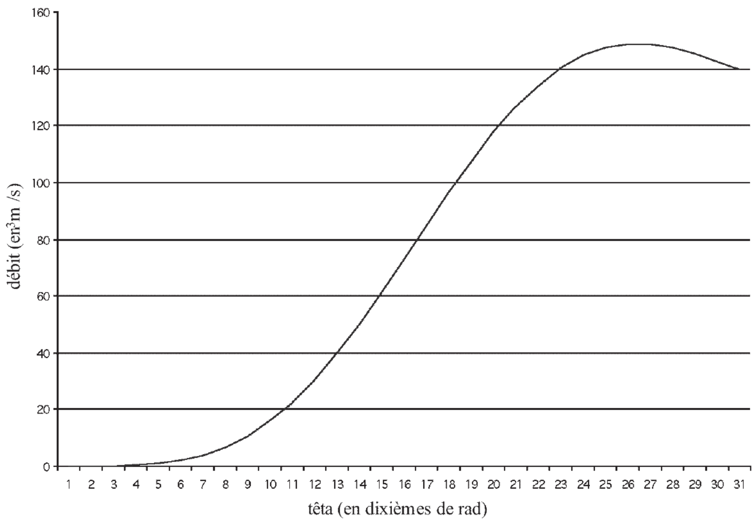
$$Q = S\times\left(\frac{S}{p}\right)^{\frac{2}{3}}\times k\times\sqrt{\tan\alpha}$$

avec :
$k = 70$ pour une buse d'évacuation d'eau pluviale en béton,
$h = R - R\cos\theta$,
p = périmètre mouillé = $2\,\theta R$
S = aire de la surface mouillée = … = $\theta R^2 - R^2\cos\theta\sin\theta$ (avec θ en radians).

D'où

$$Q = \ldots = R^{\frac{8}{3}} \times (2\theta)^{-\frac{2}{3}} \times (\theta - \cos\theta \sin\theta)^{\frac{5}{3}} \times 70 \times \sqrt{\tan\alpha}.$$

avec R = 1 m et tan $\alpha = 1$.



Problème n° 7 : Un problème de dépollution

(Thème : puissances ; classes de Seconde ; ainsi que limites, suites géométriques, équations différentielles, classes de Première et Terminales, BTS).

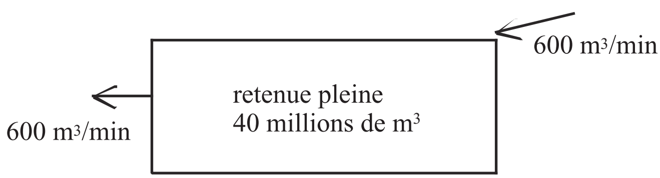
L'eau utilisée pour la production d'eau potable doit contenir moins de 0,000 005 g de pesticides par litre (Norme française en 2001). La retenue du barrage de Lavalette (près d'Yssingeaux) contient environ 40 millions de m^3 d'eau. Ce barrage est alimenté par le Lignon dont le débit est d'environ 600 m^3/min.

a) Si cette retenue venait à être polluée par 800 kg de pesticides, au bout de combien de temps pourrait-elle être à nouveau utilisée pour produire de l'eau potable (pour la ville de Saint-Étienne notamment) ?

Note : Pour simplifier, on considérera que la quantité de pesticide se mélange parfaitement et en permanence dans la totalité de l'eau de cette retenue.

b) Quand la masse de pesticides dans cette retenue redeviendrait-elle égale à 0 ?

c) Le fait de doubler le débit d'entrée (et de sortie) à 1200 m^3/min divise-t-il la durée de dépollution par deux ?



Corrigé : a) 0,000 005 × 40 × 10^6 × 1 000 = 200 000 g = 200 kg est la masse maximale de pesticides dans la retenue.
600 m^3/min = 36 000 m^3/h = 10 m^3/s.
$m(t)$: masse totale de pesticides dans la retenue, en fonction du temps t.

– *Solution approchée* : $m(0) = 800$.

Avec un calcul toutes les heures :

$$m(1) \approx m(0) - \frac{m(0)}{4\,000\,000} \times 36\,000 = m(0) \times 0{,}999\,1.$$

$$m(2) \approx m(1) - \frac{m(1)}{4\,000\,000} \times 36\,000 = m(1) \times 0{,}999\,1 = m(0) \times 0{,}999\,1^2.$$

(…)

$m(t) \approx m(0) \times 0{,}999\,1^t = 800 \times 0{,}999\,1^t (= 800\,\mathrm{e}^{t \ln 0{,}999\,1} = 800\,\mathrm{e}^{-0{,}000\,900\,405 t})$ (avec t en heures).
$m(t) = 200 \times t \approx 1$ 540 h = 64 j 4 h (par essais successifs avec la calculatrice, dès la classe de quatrième).
En fait, $t \approx 1$ 539,7 h = 92 382 min = 64 j 3 h 42 min.

Avec un calcul toutes les minutes :

$$m(1) \approx m(0) - \frac{m(0)}{4\,000\,000} \times 600 = m(0) \times 0{,}999\,985.$$

$$m(2) \approx m(1) - \frac{m(1)}{4\,000\,000} \times 600 = m(1) \times 0{,}999\,985 = m(0) \times 0{,}999\,985^2.$$

(…)

$m(t) \approx m(0) \times 0{,}999\,985^t = 800 \times 0{,}999\,985^t$
$(= 800\,\mathrm{e}^{t \ln 0{,}999\,985} = 800\,\mathrm{e}^{-0{,}000\,015\,000\,112\,5 t})$ (avec t en minutes).
$m(t) = 200 \times t \approx 92$ 419 min = 64 j 4 h 19 min (par essais successifs avec la calculatrice).

Avec un calcul toutes les secondes :

$$m(1) \approx m(0) - \frac{m(0)}{4\,000\,000} \times 10 = m(0) \times 0{,}999\,999\,75.$$

$$m(2) \approx m(1) - \frac{m(1)}{4\,000\,000} \times 10 = m(1) \times 0{,}999\,999\,75 = m(0) \times 0{,}999\,999\,75^2.$$

(…)

$m(t) \approx m(0) \times 0{,}999\,999\,75^t = 800 \times 0{,}999\,999\,75^t$
$(= 800\,\mathrm{e}^{t \ln 0{,}999\,999\,75} = 800\,\mathrm{e}^{-0{,}000\,000\,250\,t})$ (avec t en secondes).
$m(t) = 200 \times t \approx 5$ 545 177 s = 64 j 4 h 19 min 37 s (par essais successifs avec la calculatrice).

– *Solution exacte* : (avec un calcul toutes les minutes, t en min).

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -600 \times \frac{m}{40\times 10^6} \quad (\ldots) \quad m(t) = 800\,\mathrm{e}^{-0{,}000\,015t}.$$

$$m(t) = 200 \times t = -\frac{\ln 0{,}25}{1{,}5\times 10^{-5}} = 92\,419{,}62 \text{ min}$$

(soit une différence d'environ 0,001 1 % avec la solution approchée).

b) Jamais.

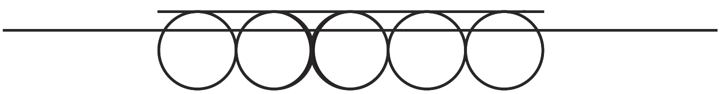
c) Cette question fait souvent douter. Les mathématiques montrent là toute leur force :

$m(t) = 200 \times t = -\dfrac{\ln 0{,}25}{3\times 10^{-5}} = 46\,209{,}81 \text{ min}$, soit exactement la moitié de la durée du a). Le calcul approché permet aussi d'obtenir ce résultat.

Problème n° 8 : Le risque de sombrer en mer

(Thème : loi binomiale ; classes de Terminale et BTS).

1) Pour réaliser des travaux en mer, vous avez conçu une plate-forme flottant grâce à 5 flotteurs en acier.
Le constructeur des flotteurs indique qu'en moyenne 2,8 % des flotteurs qu'il fabrique ont des soudures qui perdent leur étanchéité dans les deux ans après leur mise à l'eau.
De plus, ce constructeur indique que, comme les soudures des flotteurs qu'il va vous livrer seront faites par 5 soudeurs différents, avec des matériels de soudage différents, les soudures de vos 5 flotteurs devraient « lâcher » (si elles lâchent) indépendamment les unes des autres.
Vous avez conçu la plate-forme de sorte qu'elle puisse encore flotter avec 3 flotteurs étanches (mais pas 2). Pour l'équilibre, les flotteurs peuvent être déplacés assez facilement sous la plate-forme.



a) Quelle est la probabilité d'avoir 1 flotteur (sur les 5) qui perde son étanchéité dans les deux ans après sa mise à l'eau ?
b) Quelle est la probabilité d'avoir 2 flotteurs (sur les 5) qui perdent leur étanchéité dans les deux ans après leur mise à l'eau ?
c) Quelle est la probabilité de l'événement « La plate-forme ne coule pas dans les deux ans après sa mise à l'eau » ?

2) Reprendre le 1) si en moyenne 8 % (au lieu de 2,8 %) des flotteurs que le constructeur fournit ont des soudures qui ne sont plus étanches dans les deux ans après leur mise à l'eau.
(Ces derniers flotteurs sont de très mauvaise qualité).

Corrigé : Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de flotteurs qui vont perdre leur étanchéité dans les deux ans après leur mise à l'eau.
1) X suit la loi binomiale **B** (5 ; 0,028) car :
– il y a indépendance des survenues des fuites (les soudures ayant été faites par des matériels différents et le fait qu'un flotteur prenne l'eau n'accélère pas la détérioration d'un autre flotteur) ;
– un flotteur ne peut avoir que deux états possibles (étanche ou non étanche).

a) $P(X=1)=C_5^1\times 0{,}028\times 0{,}972^4\approx 0{,}125\,0$.

b) $P(X=2)=C_5^2\times 0{,}028^2\times 0{,}972^3\approx 0{,}007\,2$.

$P(X=0)=C_5^0\times 0{,}972^5\approx 0{,}867\,6$.

c) $P(X=0 \text{ ou } X=1 \text{ ou } X=2)\approx 0{,}867\,6+0{,}125\,0+0{,}007\,2\approx 0{,}999\,77$.

Remarque : un oubli d'un terme (surtout P(X = 0)) est vite repéré par les étudiants compte tenu du trop faible résultat trouvé avec cet oubli.
2) X suit la loi binomiale **B** (5 ; 0,08).

$P(X=0 \text{ ou } X=1 \text{ ou } X=2)\approx 0{,}659\,1+0{,}286\,6+0{,}049\,84\approx 0{,}995\,54$

qui est une valeur élevée malgré la très mauvaise qualité des flotteurs.

Problème n° 9 : Stockage de l'énergie

(Calcul intégral ; thème de TPE en Terminale, BTS).

Les projets d'utilisation à grande échelle des énergies renouvelables pour l'approvisionnement en électricité des pays développés sont freinés par le caractère intermittent de ces dernières et la difficulté actuelle de les stocker à un coût compétitif. En effet, comment connecter sans problèmes au réseau électrique européen des parcs éoliens capables de fournir toute l'électricité consommée en Europe sachant que le vent ne souffle pas continûment.
Remarque : Le potentiel éolien off shore européen est estimé à 2 800 milliards de $\text{kWh}_{\text{électriques}}$ par an, en se limitant aux zones situées à moins de 30 km des côtes et où la profondeur n'excède pas 40 m.

La consommation électrique européenne est actuellement de 1 846 milliards de $\text{kWh}_{\text{électriques}}$ par an, celle de la France est de 400 milliards de $\text{kWh}_{\text{électriques}}$ par an[(2)].

Nous allons étudier plusieurs techniques envisageables pour le stockage d'énergie, en vue de les comparer. Cette étude va s'appuyer sur le cas d'un parc éolien off-shore de puissance nominale 1 000 MW (soit la puissance d'un réacteur nucléaire moyen ou d'un barrage débitant environ 1 300 m^3 d'eau par seconde sur une hauteur de 100 m). Plusieurs parcs éoliens de cette puissance, voire plus, sont en projet actuellement en mer du Nord[(3)].
Un tel parc sera constitué de 167 éoliennes de 6 MW chacune (avec un mât dépassant de 120 m le niveau de la mer, et des pales de 70 m de longueur). Les vents en mer du

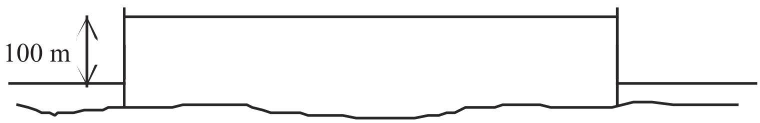
(2) Source : www.ewea.org.
(3) www.vestas.dk; www.bonus.dk ; www.gepower.com.

Nord permettent à de tels parcs de fonctionner à leur puissance nominale (maximale) pendant l'équivalent de 3 900 heures/an.
Un parc de 1 000 MW fournira ainsi 1 000 000 × 3 900 = 3 900 millions de $\text{kWh}_{\text{électriques}}$ par an, soit en moyenne 10,7 millions de $\text{kWh}_{\text{électriques}}$ par jour $\approx 3{,}85 \times 10^{13}$ J par jour (1 Wh = 3 600 J).

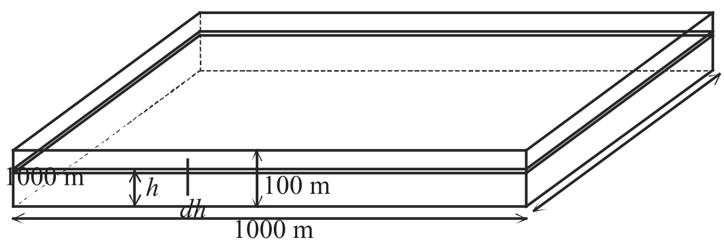
Nous prendrons comme quantité d'énergie à stocker celle d'une journée moyenne, soit $3{,}85 \times 10^{13}$ J.

Partie I : Stockage sous forme d'énergie potentielle de pesanteur (dans une retenue d'eau)

On considère une retenue d'eau de section carrée de 1 km de côté et de 100 m de haut (au dessus du niveau de la mer) et on se propose de calculer quelle quantité d'énergie cette retenue permet de stocker.



On peut démontrer qu'un objet de masse *m* pouvant tomber d'une altitude *h* possède l'énergie potentielle de pesanteur *mgh* (avec *g* = 9,8 N/m).

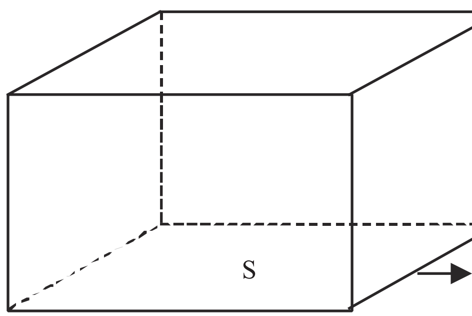


On considère un élément ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de base carrée de 1 km de côté, de hauteur (infiniment faible) *dh* (voir la figure ci-dessus) et situé à la hauteur *h* au dessus de la surface de la mer. Cet élément possède donc la masse $dm = 1\,000 \times 1\,000 \times dh \times 1\,000$ (puisque 1 m^3 d'eau a une masse de 1 000 kg) et l'énergie potentielle de pesanteur $d\text{E} = 1\,000 \times 1\,000 \times dh \times 1\,000 \times 9{,}8 \times h$.
L'énergie que possède toute l'eau de la retenue pleine est donc la somme des énergies potentielles des éléments de hauteur *dh*. L'énergie totale (en joules J) stockée dans la retenue pleine est donc :

$$\text{E} = \int_0^{100} 1\,000 \times 1\,000 \times dh \times 1\,000 \times 9{,}8 \times h.$$

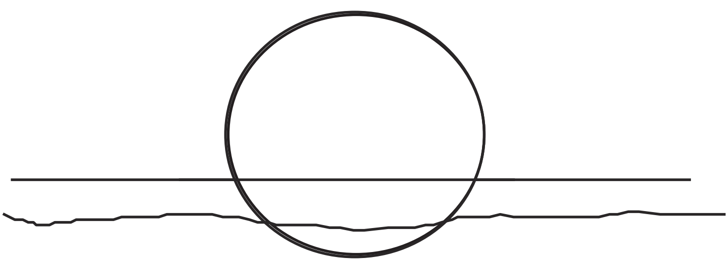
1) Calculer l'intégrale E, puis la comparer à la quantité d'énergie produite par le parc éolien considéré pendant une journée moyenne, soit $3{,}85 \times 10^{13}$ J.
Remarque : L'énergie E est une énergie mécanique. En la transformant en électricité grâce à des turbines, il se produit évidemment des pertes.

2) a) De façon générale, quelle énergie potentielle E (en J) est stockée dans une retenue pleine d'eau, de surface de base S (en m^2), où l'eau peut chuter de la hauteur H (en m) ?
b) Exprimer E en fonction de H et de la masse M d'eau stockée (et de $g = 9{,}8$).



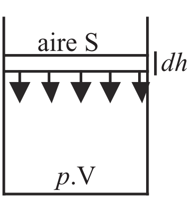
Partie II : Stockage sous forme d'énergie potentielle de pression

On considère une cuve étanche de 2 millions de m^3 de volume intérieur (soit le volume d'une sphère de 78 m de rayon).
L'énergie du parc éolien sert à comprimer (de façon isotherme : la température de l'air reste en permanence la même) dans cette cuve de l'air à la pression de 50 bars (soit environ 50 fois la pression atmosphérique) pour pouvoir le returbiner à la demande à un moment ultérieur.
On se propose de calculer quelle quantité d'énergie cet air sous pression permet de stocker.



La quantité d'énergie nécessaire pour comprimer de l'air à la pression p de façon à diminuer son volume de la quantité dV (infiniment petite) est : $\delta W = -p\, dV$.

Vérification dans le cas d'un cylindre :
$\delta W = -F\, dh = -p_{\text{extérieure}}\, S\, dh = -p_{\text{extérieure}}\, dV$.
$dV < 0 \Rightarrow \delta W > 0$: le gaz *reçoit* un travail
avec $p_{\text{extérieure}} = p$ à chaque instant (si la compression est quasi-statique)
d'où $\delta W = -p\, dV$.



De plus, on peut considérer que le produit pV de la pression de l'air par le volume d'air reste constant au cours de la compression (si la pression p est multipliée par un nombre k, le volume V est divisé par ce même nombre k).
Ici, il faut donc comprimer 50×2 millions de m^3 d'air à 1 bar (soit 100 000 Pa) pour obtenir 2 millions de m^3 d'air à 50 bars.

D'où $p\mathrm{V}$ = constante = $100\,000 \times 50 \times 2\,000\,000 = 10^{13}$ et la relation $p = \dfrac{10^{13}}{\mathrm{V}}$.

La quantité d'énergie (en J) nécessaire pour comprimer 50×2 millions de m^3 d'air à 1 bar pour obtenir 2 millions de m^3 d'air à 50 bars est donc la somme :

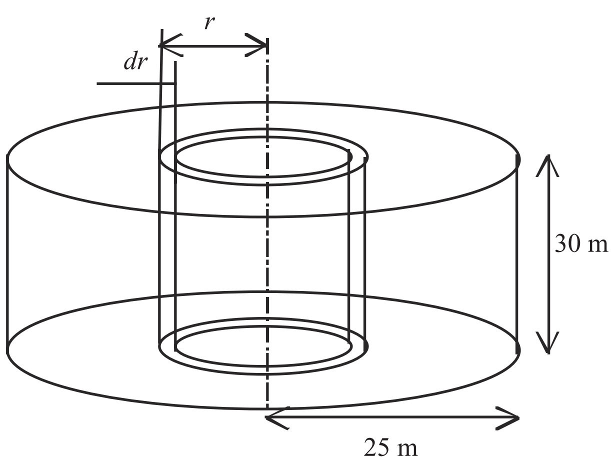
$$\mathrm{E} = \int -p\,d\mathrm{V} = -\int_{50\times 2\,000\,000}^{2\,000\,000} \frac{10^{13}}{\mathrm{V}}\,d\mathrm{V}.$$

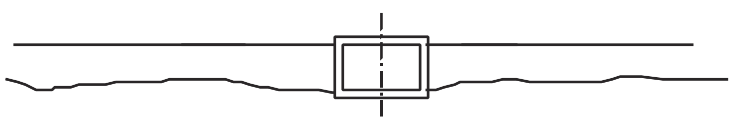
1) Calculer l'intégrale E, puis la comparer à la quantité d'énergie produite par le parc éolien considéré pendant une journée moyenne, soit $3{,}85 \times 10^{13}$ J.
Remarque : L'énergie E est une énergie mécanique. En la transformant en électricité grâce à des turbines, il se produit évidemment aussi des pertes.

2) Reprendre le calcul de E avec cette fois une pression finale de seulement 25 bars (et non plus 50 bars).
La quantité d'énergie stockée est-elle aussi diminuée de moitié ?

Partie III : Stockage sous forme d'énergie cinétique de rotation (avec un volant d'inertie)

On considère un volant d'inertie ayant la forme d'un cylindre de révolution plein, en acier à haute résistance, de 25 m de rayon et de 30 m de haut, tournant à la fréquence de 210 tours par minute autour de son axe.





On peut démontrer que l'énergie cinétique (due à la vitesse) d'un solide de masse m (en kg) se déplaçant à la vitesse v (en m/s) est : $\frac{1}{2}mv^2$ (en joules J).

Dans le volant d'inertie, les points situés près de l'extérieur du cylindre ont donc une énergie plus importante que les points proches de l'axe (dont la vitesse est faible).
On rassemble des points ayant la même vitesse pour former, par la pensée, un tube d'épaisseur infiniment fine dr et de rayon r. Ce tube possède donc la masse $dm = 2\pi r \times 30 \times dr \times 7\,800$ (on « déroule » le tube pour calculer son volume, et 1 m^3 d'acier a une masse de 7 800 kg).
Ce tube fait 210 tours par minute donc 3,5 tours/s donc $3{,}5 \times 2\pi r$ m/s.
Ce tube possède donc l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}dm\, v^2 = \frac{1}{2}\times 2\pi r \times 30 \times dr \times 7\,800 \times (3{,}5\times 2\pi r)^2.$$

L'énergie que possède le cylindre (en totalité) est donc la somme des énergies des tubes d'épaisseur dr et de rayon r, pour r allant de 0 à 25 m. L'énergie totale (en J) stockée dans le cylindre en rotation est donc :

$$\mathrm{E} = \int \frac{1}{2}dm\, v^2 = \int_0^{25} \frac{1}{2}\times 2\pi r \times 30 \times dr \times 7\,800 \times (3{,}5\times 2\pi r)^2$$
$$= \frac{1}{2}\times 2\pi \times 30 \times 7\,800 \times 3{,}5^2 \times 4\pi^2 \int_0^{25} r^3 dr.$$

1) Calculer l'intégrale E, puis la comparer à la quantité d'énergie produite par le parc éolien considéré pendant une journée moyenne, soit $3{,}85 \times 10^{13}$ J.

Remarque : Ce volant doit tourner dans une enceinte sous vide et sur des paliers magnétiques afin de réduire au maximum les pertes par frottement. Une lubrification dans le vide serait de plus problématique car l'huile s'y vaporiserait(4).

2) Pour augmenter l'énergie stockée dans un volant d'inertie, on peut soit augmenter sa masse, soit augmenter sa fréquence de rotation. Cependant, des contraintes mécaniques élevées apparaissent dans le volant en raison des forces centrifuges. On peut démontrer que la contrainte maximale se trouve au diamètre extérieur du volant et a pour valeur $\sigma = \frac{3}{8}\rho v^2$, avec ρ la masse volumique du matériau (ici $\rho = \rho_{acier} =$ 7 800 kg/m^3) et v la vitesse tangentielle (en m/s) au diamètre extérieur du cylindre.
Sachant que l'acier considéré ici (à haute résistance) peut résister au maximum à 3 000 MPa, le volant étudié ci-avant va-t-il résister à ces contraintes ?

3) Exprimer l'énergie cinétique E (en J) d'un cylindre plein en fonction de sa masse M (en kg), son rayon extérieur R (en m) et sa vitesse angulaire ω (en rad/s).

(4) En France, les volants d'inertie ont été étudiés à l'ENS de Cachan et à l'INPG de Grenoble : www.satie.ens-cachan.fr.

Partie IV : Stockage sous forme d'énergie chimique (avec production de gaz dihydrogène)

Dans une quinzaine d'années devraient être construits en grande série des véhicules dont le moteur (électrique) sera alimenté par une pile à combustible. Ces piles fournissent un courant électrique à partir de gaz dihydrogène (appelé couramment hydrogène). Ce gaz devrait être stocké sous forme gazeuse, à la température ambiante, sous une pression d'environ 700 bars.
Un réservoir contenant 4 kg de dihydrogène pur (c'est à dire 2 000 moles de molécules H_2 puisque $M_{H_2} = 2$ g) devrait permettre une autonomie de 500 km à une voiture.
La réaction chimique réalisée au cœur de la pile à combustible[5]

$$H_2 + 0{,}5O_2 \rightarrow H_2O$$

libère 285 kJ/mole de molécules H_2.

Pour stocker $3{,}85 \times 10^{13}$ J d'énergie, il faut donc synthétiser par électrolyse de l'eau (présente sur place en mer) $3{,}85 \times 10^{13} : 285\,000 \approx 135\,000\,000$ moles de gaz dihydrogène, soit environ $135 \times 10^6 \times 0{,}023\,2$ m^3 de dihydrogène à la pression atmosphérique et à la température de 10° C (le volume d'une mole de gaz étant d'environ 23,2 L dans ces conditions).
Pour stocker $3{,}85 \times 10^{13}$ d'énergie, il faut donc synthétiser et stocker

$$135 \times 10^6 \times 0{,}023\,2 : 50 \approx 62\,640 \text{ m}^3$$

de dihydrogène à 50 bars et 10° C.

On envisage alors une cuve cylindrique de 15 m de rayon et de 90 m de long (soit de volume 63 617,3 m^3).

Remarque : On ne prendra pas en considération ici l'énergie mécanique élastique de l'hydrogène sous pression (comme dans la partie II). Sa prise en compte conduirait à réduire le volume de dihydrogène à stocker.

Détermination des contraintes dans un réservoir cylindrique à paroi mince fermé aux deux extrémités par des fonds plats, soumis à une pression intérieure uniforme p :

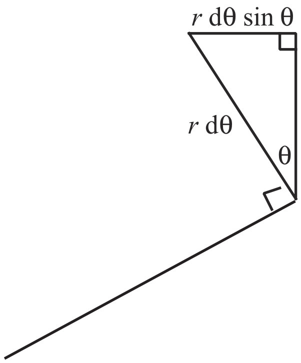
Soit h l'épaisseur de la paroi et r le rayon intérieur.

Pour déterminer la contrainte circonférentielle σ_C, on considère dans le récipient un élément de longueur L, isolé du reste du cylindre.

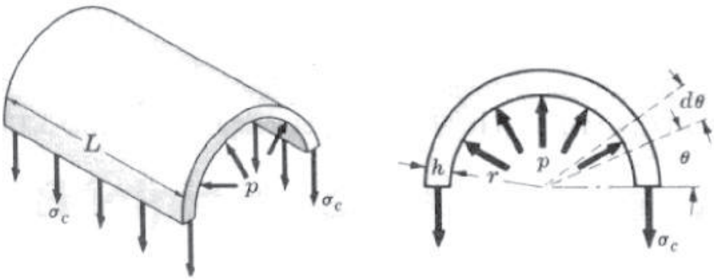
Les composantes horizontales des pressions radiales s'équilibrent deux à deux en raison de la symétrie par rapport à l'axe vertical central.

(5) Des informations sur les piles à combustibles et l'hydrogène peuvent être obtenues sur le site de l'association française de l'hydrogène (www.afh2.org).

Par définition du radian, un angle de mesure 1 radian intercepte un arc de longueur r sur un cercle de rayon r. Un angle de mesure $d\theta$ radians intercepte donc un arc de longueur $r \times d\theta$ sur un cercle de rayon r ($d\theta$ est un angle infiniment petit).
Dans la direction verticale, l'équation d'équilibre est donc :



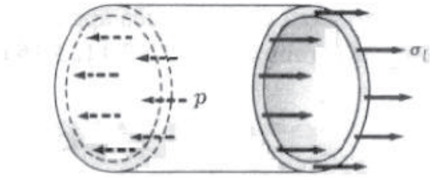
$$2\sigma_C h\mathrm{L} = \int_0^{\pi} pr\, d\theta \sin\theta\, \mathrm{L}.$$



(Figure : Editions Mc Graw Hill)

1) En calculant la somme intégrale ci-dessus, exprimer la contrainte circonférentielle σ_C en fonction de p, r et h.

Pour trouver la contrainte longitudinale σ_L, on considère une section transversale du cylindre perpendiculaire à son axe.



(Figure : Editions Mc Graw Hill)

L'équilibre des forces donne : $p\,\pi\,r^2 = 2\,\pi\,r\,h\,\sigma_L$.

2) En déduire la contrainte longitudinale σ_L en fonction de p, r et h.
Quelle relation simple existe-t-il entre σ_L et σ_C ?
Remarque : Ces expressions simples des contraintes ne sont plus valables au voisinage immédiat des fonds plats.

3) Si $p = 50$ bars $= 5\ 000\ 000$ Pa, $r = 15$ m, quelle doit être l'épaisseur h de la cuve pour que les contraintes σ_C et σ_L ne dépassent pas 200 MPa (soit la moitié de la contrainte maximale pour un acier doux) ?

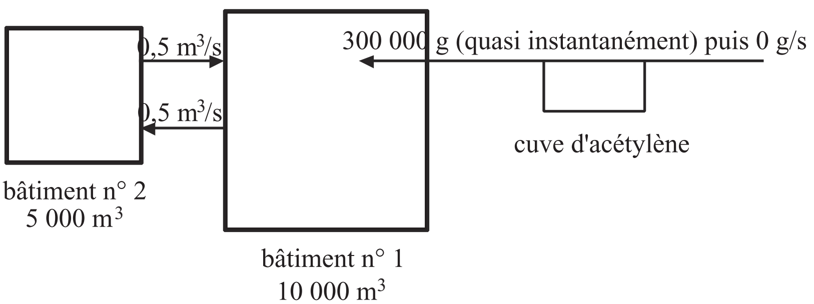
Conclusion : Les quatre systèmes qui viennent d'être étudiés permettent de stocker une quantité d'énergie du même ordre de grandeur.

– Le stockage sous forme potentielle dans des retenues d'eau est le plus simple et le moins coûteux : il est envisagé de stocker de grandes quantités d'énergie éolienne dans des barrages de Norvège ; le Québec développe aussi actuellement cette voie.
– Des volants d'inertie sont à l'étude mais ils se heurtent à des problèmes de sécurité (explosion du volant) et de coût.
– Des essais de stockage sous forme d'énergie de pression ont été réalisés dans des cavités géologiques.
– Enfin, vu l'importance des travaux de recherche portant sur l'alimentation des véhicules particuliers par hydrogène, il semblerait que le stockage sous forme chimique soit celui qui sera le plus développé dans les prochaines décennies. Des prototypes de station service alimentant des bus en hydrogène fonctionnent déjà en Allemagne, en Californie et en Islande.

Problème n° 10 : Inflammation de l'acétylène

(Thème : système différentiel et résolution approchée par tableur ; classes de lycées, BTS).

Une usine réalise des opérations de soudage. Les postes de soudage sont situés dans le bâtiment nº 1, de 10 000 m^3 de volume intérieur, et sont alimentés en acétylène depuis une cuve placée à l'extérieur. Le bâtiment nº 2, de 5 000 m^3 de volume intérieur, abrite les opérations d'usinage ; il n'est pas alimenté en acétylène.
Les bâtiments nºs 1 et 2 sont ventilés mécaniquement (pour la répartition du chauffage) avec les débits constants suivants, une porte du bâtiment nº 1 restant ouverte sur l'extérieur pendant les heures de travail pour l'aération.



Volume molaire à 30°C = 24,88 L sous 101 325 Pa
Masse molaire de l'acétylène (C_2H_2) = 26 g

La limite inférieure d'inflammabilité de l'acétylène dans l'air est, en volume, de

2,2 %, soit, à la température de 30° C, de 230 000 g d'acétylène pour le bâtiment n° 1 et de 115 000 g d'acétylène pour le bâtiment n° 2.

On envisage le cas d'une rupture de la canalisation d'alimentation en acétylène (suite à la fatigue de soudures sur la tuyauterie) alors que les bâtiments sont inoccupés : les deux bâtiments sont étanches vis à vis de l'extérieur. On considère que cette rupture apporte instantanément 300 000 g d'acétylène à 30° C à l'intérieur du bâtiment n° 1 (forçant en une durée très courte à l'extérieur environ 6 % du volume d'air, considéré non mélangé à de l'acétylène, de ce bâtiment). L'usine étant fermée, aucune personne ne peut ventiler en ouvrant des portes sur l'extérieur. On considère que la température régnant dans les deux bâtiments est de 30° C.

– Dans le cas où la ventilation entre les bâtiments n^{os} 1 et 2 est en fonctionnement, dans combien de temps après la rupture de la canalisation le risque d'inflammation dans le bâtiment n° 1 sera-t-il écarté ?
– Le risque d'inflammation existera-t-il dans le bâtiment n° 2 ? Si oui, quand apparaîtra-t-il et quand disparaîtra-t-il ?
– Les masses d'acétylène dans chacun des deux bâtiments se stabiliseront-elles dans le temps ? Si oui, vers quelles valeurs ?

Corrigé **:**

A. ***Solutions exactes***

Soit $m_1(t)$ la masse totale d'acétylène dans le bâtiment n° 1 (en g) et $m_2(t)$ la masse totale d'acétylène dans le bâtiment n° 2 (en g), en fonction du temps t (en secondes) (on suppose que l'acétylène est à chaque instant uniformément réparti dans chacun des bâtiments.)

$$\begin{cases} m_1(0) = 300\,000 \\ m_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1'(t) = \dfrac{-m_1(t)}{10\,000} \times 0,5 + \dfrac{m_2(t)}{5\,000} \times 0,5 \\ m_2'(t) = \dfrac{m_1(t)}{10\,000} \times 0,5 - \dfrac{m_2(t)}{5\,000} \times 0,5 \end{cases}$$

En utilisant la transformation de Laplace ou le calcul matriciel, on obtient :
$m_1(t) = 200\,000 + 100\,000\ \mathrm{e}^{-0,000\,15t}$
$m_2(t) = 100\,000 - 100\,000\ \mathrm{e}^{-0,000\,15t}$
(le détail des calculs apparaît dans la brochure d'origine).

$\lim\limits_{t \to +\infty} m_1(t) = 200\,000$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} m_2(t) = 100\,000$. Les concentrations d'acétylène tendent logiquement vers la même limite en $+\infty$.
Remarque : La variation de la masse totale d'acétylène dans chacun des bâtiments tendant vers 0 quand t tend vers $+\infty$, on aurait pu trouver facilement ces valeurs en résolvant le système aux deux inconnues m_1 et m_2 (masses totales limites, constantes dans chacun des deux bâtiments) suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{-m_1}{10\,000}\times 0,5+\dfrac{m_2}{5\,000}\times 0,5=0 \\ m_1+m_2=300\,000 \end{cases}$$

$$m_1(t)=230\,000 \Leftrightarrow 200\,000+100\,000\,e^{-0,000\,15t}=1$$
$$\Leftrightarrow t=-\frac{\ln 0,3}{0,000\,15}\approx 8\,026\text{ s}=2\text{ h }13\text{ min }46\text{ s}.$$

Le risque d'inflammation dans le bâtiment n° 1 disparaît environ 2 h 13 min 46 s après la rupture de la canalisation.

$m_2(t)$ = 115 000 n'a pas de solutions : il n'y a pas de risque d'inflammation dans le bâtiment n° 2 (ce qui semblait difficile à prévoir sans calculs).

B. Solution approchée (obtenue avec un tableur) :

Principe : La masse totale d'acétylène dans chaque bâtiment est calculée de proche en proche pour chaque seconde, en faisant l'approximation que cette masse reste constante (pour un bâtiment donné) pendant chaque intervalle de temps (d'une seconde) et égale à la masse au début de cet intervalle. Ce schéma itératif simple, s'il n'est pas celui qui donne les résultats les plus proches de la solution exacte, présente l'avantage de pouvoir être assez facilement compris par des élèves du secondaire. Nous allons voir qu'il produit toutefois une erreur très modérée sur ce type de problème.

$m_1(t)$: masse totale d'acétylène dans le bâtiment n° 1 (en g) en fonction du temps t (en secondes).
$m_2(t)$: masse totale d'acétylène dans le bâtiment n° 2 (en g) en fonction du temps t (en secondes).

À $t = 0$, $m_1 = 300\,000$ et $m_2 = 0$.

À $t=1$ s, $m_1\approx 300\,000-\dfrac{300\,000}{10\,000}\times 0,5+\dfrac{0}{5\,000}\times 0,5=299\,985$

et $m_2\approx 0-\dfrac{0}{5\,000}\times 0,5+\dfrac{300\,000}{10\,000}\times 0,5=15$.

(on suppose que les 300 000 g d'acétylène sont initialement uniformément répartis dans les 10 000 m^3 du bâtiment n° 1)

À $t=2$ s, $m_1\approx 299\,985-\dfrac{299\,985}{10\,000}\times 0,5+\dfrac{15}{5\,000}\times 0,5\approx 299\,970,00$

et $m_2\approx 15-\dfrac{15}{5\,000}\times 0,5+\dfrac{299\,985}{10\,000}\times 0,5\approx 30,00$.

Les masses d'acétylène successives (pour chaque seconde), dans chacun des deux bâtiments, sont aisément calculées avec un tableur avec la procédure suivante : 300 000 − 300 000/10 000 × 0,5 + 0/5 000 × 0,5 = 299 985

– entrer 0 dans la case C1 et 300 000 dans la case D1 ;
– entrer = C1 − C1/5 000 × 0,5 + D1/10 000 × 0,5 dans la case C2 ;
et = D1 − D1/10 000 × 0,5 + C1/5 000 × 0,5 dans la case D2
(les masses m_2 apparaîtront dans la colonne C et les masses m_1 dans la colonne D) ;
– sélectionner les cases C2, D2, C3, D3, C4, D4, …, C20 000, D20 000 … (deux colonnes, aussi hautes que nécessaires), puis recopier dans chacune de ces cases les formules entrées en C2 et D2 (avec incrémentation de tous les indices) en cliquant sur Édition-Recopie-Vers le bas (ou Édition-Remplissage-Vers le bas) afin de faire calculer pas à pas la masse d'acétylène dans chacun des deux bâtiments toutes les secondes.

Comparaison avec la solution exacte :

Durée (en s)	m_2 exacte (en g)	m_2 par tableur (en g)	m_1 par tableur (en g)	m_1 exacte (en g)
0	0	0	300 000	300 000
1	14,999	15	299 985	299 985,001
2	29,996	29,998	299 970,002	299 970,004
…				
60	895,962	896,029	299 103,971	299 104,038
…				
1 800	23 662,051	23 663,567	276 336,403	276 337,949
…				
3 600	41 725,175	41 727,535	258 272,465	258 274,825
..				
8 026	69 997,816	70 000,525	229 999,475	230 002,184
…				
20 534	95 403,845	95 404,906	204 595,094	204 596,155
…				
65 535	99 994,620	99 994,624	200 005,376	200 005,380

La solution approchée obtenue avec le tableur est très proche de la solution exacte.