Quatre thèmes pour deux triangles

François Duc

La situation ci-dessous est issue de la revue « Science et vie junior » de novembre 2003[1].

On partage chaque côté d' un triangle ABC en trois parties égales.
On note A′ le point de [BC] le plus proche de C, B′ le point de [CA] le plus proche de A, C′ le point de [AB] le plus proche de B.
(AA′) coupe (CC′) en S et (BB′) en T ; (BB′) coupe (CC′) en R.
Quel le quotient des aires des triangles ABC et RST?

La revue de janvier 2004 donne un corrigé uniquement avec des constructions géométriques et des lectures sur le dessin (voir ci-après en annexe).

Cet exercice me semble très riche. Je propose quatre thèmes de recherche du niveau quatrième à terminale. Il sera intéressant de comparer les différentes méthodes.

Thème de recherche (1) : niveau collège
Résoudre l' exercice uniquement avec les connaissances d' un élève de quatrième de collège.

Thème de recherche (2) : niveau seconde
Démontrer que R, S, T sont respectivement les milieux de [BT], [CR], [AS]. Déterminer un pavage du triangle ABC avec des triangles de même aire dont les sommets appartiennent à {A,B,C,R,S,T}.
Quel le quotient des aires de ABC et RST ?

Thème de recherche (3) : niveau première ou terminale S
Démontrer le théorème (T) :

Si $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MP} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{AC}$, alors

$$\text{aire(MNP)} = |xy' - x'y| \times \text{aire(ABC)}.$$

Calculer le quotient des aires de ABC et RST.

Thème de recherche (4) : niveau première ou terminale S
On partage chaque côté d' un triangle ABC en n parties égales, où n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 3.
A′, B′, C′, R, S, T restent définis de la même façon.
Démontrer le théorème (T), puis démontrer que les triangles RAB, SBC et TCA ont la même aire. Existe-t-il une seule valeur de n pour laquelle le quotient $\dfrac{\text{aire(ABC)}}{\text{aire(RST)}}$ soit entier ?

(1) On trouve un problème très voisin dans la brochure de l'APMEP « Pour un enseignement problématisé des mathématiques au lycée », tome 2, p.159.

Remarques :
1) Ces énoncés ne doivent pas être donnés tels quels en classe. Ils seront complétés suivant leur destination : devoir maison, recherche, … En particulier, l'expression du sinus n'étant plus au programme, des indications sont nécessaires (produit scalaire ou nombres complexes).
2) On constate la puissance de la géométrie analytique : sans elle, comment démontrer les égalités d'aires nécessaires pour le pavage?

Corrigés

« Science et vie junior » (janvier 2004)

On trace les droites :
• d_1 parallèle à (TR) passant par A ;
• d_2 parallèle à (RS) passant par B ;
• d_3 parallèle à (ST) passant par C ;
d_1 coupe d_2 en M et d_3 en P ; d_2 coupe d_3 en N.

On trace
• les parallèles à (RS) passant respectivement par A puis T ;
• les parallèles à (ST) passant respectivement par B puis R ;
• les parallèles à (TR) passant respectivement par C puis S.
Le triangle MNP est ainsi découpé en 16 triangles isométriques à RST.

Si s désigne l'aire de RST, aire(MNP) = 16 s.
(RS) coupe d_1 en B_1.

$$\text{aire}(B_1BNC) = 6\,s\ ;\ \text{aire}(BNC) = \frac{1}{2}\ \text{aire}(B_1BNC) = 3\,s.$$

De même,

$$\text{aire}(CPA) = 3\,s \text{ et aire}(AMB) = 3\,s.$$
$$\text{aire}(ABC) = \text{aire}(MNP) - \text{aire}(BNC) - \text{aire}(CPA) - \text{aire}(AMB) = 7\,s.$$
$$\text{aire}(ABC) = 7\ \text{aire}(RST).$$

… mais le pavage de MNP en 16 triangles isométriques à RST n'est pas prouvé !

Thème 1

L'aire d'un triangle ABC est notée (ABC).
On décompose ABC en 7 triangles :

$$(RST) + (RAB) + (SBC) + (TCA) + (ART) + (BSR) + (CTS) = (ABC).$$

En posant Y = (RAB) + (SBC) + (TCA) et Z = (ART) + (BSR) + (CTS), on obtient :

$$(RST) + Y + Z = (ABC) \qquad (1)$$

$$(CSA') = \frac{1}{3}\ (SBC)\ ;\ (ATB') = \frac{1}{3}\ (TAC)\ ;\ (BRC') = \frac{1}{3}\ (RAB) \qquad (2)$$

En ajoutant les trois égalités suivantes :

$$(AA'C) = \frac{1}{3}\ (ABC),$$

$$(BB'A) = \frac{1}{3}\ (ABC),$$

$$(CC'B) = \frac{1}{3}\ (ABC)$$

avec (1) et (2), on obtient :

$$Y + \frac{1}{3}\ Y + Z = Y + Z + (RST)$$

soit

$$Y = 3\ (RST) \tag{3}$$

En ajoutant les trois égalités

$$(TA'C) = \frac{1}{3}\ (TBC),$$

$$(RB'A) = \frac{1}{3}\ (RCA),$$

$$(SC'B) = \frac{1}{3}\ (SAB)$$

avec (2), on obtient :

$$Z + \frac{1}{3}\ Y = \frac{1}{3}\ (3\ (RST) + 2Z + Y),$$

soit

$$Z = 3\ (RST). \tag{4}$$

De (1), (3), (4) on déduit

$$(ABC) = 7\ (RST),$$

$$\frac{\text{aire}(ABC)}{\text{aire}(RST)} = 7.$$

Thème 2

On introduit le repère du plan : $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Par équations de droites, on calcule les coordonnées de R, S, T :

$$R\ \left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}\right)\ ;\ S\ \left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)\ ;\ T\ \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right).$$

La justification des milieux est alors immédiate.

Le seul pavage possible est {RST, RAB, SBC, TCA, ART, BSR, CTS}.
Les triangles RST et RAB ont la même aire (les bases AT et TS sont égales, les hauteurs issues de R sont confondues).
De même RAB et ART ont même aire.
On procède de même pour BSR, SBC, CTS, TCA.

Le quotient des aires de ABC et RST est 7.

Thème (3)

Théorème (T) :
La solution serait simple et rapide avec feu le produit vectoriel(2).

On considère le repère orthonormal direct $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$ avec $\vec{i} = \dfrac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = c\,\vec{i}$ avec $c > 0$, et $\overrightarrow{AC} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$. $\overrightarrow{MN}\,(cx + ay, by)$; $\overrightarrow{MP}\,(cx' + ay', by')$.

$$\begin{aligned}\text{aire(MNP)} &= \frac{1}{2}\sin(\text{NMP})\cdot \text{MN}\cdot\text{MP}\\ &= \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)\right| = \frac{1}{2}|bc|\cdot|xy' - x'y| = |xy' - x'y|\,\text{aire(ABC)}.\end{aligned}$$

On procède alors comme pour le thème 2, on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$, et le théorème (T) donne la réponse : 7.

Thème (4)

À partir du théorème (T), les égalités d' aires se prouvent sans calcul : si (x,y) sont les coordonnées de R dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, par permutation circulaire (x,y) sont aussi les coordonnées de T dans $\left(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$ et de S dans $\left(C, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$. Donc les trois triangles RAB, SBC, TCA ont la même aire $y \times$ aire(ABC).

On considère le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. En posant $d = n^2 - n + 1$, on trouve :

$$R\left(\frac{(n-1)^2}{d}, \frac{1}{d}\right); S\left(\frac{n-1}{d}, \frac{(n-1)^2}{d}\right); T\left(\frac{1}{d}, \frac{n-1}{d}\right).$$

À partir du théorème (T) :

$$\text{aire(RST)} = \frac{(n-2)^2}{d}\text{aire(ABC)}.$$

Donc $\dfrac{\text{aire(ABC)}}{\text{aire(RST)}} = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{(x-2)^2}$.

On étudie les variations de la fonction f sur $[3,+\infty[$.

f est décroissante, $f(x) > 1$, $f(3) = 7$, $f(4) = \dfrac{13}{4}$, $f(5) = \dfrac{7}{3}$, $f(6) = \dfrac{31}{16}$.

Pour $n > 5$, $1 < f(n) < 2$, donc 3 est la seule valeur possible de n pour avoir un quotient entier.

(2) Au niveau post-bac, c' est un résultat d' algèbre linéaire: si P est la matrice de passage de la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ à la base $\left(\vec{i'}, \vec{j'}\right)$, alors $\det\left(\vec{i'}, \vec{j'}\right) = \det(P)\det\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.