Spirales végétales et suite de Fibonacci, un atelier mathématique pour les enfants

Groupe Atelier de L'I.R.E.M. de Strasbourg(*)

Introduction

Historique. Depuis plusieurs années, la Mission Culture Scientifique et Technique (M.C.S.T.) de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg propose des ateliers de découverte scientifique durant les vacances scolaires à destination d'enfants de huit à douze ans. Ces ateliers sont conçus et animés par le personnel de la M.C.S.T., mais aussi par celui d'autres composantes de l'Université Louis Pasteur : le Musée Zoologique et le Jardin Botanique, ainsi que par les membres de l'association *Les Petits Débrouillards*. En 2002, la M.C.S.T. a lancé un appel aux différentes U.F.R.[1] de l'université pour qu'elles participent plus activement aux activités d'animation. L'U.F.R. de Mathématique-Informatique a répondu à cet appel en confiant à l'I.R.E.M. la tâche de concevoir de tels ateliers.

Nous avons ainsi constitué un groupe réunissant des enseignants-chercheurs de l'université, des enseignants du second degré ainsi qu'un professeur des écoles. Le groupe conçoit des ateliers mathématiques et les teste à la fois dans le cadre scolaire d'une école primaire et dans celui des ateliers de découverte scientifique de l'Université.

Notre démarche. Nous savons que des musées scientifiques comme *la Cité des Sciences* et *le Palais de la Découverte* ainsi que des associations de vulgarisation comme *Les Petits Débrouillards* organisent des ateliers scientifiques en direction des enfants. Certains de ces ateliers traitent de mathématiques. Néanmoins, nous n'avons pas trouvé de publication décrivant en détail leurs activités. Nous avons décidé de créer nos ateliers de toutes pièces. Les thèmes abordés ne sont certainement pas originaux. Nous avons adopté la démarche suivante.

D'une part, nous récusons le terme de *jeu mathématique* et de *casse-tête*. Nous avons préféré présenter les problèmes de manière plus approfondie faisant appel à la notion de recherche plus qu'à celle de résolution. De plus, la non trivialité des

(*) Ce groupe est composé de : Bénédicte Autier (Collège Kléber de Strasbourg), Muriel Cron (École élémentaire d'Andlau), Anne-Céline Mittelbronn (Collège La Providence de Strasbourg), Nathalie Wach (UFR de Mathématique et Informatique, Université Louis Pasteur de Strasbourg) et Marc Wambst (UFR de Mathématique et Informatique, Université Louis Pasteur de Strasbourg).

(1) Unité de Recherche et de Formation.

problèmes est garantie par le rattachement à des notions fondamentales des mathématiques.

D'autre part, bien que les thèmes des activités ne fassent pas partie du programme scolaire, celui-ci a été notre outil de référence pour préjuger du niveau de connaissance et du niveau de compétence des enfants. Ceci nous permet de proposer nos ateliers au plus grand nombre, ne nous restreignant pas à une catégorie d'enfants *doués* ou a priori intéressés. De plus, ces ateliers ont été perçus par les enfants comme des activités de recherche plus ou moins différentes du travail scolaire habituel, ce qui permet de les proposer dans des cadres différents de l'école.

Nos objectifs pédagogiques. Nous nous plaçons dans le fil du Document d'application des programmes(2), où la résolution des problèmes est mise au centre des activités mathématiques du cycle 3(3) du primaire. En particulier, nous proposons des *problèmes de recherche* dont le but est de *développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre des hypothèses et les tester, faire et gérer des essais successifs, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter*(2).

Nous avons adopté une forme de travail par petits groupes, parfois par binômes généralement d'âge hétérogène (d'âge du cycle 3). L'hétérogénéité confère une certaine dynamique de travail au groupe, la discussion et la confrontation des résultats se faisant à plusieurs niveaux. Les plus jeunes sont souvent aidés par les plus âgés de leur groupe. L'émulation des différents groupes est une motivation supplémentaire à l'avancée du travail.

Comme nous l'avons dit plus haut, nous souhaitons que nos ateliers soient accessibles au plus grand nombre. Des élèves en difficulté y ont pris un grand plaisir et se sont souvent impliqués dans nos activités. L'erreur permet d'avancer dans la recherche et d'élaborer de nouvelles hypothèses à tester.

Enfin, ces ateliers permettent de mobiliser différentes compétences notamment l'expression orale. Les enfants décrivent leurs observations, expliquent et argumentent leurs démarches.

L'atelier *Spirales végétales et suite de Fibonacci*

L'atelier que nous présentons dans cet article tisse des liens entre les mathématiques et la biologie. Il est extrait d'une brochure en cours d'élaboration(4) qui s'adressera en premier lieu aux professeurs des écoles, mais aussi à toute personne désireuse de faire faire des activités mathématiques à des enfants de 8 à 12 ans. Nous espérons néanmoins que cet article puisse également être une source d'idées pour les enseignants du secondaire qui pourront adapter l'activité au niveau de leur classe.

L'atelier traite des spirales végétales et de la suite de Fibonacci. Une partie de l'activité est consacrée à l'observation et à la reconnaissance de structures dans des

(2) *Document d'application des programmes 2003* – Mathématique, Cycle 3. Collection École, SCEREN (CNDP), http: //www.eduscol.education.fr/D0048/pb_pour_chercher.pdf

(3) Cours élémentaire 1, cours moyen 1 et 2.

(4) À paraître sous forme de brochure I.R.E.M. Cf. le site de l'I.R.E.M de Strasbourg : http://irem.u-strasbg.fr.

objets végétaux. Une suite de nombres apparaît naturellement : la suite de Fibonacci. Le concept principal sur lequel nous insistons est celui de *modèle* : une simplification et une mathématisation du problème conduisent à sa compréhension.

L'atelier a été testé à plusieurs reprises à la fois dans le cadre d'ateliers scientifiques organisés par la Mission Culture Scientifique et Technique de l'Université Louis Pasteur et lors de *matinées ateliers* réunissant des élèves du cycle 3. Bien qu'il effleure de nombreux thèmes mathématiques importants qui peuvent être exploités dans un cadre scolaire plus avancé, il ne demande pas de connaissance mathématique particulière. Sa plus grande difficulté pratique consiste à faire des tracés géométriques soignés.

Remarques pédagogiques spécifiques. La question des compétences requises au déroulement de l'atelier s'est posée. Plusieurs notions apparaissent.

En ce qui concerne les compétences, les enfants ont dû :

– observer, reconnaître un motif identique dans des situations différentes (les mêmes spirales pour des fruits et des fleurs).
– compter, surmonter des difficultés de repérage. Il fallait ne pas compter deux fois la même spirale, marquer les spirales déjà comptées, manipuler des objets à bon escient.
– reconnaître une règle de calcul et/ou la vérifier sur des exemples.
– comprendre un modèle schématisant un phénomène.
– faire un tracé à l'aide d'un gabarit d'angle en s'en tenant à la consigne de traçage donnée.
– classer les divers tracés obtenus.

Thèmes mathématiques abordés. Pour ce qui est des notions mathématiques qui interviennent dans l'activité, il s'agit de celles de suite récurrente, d'angle, de mesure d'angle, de nombre rationnels/irrationnels. Il est évident qu'aucune d'elles n'est à la portée d'un enfant. Néanmoins pour la première il est possible d'énoncer une règle de calcul : *Chaque nombre est la somme des deux précédents*. Pour la seconde, nous avons introduit des gabarits d'angle. Le terme d'*angle* et la manipulation de tels gabarits est au programme du cycle 3(5).

Pour ce qui est des notions de mesure d'angle et d'irrationalité, des explications peuvent éventuellement être données en guise de conclusion de la séance. Mais, comme elles sont difficiles à comprendre pour des enfants de cet âge, nous ne les avons pas développées dans l'activité à proprement parler.

L'article reprend pas à pas la description de l'atelier comme nous l'avons proposé aux enfants. Nous présentons chaque étape de l'activité et donnons les explications nécessaires à sa compréhension. Les explications mathématiques complémentaires présentées dans les cadres pourront être négligées dans une première lecture. Dans une seconde partie, nous fournissons un récapitulatif sous forme d'un tableau de

(5) Le programme demande de *comparer des angles dessinés par superposition ou en utilisant un gabarit* ainsi que *reproduire un angle donné en utilisant un gabarit ou par report d'un étalon*. (Document d'application des programmes (cf. note (2)).

suivi de l'atelier comme il a été réalisé lors de l'expérimentation à Andlau ainsi que tous les documents nécessaires à sa réalisation.

Déroulement de l'atelier et explications mathématiques

L'atelier tel que nous le présentons a été testé, d'une part, dans une école primaire lors de séances *atelier* qui réunissaient des élèves de cycle 3, et d'autre part, lors d'*animations scientifiques* réunissant en dehors d'un cadre scolaire des enfants volontaires de 7 à 12 ans.

Décrivons brièvement le déroulement de l'atelier. Dans une première étape, nous faisons découvrir aux enfants les nombres de Fibonacci dans les plantes à l'aide de pommes de pin, d'ananas, … Nous avons ensuite interprété ces nombres comme les termes de la suite de Fibonacci. Enfin, dans une troisième étape, nous leur avons proposé de modéliser le problème en leur faisant dessiner les graines dans le cœur du tournesol à l'aide d'un matériel adapté. Dans la seconde partie, on trouvera résumé dans un tableau le déroulement de l'atelier à l'école élémentaire d'Andlau ainsi que les documents nécessaires à la réalisation de l'atelier : photo de tournesol, gabarits d'angles à reproduire en carton et dessins de *cible* servant de modèle au cœur du tournesol.

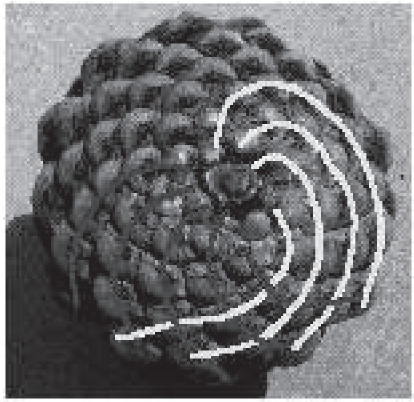
Le matériel.

– Objets végétaux : pommes de pin, cônes d'épicéa, ananas, artichauts, photos de fleurs de tournesol (document B), têtes de choux-fleurs ou de brocolis (on pensera à vérifier qu'il ne s'est pas glissé parmi eux un *monstre* pour lequel le nombre de spirales n'est pas celui attendu).
– Petit matériel pour les enfants : papier, crayon, feutres de couleur, craies, craies grasses.
– Matériel à préparer à l'avance : gabarits en carton de plusieurs angles, dessins de la cible, schémas déjà faits (documents C à E).
– Matériel pour les animateurs : tableau, schéma du cœur de tournesol en grand format (document C), pastilles adhésives ou aimantées ou un rétroprojecteur.

Venons-en à décrire plus en détail les différentes étapes de l'activité en expliquant les phénomènes et les mathématiques en jeu. Rappelons que les textes encadrés peuvent être omis dans une première lecture.

La phase d'observation, les spirales végétales. De nombreuses plantes ou fruits présentent des structures spiralées. Il suffit d'observer un cœur de tournesol, un ananas, une pomme de pin, un artichaut, un chou-fleur, … pour apercevoir des spirales à leur surface : du centre du tournesol, de la base de la pomme de pin ou de l'ananas, du sommet du chou-fleur partent deux familles de spirales constituées par des graines ou des écailles, les unes s'enroulant dans un sens et les autres dans l'autre sens. Lorsqu'on les compte, on s'aperçoit qu'il y en a 3 dans un sens et 5 dans l'autre ou 5 dans un sens et 8 dans l'autre ou 8 et 13 ou 13 et 21 ou 21 et 34… Par exemple, dans les photographies suivantes, on dénombre 21 et 34 spirales pour le tournesol et 8 et 13 pour la pomme de pin.

Cœur de tournesol



Pomme de pin

La première étape de l'atelier consiste à observer les fruits et les plantes : pommes de pin, brocolis, ananas, artichauts, fleurs de tournesol. Il est possible de faire les observations sur des photographies. On demande aux enfants d'observer les *écailles* ou les graines. On peut leur demander de s'intéresser à leur répartition et faire un schéma de celles-ci.

Le comptage des spirales. Lorsque les spirales sont identifiées, on leur demande de les compter. Pour les photographies, afin de faciliter le comptage, ils peuvent surligner les spirales au fur et à mesure, pour les fruits réels, marquer les spirales à l'aide de marqueurs ou de craies.

On rassemble ensuite les résultats : 3 et 5 pour le brocoli et certaines pommes de pin, 5 et 8 pour certains ananas, les artichauts, les choux-fleurs, les pommes de pin plus grosses, 8 et 13 pour les gros ananas, 21 et 34 sur les photographies de tournesol.

La science qui s'occupe de l'étude de la forme des végétaux s'appelle la phyllotaxie. Deux botanistes allemands du début du dix-neuvième siècle, Schimper et Braun, firent des mesures exactes de la position des feuilles sur les tiges de certaines plantes. D'autres études faites en France à la même époque par les frères Bravais donnèrent des résultats similaires, à savoir que l'on peut relier les feuilles par deux familles de spirales, appelées *parastiches*, tournant en sens opposé l'une de l'autre. Le nombre de spirales tournant dans un sens et le nombre de celles tournant dans l'autre forment les couples (3, 5), (5, 8), (8, 13), (13, 21), (21,34), … C'est le même phénomène qu'on retrouve dans le cœur des tournesols, les écorces des ananas, les écailles des pommes de pin. Dans une fleur, comme le tournesol ou la marguerite, un pétale se développe au bout d'un parastiche. Le nombre de pétales est donc égal à celui des parastiches et donc également à l'un des nombres 5, 8, 13, 21, …

Ces nombres 3, 5, 8, 13, 21, … sont les premiers termes de la suite (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …) dont un terme s'obtient en additionnant les deux termes précédents (par exemple on a 3 = 1 + 2 et 5 = 2 + 3 et 8 = 3 + 5, …). Cette suite porte le nom de Leonardo Pisano (1170-1270) dit Fibonacci qui fut le premier à la définir.

On demande aux enfants de *trouver la règle* régissant la suite et éventuellement calculer quelques termes supplémentaires. On peut leur parler de Fibonacci.

Suite de Fibonacci et nombre d'or. La suite de Fibonacci bien que relativement simple à définir a plusieurs propriétés remarquables. L'une d'entre elles est sa relation avec le célèbre *nombre d'or*. Ce nombre est défini comme le rapport de deux longueurs AB et BC où A, B et C sont trois points alignés placés de telle manière que les rapports de longueurs $\frac{AB}{AC}$ et $\frac{AC}{CB}$ soient égaux comme l'illustre la figure 1.

(fig. 1)

Pour de nombreux artistes, dans une tradition remontant à l'Antiquité, l'alignement ainsi formé est le plus harmonieux qui soit. La proportion qui réalise cette configuration est $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Ce nombre est appelé *nombre d'or* et généralement noté ϕ. Il s'agit d'un nombre *irrationnel*, c'est-à-dire qu'on ne peut l'obtenir sous la forme d'un rapport $\frac{p}{q}$ de deux nombres entiers p et q. On peut en donner une valeur approchée : $\phi \approx 1.618\,033\,988\,7$ avec une précision de 10 chiffres après la virgule.

Évaluons les rapports de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci :

$$\frac{2}{1} = 2\ ;\ \frac{3}{2} = 1{,}5\ ;\ \frac{5}{3} \approx 1{,}66\ ;\ \frac{8}{5} = 1{,}6\ ;\ \frac{13}{8} = 1{,}625\ ;$$

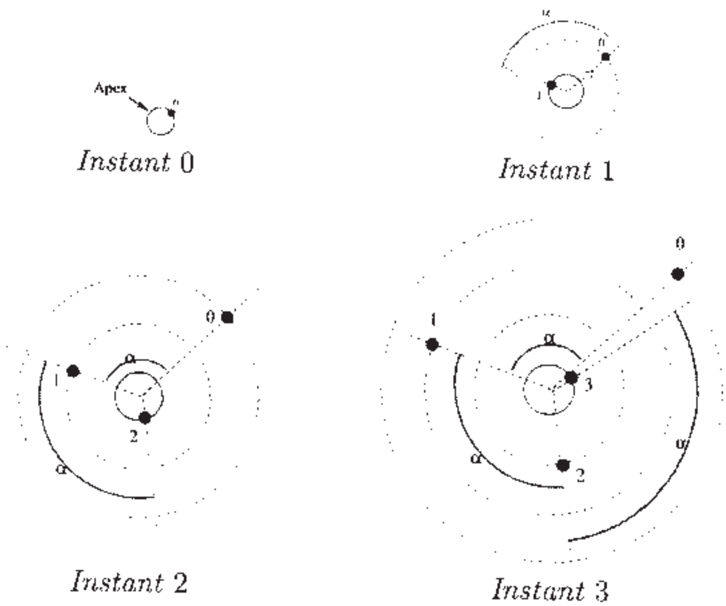
$$\frac{21}{13} \approx 1{,}615\,3\ ;\ \frac{34}{21} \approx 1{,}619\,04\ ;\ \frac{55}{34} \approx 1{,}617\,6\ ;\ \frac{89}{55} \approx 1{,}618\,18\ ;$$

$$\frac{144}{89} \approx 1{,}617\,97\ ;\ \frac{233}{144} \approx 1{,}618\,05\ ;\ \frac{377}{233} \approx 1{,}618\,025\ ;\ \frac{610}{377} \approx 1{,}618\,037\ ;\ \ldots$$

On constate (et on peut démontrer) que $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$ forment une suite dont les termes vont être des valeurs approchées du nombre ϕ, d'autant plus précises que les termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont grands.

La modélisation de la pousse des graines. On explique ensuite aux enfants la modélisation de la pousse des graines dans le tournesol (voir les explications ci-dessous). Il est possible d'introduire le modèle en leur posant des questions sur le sens de pousse des graines dans le cœur de la fleur. On utilise une *cible* constituée de cercles concentriques sur lesquels il s'agit de placer les graines à un moment donné de la pousse. Il faut leur expliquer que les graines apparaissent successivement au centre de la fleur puis migrent lentement vers le bord. Ainsi la graine la plus ancienne apparue est située le plus loin du centre. De plus chaque graine apparaissant forme un angle constant avec la précédente. On peut utiliser des pastilles aimantées de couleur pour illustrer la dynamique de la pousse au tableau ou montrer les différentes étapes en superposant des transparents sur un rétroprojecteur.

Pour comprendre ce qu'il se passe, nous proposons un modèle simplifié de la pousse des graines dans un cœur de tournesol. Les botanistes nous apprennent que les graines se développent l'une après l'autre au bord d'un petit disque central qu'ils nomment l'*apex*. Lorsqu'une graine pousse sur le bord de l'apex, on a expérimentalement constaté que la suivante va se développer sur le bord de ce petit disque central à une distance angulaire constante de la précédente. Au fur et à mesure du développement de la fleur, les graines s'éloignent de l'apex en migrant radialement vers l'extérieur.



Le schéma de la pousse des graines pour un angle α (fig. 2)

Dans le schéma ci-dessous (figure 2), on a numéroté les graines symbolisées par des points dans l'ordre de leur apparition en commençant par 0 et en supposant que la vitesse de croissance est constante. La graine la plus ancienne qui porte le numéro 0 est celle qui est située le plus à l'extérieur de la configuration. Imaginons que nous observons la pousse à des instants successifs et réguliers. Chaque dessin de la figure 2 correspond à l'un de ces instants. À l'instant 0, la graine nº 0 apparaît sur le bord de l'apex. À l'instant 1, cette première graine a migré vers l'extérieur et la graine nº 1 est apparue sur le bord de l'apex à un angle α de la première. À l'instant 2, les graines n° 0 et n° 1 ont migré vers l'extérieur alors qu'une graine n° 2 est apparue sur le bord de l'apex à un angle α de la graine n° 1, … Les cercles concentriques ne servent qu'à marquer l'éloignement des graines du centre aux instants réguliers d'observation. D'un instant à l'autre, les graines s'éloignent vers l'extérieur en se plaçant sur le cercle suivant et une nouvelle graine apparaît au bord de l'apex.

Les botanistes ont constaté que la position d'apparition de la nouvelle graine est déterminée par la position de la graine qui la précède. L'angle que fait une nouvelle graine avec la précédente est constant. Il en résulte que les angles que forment les positions des graines successives par rapport au centre ont tous la même mesure (nous l'avons notée α sur la figure 2). Il est remarquable que ce soit le même angle qui se retrouve presque systématiquement en phyllotaxie, qu'il s'agisse de la pousse des feuilles autour d'une tige, des *graines* dans le cœur des tournesols, des *écailles* de la pomme de pin, …

On appelle cet angle l'*angle d'or*. Il est fortement lié au nombre d'or : en effet, sa mesure en degré est $\frac{1}{\phi}\times 360° \approx 222,492\,2°$.

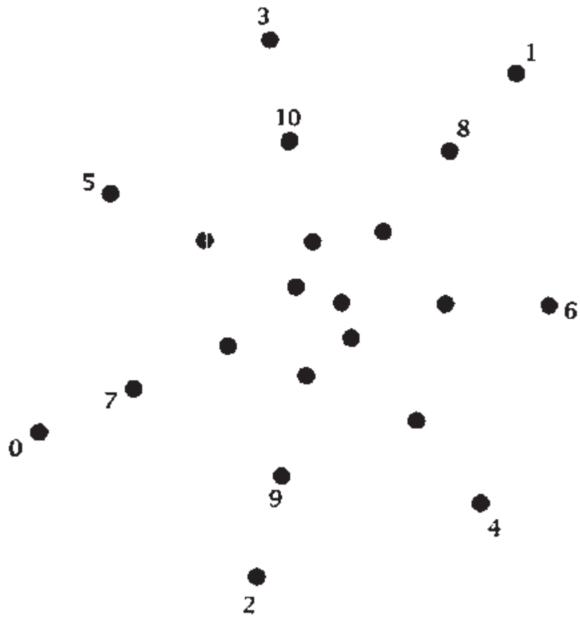
La réalisation des dessins par les enfants. On distribue des *cibles* vierges et on leur demande de réaliser le dessin des graines à l'aide de gabarits en carton. On dessine une graine sur le cercle extérieur d'une *cible*. La seconde graine est située sur le cercle suivant en comptant de l'extérieur vers l'intérieur. On se sert du gabarit dont la pointe est posée sur le centre de la *cible* pour dessiner la graine suivante. On recommence en prenant la dernière graine dessinée comme nouveau point de départ. Il faut faire attention à toujours tourner dans le même sens. Les graines pourront être numérotées partant de 0 et à partir de l'extérieur. Lorsque toutes les graines sont placées, il reste à tracer les deux familles de spirales à l'aide de deux feutres de couleurs différentes. Chacun réalisera au moins deux dessins. Les gabarits reprendront l'angle d'or, un angle de mesure rationnelle, et un angle de mesure irrationnelle qui n'est pas l'angle d'or.

Les dessins obtenus seront très différents selon le gabarit choisi. C'est ce que nous expliquons maintenant.

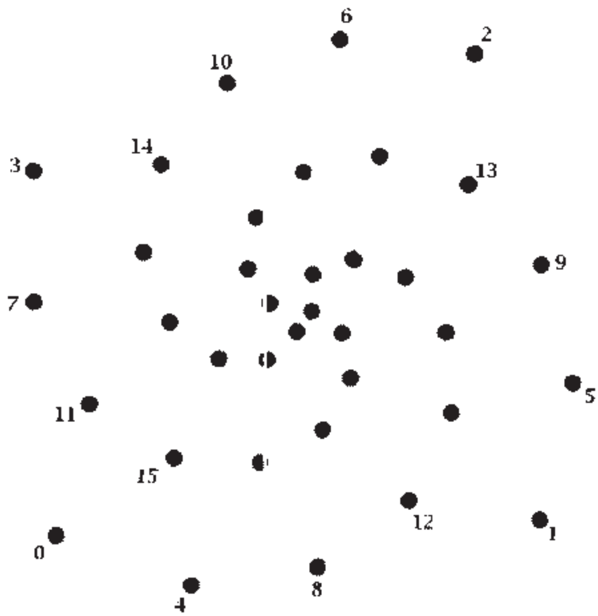
Les trois schémas suivants représentent des modélisations du phénomène avec trois angles différents(6).

Dans le premier cas (figure 3), la mesure de l'angle est une fraction rationnelle $\left(\frac{3}{7}\right)$ de 360°. Au bout de sept tours, une nouvelle graine se développe exactement à l'endroit où est apparue la première. Le phénomène se reproduit en donnant sept lignes droites de graines. Une configuration similaire d'un nombre q de lignes apparaîtrait avec n'importe quel angle dont la mesure est une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ de 360°.

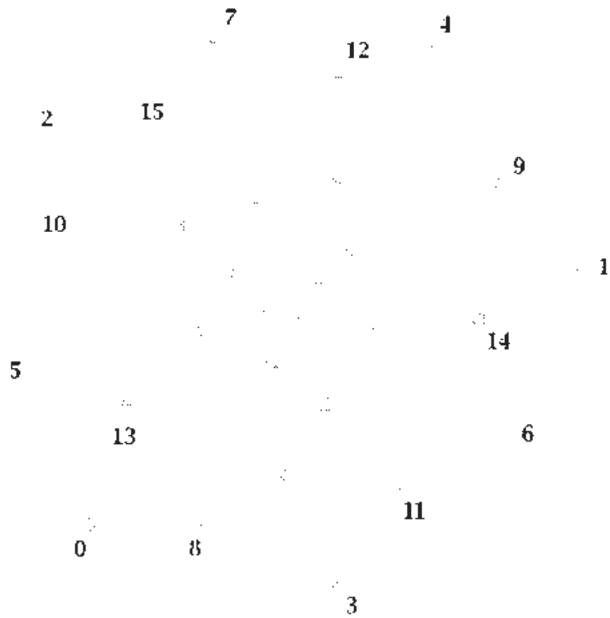
(6) La vitesse d'éloignement du centre des graines est supposée constante.



Le schéma de la pousse des graines pour un angle de mesure $\frac{3}{7}\times 360°$ *(fig.3)*



Le schéma de la pousse des graines pour un angle de mesure $\sqrt{3}\times 360°$ *(fig.4)*



Le schéma de la pousse des graines pour l'angle d'or de mesure $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 360°$

(fig.5)

Dans le second cas (figure 4), on a choisi un angle de mesure irrationnelle, c'est-à-dire un angle dont la mesure n'est pas du type $\frac{p}{q} \times 360°$. Dans notre exemple l'angle est de mesure $\sqrt{3} \times 360°$. Ici apparaissent des parastiches, il y en a 4, bien visibles, dans un sens et 11, un peu moins visibles, dans l'autre. Mais, comme on le constate, cela ne ressemble pas à un tournesol et les nombres de parastiches ne forment pas un couple de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

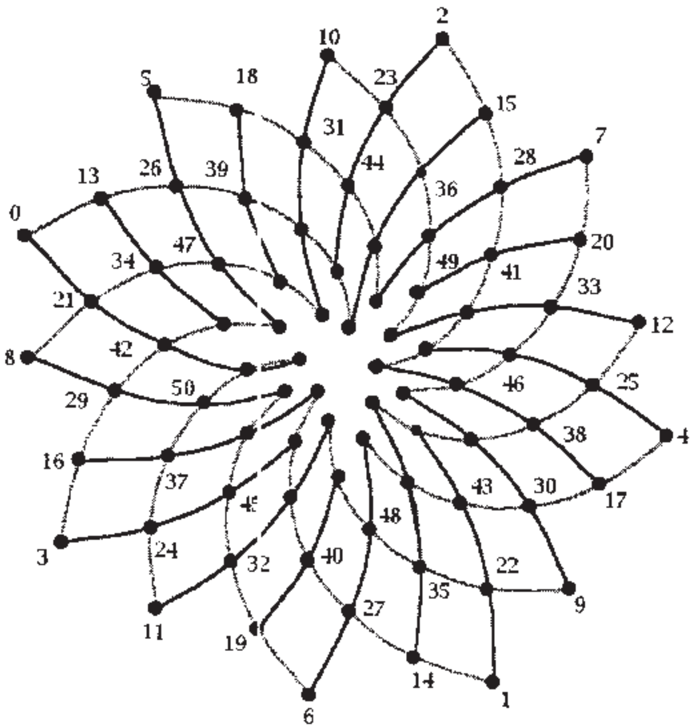
Le troisième exemple (figure 5) est plus proche de la configuration du cœur de tournesol. Ici, l'angle est l'angle d'or, c'est-à-dire un un angle de mesure $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 360°$. On distingue bien 8 spirales dans un sens et 13 dans l'autre. C'est le cas qui se produit dans la nature.

Remarque. On remarque qu'il est possible de former plusieurs familles de spirales tournant dans un sens donné. Par exemple dans la figure 5, on peut considérer la spirale (0, 5, 10, 15, …) et la spirale (0, 13, …). En fait dans la nature les parastiches sont constitués de chaînes de *graines* attenantes et orientées. Qu'une famille soit plus visible qu'une autre doit dépendre de facteurs comme la vitesse de la pousse et du nombre de *graines*. Néanmoins, quelle que soit la famille la plus visible, le nombre de parastiches est toujours un nombre de la suite de Fibonacci.

On met ensuite en commun les observations recueillies. Si besoin est, il est possible de distribuer des dessins faits à l'avance. Il restera à reconnaître les dessins ressemblant le plus au tournesol et à compter le nombre de spirales. On peut ensuite essayer de comprendre pourquoi, pour l'angle de mesure rationnel, les graines sont alignées et pas pour les autres. On peut aussi parler de la mesure de l'angle, de nombres fractionnaires ou rationnels, de nombres irrationnels, …

Enfin, pour clore l'atelier avec une tâche simple et pour que chacun puisse repartir avec un dessin *réussi*, on peut distribuer un schéma (document E) du type de celui de la figure 5 où ils pourront tracer les spirales en joignant les *graines*.

Angle d'or et suite de Fibonacci. Deux physiciens français S. Douady et Y. Couder (voir la bibliographie) ont expliqué pourquoi cet angle apparaissait naturellement dans le processus de développement des plantes à partir de principes simples. Mais ceci n'est pas notre propos. La question à laquelle nous pouvons répondre est *pourquoi les nombres de parastiches sont-il égaux à deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci ?* Regardons plus attentivement le dessin des parastiches sur le schéma de la (figure 6).



Visualisation des parastiches pour l'angle d'or (figure 6)

Considérons le parastiche joignant les points 0, 13, 26 et 39. Appelons-le p_0. On obtient tous les autres parastiches de même sens par rotation de celui-ci. Les numéros des points les composant se déduiront simplement de ceux de p_0 par l'ajout d'un nombre entier. Si on appelle p_1, p_2, … les parastiches qui commencent respectivement par les points de numéros 1, 2, …, on obtient le tableau :

	Numéro des points		Numéros des points
p_0 :	0 13 26 39	q_0 :	0 21 42
p_1 :	1 14 27 40	q_1 :	1 22 43
p_2 :	2 15 28 41	q_2 :	2 23 44
⋮		⋮	
p_{11} :	11 24 37 50	q_{19} :	19 40
p_{12} :	12 25 38	q_{20} :	20 41

Le second tableau est celui de la famille de parastiches qui s'enroulent dans l'autre sens et que nous avons appelés q_0, q_1, ...

En ce qui concerne le nombre de parastiches de chaque famille, il suffit de s'intéresser au *quadrilatère* de sommets 0, 13, 21 et 34. Regardons le point 0. Les points les plus proches de lui sont les points 13 et 21. Pour déterminer le nombre de parastiches dans chaque famille, il suffit de remarquer que le point 13 est le premier qui n'est pas au bout d'un parastiche de type p. Les points suivants seront également à l'*intérieur* d'un parastiche de type p. Par ailleurs, le point 21 est le premier qui n'est pas au bout d'un parastiche de type q. Il y a donc exactement 13 parastiches dans un sens et 21 dans l'autre. La règle générale est la suivante.

Les nombres de parastiches dans chaque famille sont égaux aux numéros des deux points situés le plus près du point de numéro 0.

Cette règle s'applique quel que soit l'angle dont la mesure est une fraction de 360° (considérez les figures 4 et 5). En revanche, elle n'explique pas pourquoi, dans le cas de l'angle d'or, ce sont les nombres de la suite de Fibonacci qui apparaissent.

En fait, il faut comprendre pourquoi les points les plus proches du point 0 sont ceux qui ont des numéros fibonacciens.

Rappelons que lorsque la mesure de l'angle de rotation est du type $\frac{p}{q} \times 360°$, alors le q-ième point est aligné avec le 0-ième et le centre de la fleur comme le montre la figure 3. De plus ce q-ième point est très proche du 0-ième. Imaginons que la mesure de l'angle ne soit pas une fraction, mais qu'il existe un couple de nombres (p, q) tels que $\frac{p}{q} \times 360°$ soit très proche de la mesure l'angle en question. Le q-ième point ne sera pas exactement aligné avec le 0-ième et le centre, mais presque et il sera en tout cas proche du 0-ième point. Pour l'angle d'or de mesure $\frac{1}{\phi} \times 360°$, il y a plusieurs couples (p, q) tels que $\frac{p}{q} \times 360°$ soit proche de

$\frac{1}{\phi} \times 360°$, précisément les couples (2 3), (3 5), (5 8), (8 13), … constitués de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci comme nous l'avons expliqué au paragraphe 2. Par conséquent, les points les plus proches du point nº 0 sont les points nº 3, nº 5, nº 8, nº 13, nº 21, nº 34, … comme on le vérifie dans les figures 5 et 6. Les numéros des deux points les plus proches du point nº 0 dépendent de paramètres comme le nombre total de points et la vitesse d'éloignement du centre, mais ce sont toujours deux nombres consécutifs dans la suite de Fibonacci. Plus précisément, par un calcul, on peut montrer que rechercher les points les plus proches du point nº 0 revient encore à rechercher les nombres entiers k tels que l'expression

$$g(k)^2 + g(0)^2 - 2g(k)g(0)\cos(k \times \alpha)$$

soit minimale, la lettre α désignant la mesure de l'angle que fait une nouvelle graine avec la précédente et $g(k)$ la distance du point de numéro k au centre de la fleur. Ces minima sont précisément donnés par deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci lorsque l'angle est l'angle d'or.

Bibliographie

– Un article de Stéphane Douady et Yves Couder expliquant la présence de l'angle d'or en phyllotaxie : *La physique des spirales végétales*, in La Recherche 250, janvier 1993, volume 24.

Il existe d'innombrables sites consacrés à la suite de Fibonacci, au nombre d'or et aux spirales végétales sur la toile. Nous en proposons quatre que nous jugeons intéressants.

– En guise d'introduction, un excellent site consacré à un T.P.E. d'élèves de terminale du Lycée Romain Roland d'Ivry-sur-Seine (2001/2002) : *Les spirales du tournesol*,
http: //tpe.tournesol. free. fr/tournesol. htm

– Un site hébergé par l'Université Libre de Bruxelles à propos des nombres de Fibonacci dans la nature : *Les mathématiques dans la nature, les nombres de Fibonacci*,
http: //www.ulb.ac.be/soco/matsch/recherche/22/fibonacci/fibonacci.htm

– Une page à télécharger sur le site de la Commission Romande de Mathématique : *Fibonacci et le nombre d'or en botanique*,
http: //www.sspmp.ch/crm/telecharger/Fibonacci.pdf

– Un site britannique très documenté et hébergé par l'University du Surrey à Guildford : *Fibonacci Numbers and Nature*,
http: //www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat2.html

Les documents nécessaires à la réalisation de l'atelier

Document A. Le tableau de suivi.

Les tableaux reproduits dans ce document décrivent les séances d'atelier telles qu'elles se sont déroulées lors de leur expérimentation à l'école élémentaire d'Andlau durant l'année scolaire 2002/2003. Ils permettent de se représenter une possibilité de mise en oeuvre des ateliers. Le temps donné pour chaque phase est purement indicatif.

Document B. Une photographie de tournesol

Cette photographie volontairement en noir et blanc est distribuée aux enfants en phase d'observation. Ils peuvent y tracer les spirales au feutre de couleur afin d'en compter le nombre.

Document C. Les cibles vierges

Ces figures sont constituées de cercles concentriques tels que deux cercles voisins soient à une distance constante l'un de l'autre. Les enfants se serviront de ces *cibles* pour y tracer les *graines* de tournesol en s'aidant des gabarits. La première figure comporte 20 cercles et la seconde 34. Nous avons conçu ces figures en couleur en alternant la couleur d'un cercle à l'autre. Cela permet de distinguer deux cercles voisins et facilite grandement le tracé.

Document D. Les gabarits d'angle

Ces modèles de gabarits peuvent être reproduits sur du carton et découpés. Les enfants s'en serviront pour placer les points qui représentent les *graines* à un angle constant les unes des autres. Chaque gabarit correspond, dans un sens que nous expliquons ci-dessous, à un angle de mesure $\alpha \times 360°$ où α vaut respectivement $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\sqrt{5}-1$, $\sqrt{3}-1$ et $\frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.Chacun de ces nombres est reproduit sur le gabarit correspondant.

Comme toutes les mesures d'angles en question sont supérieures à 180°, nous avons construit des gabarits d'un angle complémentaire. Cela ne change naturellement pas le tracé. L'angle de chaque gabarit a donc comme mesure réelle $360° - \alpha \times 360°$ où α est le nombre qui est inscrit sur sa face.

Document E. La répartition des graines avec l'angle d'or

Cette figure est le tracé des graines avec l'angle d'or. Elle a été distribuée en fin d'atelier afin que les enfants y visualisent les deux familles de spirales à l'aide de feutres de couleur et comptent le nombre de spirales de chacune.

En annexe, nous reproduisons le Document A. Les autres documents sont téléchargeables à l'adresse :

http ://www-irma.u-strasbg.fr/~wambst/Irem/Atelier/brochure.html

Ils se trouvent sous la rubrique « L'article pour le bulletin de l'APMEP ».

Document A Tableau de suivi Atelier Fibonacci

Les spirales du tournesol

Déroulement de l'atelier en cycle 3 à l'École élémentaire d'Andlau en 2002/2003 — **Première séance - 1**

Temps	Phase	Déroulement, consignes données (en italiques)	Réaction des élèves, remarques
10 min.	**Observation individuelle et/ou par groupe**	*J'ai placé sur chaque table des fruits et des légumes. Vous allez les observer et dans 5 minutes nous mettrons oralement en commun toutes vos remarques.* L'institutrice a montré et nommé ou fait nommer les divers fruits.	
10 min.	**Mise en commun collective**	L'institutrice a interrogé les élèves par tablée, en leur demandant de ne pas répéter ce qu'un camarade a déjà dit. Pour affiner l'observation, il leur a été demandé de s'intéresser plus précisément à la répartition des *écailles*.	Les enfants remarquent relativement rapidement les motifs se trouvant sur la fleur de tournesol. L'institutrice a dû leur proposer de tourner la pomme de pin avant qu'ils ne se rendent compte des motifs similaires à ceux du tournesol.
5 min.	**Observation individuelle et/ou par groupe**	*Comment sont réparties les graines du tournesol ? Essayez de faire un schéma pour illustrer la répartition.*	
10 min.	**Mise en commun collective**	La photographie du tournesol est affichée en format A3 au tableau. Les observations des enfants ont été recueillies et il leur a été demandé d'illustrer leur propos sur l'affiche. Les deux séries de lignes ont été matérialisées par deux couleurs différentes.	Un enfant a parlé d'une rosace qui apparaît sur le tournesol et l'a schématisée avec des lignes qui se croisent et vont dans deux directions différentes. Ceci a permis d'embrayer directement sur le comptage des lignes.

Les spirales du tournesol

Déroulement de l'atelier en cycle 3 à l'École élémentaire d'Andlau en 2002/2003 **Première séance - 2**

Temps	Phase	Déroulement, consignes données (en italiques)	Réaction des élèves, remarques
10 min.	**Travail commun collectif**	*Et si nous comptions le nombre de courbes qui vont dans un sens puis celles qui vont dans l'autre sens ?* *Tracez la ligne au feutre en même temps que vous comptez pour ne pas compter deux fois la même ligne.* *Changez de couleur quand on change de direction.* On leur a conseillé de partir de l'extérieur pour les tracer plus facilement.	Certains enfants se sont « emmêlés les crayons ». Ce n'est pas facile d'avoir les deux couleurs sur le même dessin. Il faut prévoir deux photocopies, l'une pour compter les courbes senestres et l'autre pour les dextres. Plusieurs enfants ont néanmoins trouvé les bons nombres.
	Travail collectif	Les résultats du comptage (21 et 34) ont été écrits au tableau. Préciser que le nombre de courbes varie en fonction de la taille du tournesol.	L'institutrice a rajouté que le nombre de courbes dépendait de la taille de la fleur de tournesol et indiqué le nombre pour des tailles différentes (par exemple 34 et 55 ou 55 et 89 ou 89 et 144). Ceci a été écrit au tableau.
10 min.	**Observation et travail par deux**	*Nous allons maintenant compter les spirales (dans les deux sens) qui se trouvent sur la pomme de pin, sur l'ananas et sur l'artichaut.* *Vous allez noter sur la feuille les nombres que vous trouvez.* *Utilisez la craie pour ne pas compter deux fois la même courbe.*	Il y a eu des problèmes de comptage pour l'artichaut et les petites pommes de pin. Mais au moins un groupe a trouvé le résultat escompté : artichaut et pomme de pin : 5 et 8. Certaines pommes de pin : 3 et 5. Ananas : 8 et 13.
5 min.	**Mise en commun collective**	Les résultats ont été confrontés, validés puis notés au tableau. Tous les couples de nombres de courbes sont notés au tableau. *Est-ce que vous avez une remarque à faire ?*	

Les spirales du tournesol

Déroulement de l'atelier en cycle 3 à l'École élémentaire d'Andlau en 2002/2003 — **Première séance - 3**

Temps	**Phase**	Déroulement, consignes données (en italiques)	Réaction des élèves, remarques
15 Min.	**Recherche par deux**	La suite de nombres : 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - 34 - 55 - 89 - 144 - ?? a été écrite au tableau. *Il existe une relation entre tous ces nombres. Je vous demande de la trouver et de m'indiquer quel sera le nombre suivant.* Si certains groupes sèchent, leur dire : *Regardez si un nombre de cette liste ne peut pas être fabriqué avec les autres nombres de la liste.*	Seule une tablée n'a pas trouvé le lien entre les nombres. Quelques élèves (8 sur 30) ont trouvé en moins de 3 min., les autres ont eu besoin de l'aide. Tous ont vérifié sans difficulté.
	Mise en commun puis vérification à deux	L'institutrice a fait énoncer oralement la relation entre les nombres, puis les élèves ont vérifié pour les premiers nombres de la suite.	
10 min.	**Mise en projet de l'activité de la semaine suivante**	*Dans la suite de l'atelier, nous allons dessiner une fleur de tournesol en représentant les graines.* *Pour cela il faut d'abord se questionner sur l'ordre d'apparition de ces graines.* *Où apparaît la nouvelle graine quand la fleur pousse ?* Il a été expliqué qu'une nouvelle graine apparaît au centre de la fleur et pousse les anciennes vers le bord. La graine la plus ancienne se trouve ainsi au bord de la fleur. On a utilisé un schéma de cercles concentriques en y plaçant la première graine à l'aide de taquets magnétiques. *Où va apparaître la seconde ?* Après discussion, la solution a été donnée : *Chaque graine se trouve sur un cercle différent et sera décalée par rapport à la précédente suivant un certain angle.* Montrer un gabarit d'angle et les cercles concentriques, le matériel que les enfants utiliseront dans la suite.	L'idée de la première graine au centre de la fleur est apparue comme celle de la première graine au bord. Mais après les explicitations de deux enfants, les autres ont adhéré à l'idée que les graines *arrivent* par le centre et se font *éjecter* vers le bord. À la question de savoir où apparaît la graine suivante, l'idée du même cercle a été rejetée assez rapidement : *la fleur serait trouée !* L'idée de changement de cercle avec une graine alignée avec la précédente a aussi été rejetée : *on ne verrait pas de spirales dans le cœur de la fleur !* Nous avons résumé ainsi : la première graine sera dessinée sur le cercle le plus éloigné du centre, et la seconde sur le cercle suivant avec un certain angle d'écart par rapport à la première et ainsi de suite en respectant le même angle d'écart.

Les spirales du tournesol
Déroulement de l'atelier en cycle 3 à l'École élémentaire d'Andlau en 2002/2003 **Seconde séance - 1**

Temps	**Phase**	Déroulement, consignes données (en italiques)	Réaction des élèves, remarques
10 min.	**Rappel collectif**	*Qui peut me rappeler ce que nous avons observé la fois dernière ?* *Qu'avons-nous remarqué ? Quelle relation liait tous ces nombres ?* Les premiers nombres de la suite de Fibonacci ont été réécrits au tableau et il a été demandé aux élèves de retrouver les suivants. La relation qui existe entre les termes de la suite a été rappelée oralement. *Qu'allons-nous faire aujourd'hui ? Comment tracer les spirales ?* Les explications du modèle de la pousse des graines ont été redonnées à l'aide d'une affiche représentant des cercles concentriques. L'institutrice a montré comment tracer les graines à l'aide du gabarit d'angle. Elle a insisté sur le fait qu'il faut tracer des traits (à grossir par la suite), qu'il faut placer l'angle sur le centre et qu'un de ses côtés doit reposer sur la dernière graine tracée. *Attention ! On doit toujours tourner dans le même sens !*	Les enfants se souvenaient bien de ce qui avait été fait la semaine dernière. La relation entre les nombres a été mémorisée par le plus grand nombre. La difficulté résidait dans la façon de l'exprimer à l'oral : beaucoup utilisaient un exemple. Certains enfants se souvenaient que la graine la plus ancienne se situait sur le cercle extérieur et que chaque nouvelle graine apparaissait sur un nouveau cercle.

Les spirales du tournesol

Déroulement de l'atelier en cycle 3 à l'École élémentaire d'Andlau en 2002/2003 **Première séance - 2**

Temps	**Phase**	Déroulement, consignes données (en italiques)	Réaction des élèves, remarques
45 min.	**Tracé individuel**	Le matériel a été distribué : une feuille avec les cercles concentriques et un gabarit d'angle à chaque élève. **Vous pouvez commencer. Attention à ne pas vous laisser distraire !** Les gabarits d'angle relatifs à 2/7 et 3/5 sont distribués aux CE2 avec une feuille avec 20 cercles (ils sont moins proches les uns des autres). Les gabarits d'angle relatifs à $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-1$ et $\sqrt{5}-2$ sont distribués aux élèves qui n'ont pas de difficultés majeures avec une feuille avec 20 cercles ou 30 cercles pour les enfants appliqués. Les gabarits d'angle relatifs à $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ sont distribués aux élèves les plus soigneux avec une feuille de 30 cercles. *Grossissez vos graines, puis tracez les courbes que vous voyez apparaître.*	Les tracés qui ont causé le plus de soucis étaient ceux avec la fraction car les points ne sont guère alignés. Cela est dû à la répercussion d'une petite erreur d'un cercle à l'autre. Les enfants ont aussi dit que le modèle à 30 cercles était plus difficile à remplir : *Tout se mélange dans les yeux*. Les résultats ont néanmoins été satisfaisants. Les enfants ont effectué chacun deux tracés avec des gabarits d'angle différents. Au cours des tracés, ils se sont déjà rendus compte que l'angle avait une incidence sur le dessin. Mais au départ ils pensaient que leur voisin avait fait une erreur.
10 min.	**Mise en commun au sein des groupes**	*Vous allez observer vos tracés et établir un classement de votre choix, mais il faut le justifier.* On a pris soin de n'induire aucun classement en particulier pour provoquer une discussion parmi les enfants.	Curieusement, les enfants n'ont absolument pas tenu compte, à ce moment de la séance, des nombres inscrits sur les gabarits. Certains ont fait un classement selon le nombre de spirales. Ils ont été mis en difficulté par un effet d'optique faisant penser que le nombre de spirales dépendait du nombre de points dessinés. D'autres, n'ayant tracé qu'une famille de spirales, ont classé leurs dessins d'après la forme.

Les spirales du tournesol
Déroulement de l'atelier en cycle 3 à l'École élémentaire d'Andlau en 2002/2003 — **Seconde séance - 3**

Temps	**Phase**	Déroulement, consignes données (en italiques)	Réaction des élèves, remarques
15 min.	**Mise en commun collective**	Plusieurs tracés soignés de différents gabarits d'angle ont été choisis et affichés, pêle-mêle, au tableau. *Comment classez-vous ces dessins ?* Deux enfants sont allés au tableau effectuer leur classement et l'expliquer. *Qui est d'accord ? Qui ne l'est pas ? Pourquoi ?* Le débat s'est installé.	Le tri concernant les fractions a été assez difficile car les tracés des enfants étaient assez imprécis, ce qui a donné une catégorie *tracés inclassables*. L'institutrice leur a montré des tracés précis fait à l'avance pour 2/7 et 3/5. Ils en ont déduit que ces tracés étaient différents de ceux relatifs à $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-1$ et $\sqrt{5}-2$ car les lignes de graines étaient droites et non courbes. Le tri des tracés relatifs à $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-1$ et $\sqrt{5}-2$ a aussi posé problème. Il a fallu vérifier que le nombre de branches de la spirale était le même pour tous les gabarits de ce groupe. Il restait donc les tracés relatifs à $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ sachant que certains avaient tracé les deux familles de courbes et les autres non. Mais ces tracés avaient été exclus de la catégorie précédente car le nombre de courbes était plus grand. Les enfants qui avaient oublié de tracer une famille de courbes l'ont remarqué et ont corrigé par la suite. Cette discussion a été très riche !
10min.	**Tracé individuel et coloriage suivant le temps**	Le modèle de tracé avec le gabarit $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ des graines de la fleur de tournesol a été distribué (chaque enfant ne l'avait pas tracé à l'aide des cercles concentriques et du gabarit d'angle). *Vous allez tracer les deux séries de courbes sur le modèle que je vous donne.*	Pour certains enfants, il est encore difficile de voir les deux séries de courbes, l'une est facilement visible, pour l'autre, il faut les aider à tracer la première courbe de la série. Cela les aide de leur dire de choisir la graine (de la courbe) qui se trouve le plus à l'extérieur et de tracer en allant jusqu'au centre.