# Critère universel de divisibilité

Jean-Marc Cahen(*)

Cette année encore, à l'occasion de considérations arithmétiques, une élève de Seconde est venue au tableau, par elle-même et après avoir réfléchi à la maison, démontrer le critère de divisibilité par trois.
Je l'ai poussée à en chercher d'autres, vu la preuve qu'elle avait donnée. Elle revient deux jours plus tard avec un critère de divisibilité, pas très marquant, par sept. À le lire et à discuter avec elle, je vois bien qu'elle a redécouvert l'« algorithme » de Pascal (*Des caractères de divisibilité des nombres déduits de la somme de leurs chiffres*, période 1649-1654[1]).
Voici ce qu'elle a écrit.

Un critère de divisibilité est toujours utile pour les grands nombres. Tous les critères de divisibilité existent, je l'explique plus loin, mais sont plus ou moins compliqués et plus ou moins intéressants selon les nombres, comme nous allons le voir.

Le principe est le suivant : pour trouver un critère de divisibilité par $m$, on prend un nombre $\overline{abc}^{10}$ que l'on décompose et que l'on factorise le plus possible par $m$, comme ceci :

$$\begin{aligned}\overline{abc}^{10} &= 10^2 a + 10b + c \\ &= (fm + x)\,a + (gm + y)\,b + c \\ &= m\,(fa + gb) + xa + yb + c.\end{aligned}$$

De là, on sait que si $xa + yb + c$ est multiple de $m$, $abc$ le sera également.

On peut par cette méthode démontrer le critère de divisibilité par trois, critère très connu et très utilisé :

$$\begin{aligned}\overline{abcd}^{10} &= 10^3 a + 10^2 b + 10c + d \\ &= 999a + a + 99b + b + 9c + c + d \\ &= 3\,(333a + 33b + 3c) + a + b + c + d.\end{aligned}$$

Donc si $a + b + c + d$ est multiple de trois, $\overline{abc}^{10}$ l'est aussi. Ce critère vaut pour tous les nombres, quel que soit leur nombre de chiffres, puisque

$$10^n = 999\ldots9 + 1.$$

Appliquons cette méthode pour trouver un critère de divisibilité par sept :

(*) Lycée Les Pierres Vives (78).

(1) On trouvera ce texte dans les œuvres complètes de Pascal, par exemple dans l'économique version l'Intégrale au Seuil, 1963.

$$\overline{abc}^{10} = 10^2 a + 10b + c$$
$$= (98+2)\,a + (7+3)\,b + c$$
$$= 7\,(14a+b) + 2a + 3b + c.$$

Ainsi, tout nombre à trois chiffres *abc* tel que $2a + 3b + c = 7p$ est un multiple de sept.

On peut appliquer cette méthode de divisibilité par $m$ à tous les nombres, quel que soit leur nombre des chiffres.

Remarque : Si $10^n < m$, on fait à la place de la division euclidienne :

$$10^n \times c = (m - x)\,c.$$

J'ai laissé tel quel ce qu'elle a écrit, et j'invite tous ceux qui ne l'auraient pas encore fait à lire le texte magnifique de Pascal[1] (toutes les idées concernant ce problème y sont).

Je laisse à chacun le soin de *traduire en langage contemporain* (via le langage des congruences) et ce qu'a écrit Marie Lhuissier et ce qu'a écrit Pascal, afin de synthétiser. On s'apercevra une fois encore de la force de l'écriture juste, de la puissance résolutoire du langage mathématique une fois « bien écrit » le problème envisagé.

Je termine, sommairement, par quelques commentaires mathématico-pédagogiques.

1) Il faut oser pousser plus loin la lecture de certaines productions d'élèves. Il s'avère parfois que s'y cachent des idées profondes, à leur niveau. J'aurais pu être rebuté par son critère par 7 (il semble bien compliqué, on se demande bien quel en est l'intérêt) et surtout par le style lourd et apparemment peu rigoureux[2] qui l'explique. À relire Pascal et à reconsidérer le problème j'ai bien vu la profondeur avec laquelle Marie avait compris le critère de divisibilité par trois en base dix.

2) Car il est une erreur, il me semble, qui consiste à négliger la base de numération dans laquelle nous écrivons les nombres (numération de position de base $b$, avec $b = 10$ dans la société actuelle). D'où le caractère apparemment magique du caractère de divisibilité par 3. Mais cela est tout simplement dû à la contingence « $10 \equiv 1$ modulo 3 » ! Au niveau de la Seconde on peut tout à fait demander en exercice aux élèves de donner (et démontrer, mais c'est un peu formel quand on a bien compris la première démonstration) des critères quand la base est 6 par exemple. À cette occasion on rencontre les problèmes de changement de base, forts utiles en informatique et passionnants : les élèves éveillés adorent le problème qui consiste à chercher de nouveaux chiffres quand la base choisie est supérieure à dix. Sans parler des difficultés (amusantes) à lire les nombres nouvellement écrits. Comment lisez-vous $\overline{23}^{4}$ ?

3) Enfin, il y a le problème des démonstrations. J'ai constaté que beaucoup d'entre

(2) Le texte de l'élève ici reproduit a été retravaillé plusieurs fois sous mon contrôle répété.

nous (les professeurs de mathématiques) s'interdisent des démonstrations sous prétexte d'un manque potentiel de rigueur. En effet, démontrer sur un exemple semble être une contradiction dans les termes. Non ! Cette idée est une conception rigide de la démonstration. Démontrer le critère de divisibilité par 3 sur un exemple de nombre (un nombre quelconque à trois chiffres ou, pire, comme le fait Pascal, sur un nombre particulier) fait pour moi office de démonstration si les idées (congruence modulo 3, compatibilité avec les opérations) sont clairement mises en avant. Il me semble inutile (sauf peut-être en Terminale S Spécialité pour familiariser les élèves avec les indices) de démontrer le critère sur un nombre quelconque à $n$ chiffres.
En s'interdisant de fausses pseudo-démonstrations, on s'interdit malheureusement des mathématiques pertinentes.