# L'enseignement de la géométrie au cycle 3 : objectifs, contenus, articulation avec la sixième

Marie-Hélène Salin(*)

Le nouveau programme de l'école primaire définit de manière assez détaillée les objectifs et les moyens à mettre en œuvre au cycle 3 pour enseigner « l'espace et la géométrie ». Dans l'atelier, après une explicitation des objectifs de ce programme, nous avons examiné des exemples d'activités(1) d'un double point de vue : quelles connaissances ces activités permettent-elles de développer au cycle 3, pourquoi et comment prendre en compte ces connaissances en Sixième ?

## I) Dans quelle perspective s'inscrit le programme de l'enseignement de « l'espace et la géométrie » à l'école élémentaire ?

### A) Pourquoi « espace et géométrie » ?

Au cycle 3 comme au cycle 2, les programmes font mention du terme « espace ». Pourquoi cet ajout ? Les formulations des programmes antérieurs ne suffisaient-elles pas ? Cette nouvelle explicitation marque bien qu'il ne s'agit pas, à l'école primaire, de faire ce qu'on fait au collège(2).

#### 1) Qu'appelle-t-on géométrie, à l'école élémentaire puis au secondaire ?

De manière générale, la géométrie a bien à voir avec les connaissances de l'espace. Mais pour mieux affiner, faisons un détour qui permet de différencier de manière stricte deux sortes de problèmes qui renvoient aux connaissances couramment qualifiées de « géométriques ».

**Ex 1** : *le cas du vitrier*
J'ai effectivement observé les difficultés d'un artisan qui devait prendre, à mon domicile, les mesures d'une fenêtre de forme parallélogramme. Très ennuyé pour découper une vitre adaptée, il a fini par préalablement préparer un cadre en bois correspondant aux diverses mesures saisies. Il a ensuite comparé ce gabarit à la fenêtre, puis en a ajusté la forme. Le problème du vitrier consistait à prendre les bonnes informations, garantissant que le verre découpé aurait bien la forme voulue. Mais des connaissances lui manquaient : la maîtrise du caractère déformable ou non des figures dont on connaît les longueurs des côtés.

---

(*) IUFM d'Aquitaine.
(1) Ce compte rendu ne peut contenir tous les exemples donnés.
(2) Contrairement à certains exercices proposés dans des manuels dès le CE2 !

**Ex 2 :** *Un exemple simple de « problème de géométrie »*
Construire un segment [AC] de 5 cm.
Construire un triangle ARC tel que AR = 3 cm et RC = 4 cm.
Un raisonnement géométrique (une démonstration) permet de prévoir, avant même de l'avoir tracé, que le triangle ARC est rectangle en R.

**Tout le monde s'accorde pour dire que ces deux problèmes sont de nature différente.**

Nous avons proposé d'appeler « problèmes spatiaux » (le premier énoncé est de ce type) les problèmes :
– dont la finalité concerne l'espace sensible ;
– qui peuvent porter sur la réalisation, soit d'actions (fabriquer, se déplacer, déplacer, dessiner, etc.), soit de communications à propos d'actions ou de constats ;
– dont le langage et les représentations spatiales permettent de communiquer des informations qui se substituent à la perception ;
– dont la réussite (ou l'échec) est déterminée par le sujet en comparant le résultat attendu avec le résultat obtenu.

Nous désignons le second énoncé comme un « problème de géométrie », conformément au sens que les mathématiques attribuent au terme « géométrie ». Résoudre un problème de géométrie est une activité qui concerne le caractère nécessaire de certaines propriétés des objets de la géométrie.
Ici, l'affirmation de la nature du triangle n'est pas la conséquence d'un rapport à l'espace sensible, car le raisonnement peut être tenu sur une figure mal faite, ou même sans figure. La démonstration produit un résultat qui va bien au delà de telle figure, tracée à tel endroit sur la feuille de papier, puisqu'il caractérise tous les triangles dont les longueurs de côtés sont proportionnelles au triplet (3, 4,5).
Les situations de géométrie mettent donc un sujet « mathématicien » en interaction avec un milieu qui n'est plus l'espace physique et ses objets, mais un espace conceptualisé, que les « figures-dessins(3) » tracées par ce sujet ne font que représenter. La validité des déclarations n'est plus établie empiriquement, mais s'appuie sur des raisonnements qui obéissent aux règles du débat mathématique. La fonction des dessins est, comme le dit le mathématicien Poincaré, de provoquer la mise en relation de propositions que l'on sait associer à tel ou tel tracé ou portion de dessin. Mais le constat de ces propriétés sur une « figure-dessin » ne permet pas de valider la proposition mise à l'étude, qui, elle, concerne la « figure géométrique ». C'est ce que les élèves de collège ont tant de mal à comprendre, **parce que les deux démarches sont radicalement différentes**.
**Les connaissances nécessaires à la résolution des deux types de problèmes** ne sont pas les mêmes, même si certaines d'entre elles entretiennent des rapports très proches. Leur genèse chez l'enfant, le vocabulaire et l'organisation des connaissances ne coïncident pas.

(3) B. Parsysz (1989) propose de distinguer figure et dessin : « nous réserverons le terme de figure à l'être mathématique, tandis que nous emploierons le mot dessin pour une représentation graphique (plane) de cette figure ».

Toutefois, leur rapport est évident : la géométrie constitue « la science des situations spatiales ». La maîtrise de l’espace, c’est-à-dire la possibilité d’un contrôle efficace par le sujet de ses relations à l’espace sensible, est facilitée s’il dispose des connaissances géométriques qui s’appliquent au problème qu’il a à résoudre (ce qui n’était pas le cas du vitrier).
De manière générale, la géométrie est un outil pour décrire et agir sur le monde physique, à l’usage des utilisateurs scientifiques et techniques. Il faut souligner que la plupart de nos élèves ne seront pas mathématiciens, mais que nombreux seront parmi eux les utilisateurs…
Les notions élémentaires fondamentales sont : les droites, les angles, les plans, les points et les relations entre ces objets (dont l’inclusion, le parallélisme, la perpendicularité, les rapports de mesure), et les mesures (longueurs, surfaces, volumes). Le théorème de Thalès, joyau de l’enseignement, articule un grand nombre de ces aspects et permet une modélisation à l’échelle (c’est-à-dire une lecture directe des mesures du « monde » à partir des mesures de sa représentation). Ajoutons que la mise en œuvre de la géométrie dans le monde physique implique la prise en compte d’approximations, prise en compte non assumée (c’est peu dire) par l’enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire.

**2) Revenons à l’école primaire**. Il est bien évident que ce n’est pas la géométrie au sens mathématique que l’on veut faire pratiquer aux élèves. En intitulant le programme « espace et géométrie », les auteurs veulent insister sur le fait qu’il s’agit d’abord de munir les élèves des outils nécessaires à la maîtrise des problèmes spatiaux qu’ils ont à résoudre. C’est le sens du paragraphe :

> Les activités du domaine géométrique **ne visent pas des connaissances formelles (définitions)**, mais des **connaissances fonctionnelles**, utiles pour **résoudre des problèmes dans l’espace ordinaire, dans celui de la feuille de papier ou sur l’écran d’ordinateur**, en particulier des problèmes de comparaison, de reproduction, de construction, de description, de représentation d’objets géométriques ou de configurations spatiales (notamment, représentations planes de solides).

Les connaissances sur les plans et les cartes relèvent de la maîtrise des problèmes spatiaux.

**B) L’enjeu des apprentissages de l’école élémentaire:**

Face à un problème spatial, nous mobilisons des connaissances et essayons de le résoudre de la manière la plus économique qui soit, comme l’a fait le vitrier. Pour lui, cette activité n’a pas été l’occasion d’apprendre de la géométrie parce qu’il pouvait atteindre son but à peu de frais. Il n’avait qu’un seul modèle de vitres à découper, le gabarit en bois était donc efficace. Ce vitrier est resté dans une problématique qu’on peut qualifier de « pratique ». Mais s’il avait eu à découper des vitres de toutes tailles, il aurait été obligé de procéder autrement, par exemple en s’appuyant sur un modèle mathématique (ici très simple) lui fournissant une solution générale. Il aurait alors dû se situer dans une problématique de « modélisation », ce que font tous les professionnels dont les tâches relèvent du domaine spatial.

L'objectif de l'enseignement primaire est de fournir aux élèves les outils nécessaires à la résolution de problèmes spatiaux, en allant au delà du « bricolage ». Par exemple dans un problème de reproduction d'un « objet géométrique » plan, cela pourrait se traduire par le recours au gabarit ou au papier calque, en court-circuitant l'apprentissage des propriétés qui permettent de le décrire et de le reproduire.
Il s'agit donc d'introduire les notions géométriques qui servent à modéliser l'espace physique, et de les faire fonctionner dans des situations auxquelles les élèves donnent du sens.

### C) Illustration sur les programmes du cycle 3

Pour en comprendre l'esprit, il faut tenir compte à la fois :
• des objectifs (en particulier de celui-ci : « Les activités du domaine géométrique ne visent pas des connaissances formelles (définitions), mais des connaissances fonctionnelles, utiles pour résoudre des problèmes dans l'espace ordinaire, dans celui de la feuille de papier ou sur l'écran d'ordinateur» ;
• et de la liste des compétences fournie par le programme.
Il n'est pas question d'utiliser cette liste comme une liste d'activités pour l'apprentissage, mais de construire des situations qui permettent de donner du sens aux concepts géométriques listés (et qui favoriseront donc la formation de ces compétences).

## II) Quelques pistes de travail pour l'apprentissage et pour l'entraînement

### A) Des propositions de familles de problèmes spatiaux adaptés à l'enseignement au cycle 3

– Reproduire ou construire un objet (ou un assemblage d'objets) dans différents cas :
    * l'objet à reproduire est disponible et manipulable ;
    * l'objet à reproduire n'est disponible qu'avant l'exécution de la tâche (il faut prélever et noter les informations nécessaires) ;
    * l'objet n'est pas disponible mais on peut interroger celui qui le possède ;
    * l'objet n'est pas disponible, mais on dispose d'une description orale, écrite ou schématisée.

Pour ces différentes activités, on peut varier les supports et les outils disponibles.
– Décrire ou représenter un objet géométrique (ou un assemblage d'objets) en vue de sa reproduction.
– Comparer des objets géométriques (ressemblances, différences), les classer, rechercher des propriétés communes ou spécifiques.
– Construire des objets (ou des assemblages d'objets) en respectant des contraintes particulières (fournir une liste de propriétés, présence de certains éléments déjà dessinés).
– Réaliser des assemblages (frises, pavages, par exemple) d'objets géométriques en utilisant certaines transformations géométriques (qui ne seront pas étudiées pour elles-mêmes).

– Construire et utiliser le plan d'un espace physique pour résoudre des problèmes de mesure.
– Utiliser ou construire un système de repérage pour situer un objet dans le plan ou pour situer deux objets l'un par rapport à l'autre.
– Associer un objet à une ou plusieurs de ses représentations planes (perspective, patron, vues différentes, ombres, …).
– Reconstituer (ou identifier) un objet (ou une situation spatiale) à partir de la donnée d'une ou plusieurs représentations planes.

**B) Un exemple : un travail possible sur le losange au CM1**

Parmi les quadrilatères, certains ont une dénomination particulière correspondant à des propriétés concernant leurs angles ou les mesures de leurs côtés. Décrire un quadrilatère comme un losange dont les côtés mesurent 10 cm et la diagonale 12 cm, suffit pour pouvoir le construire. Le terme « losange » contient l'information « quadrilatère dont les côtés sont tous les quatre de même longueur ».
C'est ainsi que, dans un premier temps, l'enseignant peut introduire le concept de losange à partir d'un problème de description-construction(4). Au cours de cette résolution, les élèves vont remarquer que tous les côtés sont de même longueur (à l'intervalle de tolérance près qu'un enseignant accepte usuellement, par exemple 1mm). Mais ils vont également découvrir que, pour reproduire un losange, il ne suffit pas de communiquer la longueur de ses côtés (c'est ce qu'ils font au cours d'un premier essai, qui échoue).
• Les travaux ultérieurs peuvent donner lieu à des comparaisons avec d'autres types de quadrilatères, des recherches d'axes de symétrie par pliages, etc. Le concept de losange va s'enrichir avec la prise de conscience d'autres propriétés (la figure les possède ou non).
• Une synthèse de ces connaissances peut être proposée en fin de cycle 3, après un travail sur différents types de quadrilatères, en recherchant des ensembles minimaux d'informations grâce auxquels on peut construire un losange superposable à un losange donné. L'enseignant propose aux élèves de construire un losange superposable au losange qu'il tient dans ses mains sans le leur montrer. Les élèves (individuellement ou par groupes) écrivent les renseignements qu'ils estiment nécessaires (une liste de questions est préalablement fournie par le maître). Les enfants construisent alors la figure puis confrontent leurs productions entre elles et au modèle. La synthèse porte sur l'analyse collective des résultats (en fonction des demandes de renseignements formulées à l'enseignant) et sur la recherche du nombre minimal d'informations nécessaires. Ce travail, qui nécessite que les élèves évoquent les propriétés d'une figure hors de vue, favorise la représentation mentale du concept de losange et constitue une première étape sur la voie qui mène vers la géométrie déductive.
Cette activité permet aussi de formuler différentes procédures de construction d'une figure, de les comparer et de les mettre en œuvre sans qu'il soit nécessaire que les élèves en aient la maîtrise au cycle 3.

(4) La classe est divisée en groupes d'émetteurs et de récepteurs. Les émetteurs reçoivent un losange en carton et doivent le décrire dans un message écrit pour que les récepteurs puissent découper un losange superposable.

Au début du processus, les élèves effectuent des tracés maladroits, qui s'améliorent progressivement grâce à la comparaison entre productions et figures-modèles.

**C) Des activités permettant l'entraînement des connaissances et compétences listées.**

– Les manuels proposent par exemple de construire une « figure-dessin » à partir de sa description, de trouver la figure-dessin correspondant à une description donnée parmi 3, … Les situations décrites plus haut servent de **situations de référence**. Comme les élèves ont « vécu » une situation de communication au cours de laquelle ils ont échoué par manque de précision dans le vocabulaire ou dans les mesures, ils peuvent comprendre et trouver légitimes les exigences du professeur.
– Des exercices pour lesquels il n'est pas possible de répondre juste sans une utilisation précise des instruments (par exemple certaines droites semblent perpendiculaires sans l'être…).

## III) Vers le raisonnement géométrique

L'enseignement de l'espace et de la géométrie à l'école primaire devrait donc permettre de munir les élèves d'un certain nombre de concepts et de pratiques qui serviront de base à la géométrie du collège. Mais d'autres outils peuvent être travaillés au cycle 3 qui peuvent être d'une grande aide en sixième et après.

**A) La désignation des objets géométriques : points, droites, …**

Traitée la plupart du temps comme une évidence, la désignation peut être construite comme solution dans une situation de communication adaptée.

**B) schéma, figure à main levée, et codage**

Les élèves de fin de cycle 3 proposent « spontanément » des schémas dans des situations de communication ou de prise d'informations soumises à certaines contraintes. Comme le conseillent les programmes, l'introduction du codage peut alors être faite en fin de cycle **« à condition que les codes utilisés aient acquis une signification pour les élèves ».**

**C) Raisonner**

– Raisonner sur un schéma (après les activités ci-dessus) : avec quelques modifications, l'item de l'évaluation Sixième (annexe 1) peut servir de base à une situation d'apprentissage où l'élève comprend ce qu'il a à faire et où les résultats sont validés par le retour à l'espace (cas des situations professionnelles). L'enseignant a réalisé un grand dessin dont les mesures effectives sont nettement plus grandes que celles du schéma qu'il donne aux élèves. Consigne : « je vous donne un schéma qui décrit la figure que j'ai dessinée, mais je ne vous la montre pas ! Vous devez être capables de trouver la mesure du segment [AE] à l'aide des informations écrites sur le schéma. Quand vous aurez tous fait votre **prévision**, je relèverai les résultats, nous essaierons de comprendre comment vous avez trouvé et nous vérifierons ensuite sur mon dessin. »

– Raisonner sans figure (jeux du portrait dans certains manuels et activités décrites dans le § B) fait appel à l’évocation de propriétés sur des figures géométriques de base et non à l’observation.

## IV) Le passage à la géométrie déductive en Sixième : Faut-il détruire ce qui a été construit dans la durée à l’école élémentaire?

En primaire, les élèves apprennent à utiliser, les concepts comme des utilisateurs de la géométrie (menuiserie, jardinage, …). Or, dès la Sixième, pour préparer le raisonnement déductif, de nombreuses activités ou exercices des manuels tentent de les convaincre de la supériorité du raisonnement (qu’ils ne connaissent pas encore) en dévalorisant tout ce qui a été construit avec eux antérieurement (et qui continue d’être étudié au collège) : la mesure et l’usage des instruments. L’annexe 2 montre un exercice où l’élève doit dire, **après** contrôle avec son équerre, que l’angle GFI **semble** droit (seul l’angle ABC peut être déclaré droit, parce qu’il est marqué du symbole) !
Remarquons que le rapport à la figure exigé des élèves ici n’a aucun sens sur le plan mathématique puisque la figure n’est pas obtenue par un tracé lié à des données textuelles.
Ces exercices ont toute chance d’être incompréhensibles pour des élèves de Sixième puisqu’ils renvoient à un type de rapport à la « figure-dessin » qui leur est totalement étranger. Les auteurs de ce manuel manquent d’ailleurs de cohérence, car il faudrait rédiger ainsi : « Soit une droite D, O un point de D. Tracer la droite D′ semblant perpendiculaire à D passant par le point O. »
Comment penser qu’il suffit de dire aux collégiens novices que seules sont vraies les propriétés codées, pour qu’ils comprennent le sens et la puissance du raisonnement géométrique ? Il existe bien une rupture entre l’approche faite à l’école élémentaire et la géométrie déductive visée au collège, elle se traduit pour les élèves par un obstacle cognitif majeur. La tentation d’exiger d’eux, de plus en plus précocement, un rapport aux « figures-dessins » sans qu’ait pu être construit du sens dans des activités signifiantes est risqué : au nom d’un savoir qu’il est le seul à posséder, le professeur démolit les connaissances que l’élève a lentement acquises (seul moyen d’avoir prise sur le réel).

L’objectif de l’atelier n’était pas de répondre à la difficile question du passage d’une géométrie à une autre, mais de mettre en garde contre un choix qui crée plus de difficultés qu’il n’en résout.

**Bibliographie :**

BERTHELOT R. et SALIN M.H. (1994), L’enseignement de la géométrie à l’école primaire, Grand N nº 53, IREM de Grenoble.

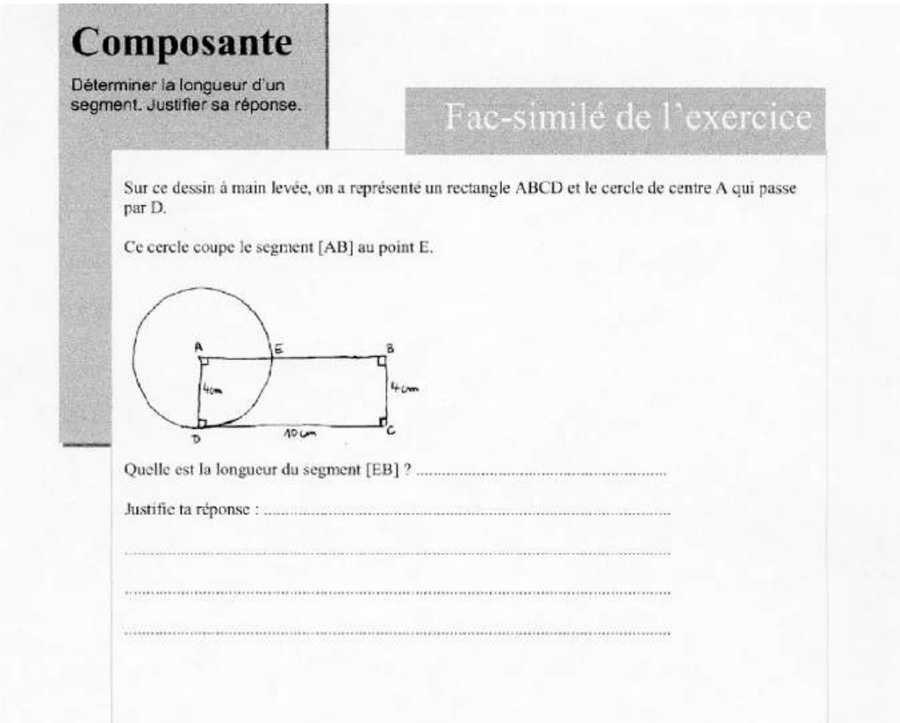
BERTHELOT R. et SALIN M.H. (1995), Un enseignement des angles au cycle 3, Grand N nº 56.

BERTHELOT R. et SALIN M.H. (1999). L’enseignement de l'espace à l’école primaire, Grand Nº 65.

SALIN M.H., BERTHELOT R.(2001), L'enseignement de la géométrie au début du collège : Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? Petit x nº 56 IREM de Grenoble.

## Annexe 1

(évaluation Sixième 2002)



**Composante**

Déterminer la longueur d'un segment. Justifier sa réponse.

Fac-similé de l'exercice

Sur ce dessin à main levée, on a représenté un rectangle ABCD et le cercle de centre A qui passe par D.

Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.



Quelle est la longueur du segment [EB] ? ..................................................

Justifie ta réponse : ..................................................

..................................................

..................................................

..................................................

## Annexe 2

(Maths et clic Sixième)

**11** Avec l'équerre, certaines droites de cette figure semblent perpendiculaires. Indiquer lesquelles. Peut-on en être sûr(e) ?