Trois ateliers sur la géométrie

Michel Demal et Danielle Popeler(*)

- **Les figures et solides géométriques au premier degré de l'École Primaire (VA7).**
- **Figures semblables ou proportionnelles – figures déformées – figures isométriques au premier degré de l'École Primaire (VB5).**
- **Raisonner grâce aux polyèdres (JA20).**

Les trois ateliers s'inscrivent dans un projet ambitieux à long terme : celui de former tous les élèves, dès leur plus jeune âge et pendant toute leur scolarité obligatoire, au raisonnement scientifique et de les familiariser avec des concepts géométriques non traditionnels présents dans d'autres domaines scientifiques que les mathématiques.

En ce qui concerne le raisonnement scientifique, nous pensons qu'il est nécessaire non seulement dans le domaine mathématique et celui des sciences en général, mais également dans les comportements de chacun, dans la vie au quotidien.

Grâce à la modélisation et la concrétisation des transformations et des objets géométriques du plan et de l'espace, la *Géométrie des Transformations* permet de relier les transformations, les objets géométriques et les éléments de logique nécessaires à l'appropriation de toute démarche scientifique.
Nous entendons donc, dès le début de l'enseignement Primaire, développer par le biais de la *Géométrie des Transformations*, la curiosité, l'expérimentation, la mise en doute, les capacités de réflexion et d'analyse, divers moyens de justifications ou de preuves et finalement l'argumentation logique et rationnelle.

Les principaux concepts géométriques « non traditionnels » que nous développons dans nos activités sont les suivants :
- les notions de déplacements et de retournements du plan avant de les caractériser en termes de symétries orthogonales, de translations, de rotations, de symétries centrales, de symétries glissées.
- les notions de déplacements et de retournements de l'espace avant de les caractériser en termes de symétries bilatérales, de symétries bilatérales glissées, de symétries centrales, d'antirotations, de rotations, de symétries orthogonales, de translations et de vissages.
- les notions conservées par les déplacements et les retournements du plan dans l'étude des figures géométriques.
- les notions conservées par les déplacements et les retournements de l'espace dans l'étude des objets géométriques.

(*) UREM (ULB) - GEPEMA (UMH) - HECFHMons. Communauté Française de Belgique.
Michel Demal. 34 avenue Saint Pierre, B7000 Mons, 065 84 77 86.
Danielle Polpeler. 6/1 place des Droits de l'Homme, B7130 Binche, 064 26 79 91.

- la notion de symétrie au sens large ou d'automorphisme qui recouvre la notion simple de transformations qui superposent un objet à lui-même tout en conservant la structure de celui-ci (cette notion permet de relier les propriétés des transformations aux propriétés des objets).
- l'orientation du plan (des cercles horlogiques et antihorlogiques et des dessins de mains sur transparents) pour « définir » les déplacements, les retournements, les similitudes directes et inverses du plan.
- l'orientation de l'espace (main gauche et main droite) pour « définir » les déplacements, les retournements, les similitudes directes et inverses de l'espace.
- les formes gauche et droite d'un objet (la chiralité des chimistes).
- les homothéties et les similitudes de l'espace.
- les polyèdres convexes à faces régulières avec les classements :
  - en fonction de l'homogénéité des faces et de l'homogénéité des sommets,
  - en fonction de la transitivité des faces et de la transitivité des sommets (les polyèdres réguliers et les polyèdres semi-réguliers).

Signalons que dans le « Rapport au Ministre de l'Éducation Nationale sur l'Enseignement des Sciences Mathématiques », sous la direction de Jean-Pierre KAHANE (Édition Odile JACOB), ces concepts « non traditionnels » sont signalés, directement ou indirectement, comme étant des concepts fondamentaux à développer dans l'enseignement de la géométrie (de 6 à 18 ans).

Nos méthodes, qui partent du terrain des enfants, permettent à chacun de s'épanouir, d'acquérir la confiance en soi et le goût de vouloir en connaître toujours davantage.

De plus, nos activités de géométrie sont en connexions naturelles avec les autres domaines liés aux mathématiques tels que : les grandeurs (longueurs, surfaces, volumes), les grandeurs proportionnelles (échelles, graphiques, …), les nombres et les opérations, les problèmes utilitaires, …

Enfin, grâce à l'attrait des « situations problèmes » ou aux « défis » proposés aux élèves en fonction de leur âge, la grande diversité du matériel manipulable et transformable mis entre leurs mains, à la psychomotricité, au bon enchaînement continu et structuré des « matières », nous donnons du sens aux notions développées et constatons que les élèves progressent avec plaisir et aisance.

- Deux ateliers s'adressaient aux enseignants de l'Enseignement Fondamental.
  Ces deux ateliers intimement liés présentaient une partie du cours de Géométrie des Transformations destiné à des élèves de 6-7 ans (premier degré de l'enseignement Primaire en Belgique).

  Au départ de l'Histoire des Petits Bonshommes de la Planète Citron, (grâce à des manipulations, des constructions, les reproductions, des créations en matériaux divers), nous avons raconté et explicité comment initier de très jeunes enfants, **aux principaux concepts théoriques « délimitant » les figures géométriques et les solides géométriques** (atelier n° 1).

Dans la continuité de l'Histoire des Petits Bonshommes de la Planète Citron, (grâce à des manipulations de modèles sur transparents), nous avons ici aussi raconté et explicité comment initier de très jeunes enfants **aux premiers concepts théoriques liés aux transformations du plan** (atelier n° 2).

- Le troisième atelier s'adressait plus spécifiquement aux enseignants de l'Enseignement Secondaire et illustrait des activités qui favorisent « naturellement » **le raisonnement grâce aux polyèdres.**

Atelier n° 1. « Les figures et solides géométriques au premier degré de l'École Primaire » (VA7).

A) Les figures géométriques

Nous avons raconté, montré et illustré avec tout le matériel réellement utilisé sur le « terrain », comment initier les jeunes enfants aux principaux concepts théoriques liés aux figures géométriques et aux solides géométriques.
« L'Histoire » prévoit de construire et de classer des enclos (des figures géométriques) pour les Bonshommes Citrons ; les contraintes de construction souhaitées par le « Roi de la Planète Citron » rencontrent les caractéristiques définissant les trois types de figures géométriques (les polygones, les figures rondes, les figures hybrides).

Ces principaux concepts sont : côté droit ; côté courbe ; sommet ; figure fermée (surface et/ou périmètre) ; connexité (en une seule partie) ; incidence côté-sommet (deux côtés par sommet) ; égalité du nombre de côtés et du nombre de sommets ; nombre de côtés ; longueur de côté (plus long, moins long, même longueur) ; isométrie de côté et de figures par superposition ; classement des figures géométriques en trois types (polygones, figures rondes, figures hybrides).

Voici quelques photos(*) présentant le matériel didactique utilisé en classe et les élèves en activité.

Les Bonshommes de la Planète Citron

Construction d'«enclos polygonaux » pour les Bonshommes Citrons

(*) Lors de l'atelier, les photos étaient présentées en couleurs.

« Enclos » dont tous les côtés sont courbes

« Enclos » comprenant au moins un côté droit et au moins un côté courbe

Vue globale du matériel utilisé et/ou construit par les enfants et présenté à PAU

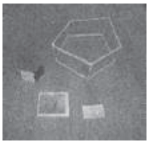
B) Les solides géométriques

Dans le prolongement de « l'Histoire », il fallait reconnaître les différents types de faces des abris des Bonshommes Citrons (des solides géométriques) puis les classer en trois familles distinctes (les polyèdres, les corps ronds, les corps hybrides)

Au cours de ces différentes activités, les concepts suivants ont été découverts :
Faces non planes (courbes) ; faces planes (figures hybrides, figures rondes, polygones) ; arêtes ; sommets ; incidence faces-arête (deux faces par arête) ; nombre de faces ; nombre de sommets ; nombre d'arêtes ; « squelettes » de solides ; classement des solides géométriques en trois types (polyèdres, corps ronds, corps hybrides) ; solides semblables ; photos de solides – perspective cavalière.

Voici quelques photos du matériel didactique utilisé en classe et présenté à Pau.

Les trois familles de solides géométriques



Association solide, squelette, photo, dessin en perspective cavalière

Solides utilisés pour le classement

Construction individuelle de Polyèdres

Atelier n° 2. « Figures semblables ou proportionnelles – figures déformées – figures isométriques, au premier degré de l'École Primaire » (VB5).

Dans la continuité de l'Histoire des Petits Bonshommes de la Planète Citron, nous avons raconté, explicité et illustré à l'aide de « manipulations » de dessins sur transparents (tels que ceux que nous mettons entre les mains des élèves), comment initier de très jeunes enfants **aux premiers concepts théoriques liés aux transformations du plan**.
Il s'agit des transformations (les similitudes) avec lesquelles on peut étudier les figures géométriques en mathématique élémentaire.

D'abord, parmi des photos, l'« Histoire » prévoit de reconnaître et de classer les « bonnes » (figures semblables) et les « mauvaises » (figures déformées).
Ensuite, parmi les « bonnes » ou figures semblables (proportionnelles), il faut distinguer les isométriques, les agrandies et les réduites.
À l'aide d'un modèle sur transparent, il s'agit de découvrir les notions de figures superposables par déplacement et/ou retournement du plan.

Au cours des différentes activités, les concepts suivants ont été découverts :

<u>les transformations qui conservent la forme (les similitudes)</u>

- Figures non déformées et figures déformées (qui n'ont pas la même forme qu'un modèle de référence).
- Figures (non déformées) de grandeurs proportionnelles (agrandies ou réduites), dites semblables à un modèle de référence.
- Figures isométriques (de même forme et de même grandeur qu'un modèle de référence).

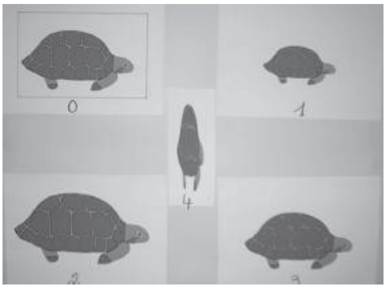
les isométries du plan

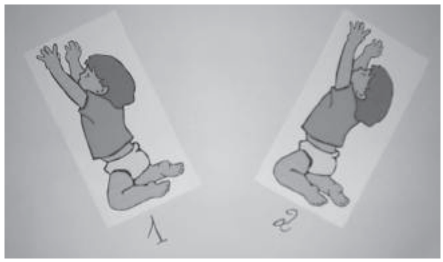
- initiation à la notion de déplacement du plan (à l'aide d'un transparent).
- initiation à la notion de retournement du plan (obligation de retourner une seule fois le transparent).

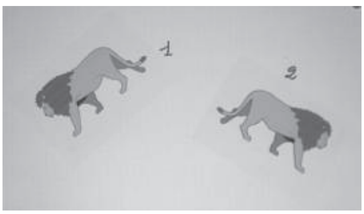
les figures isométriques superposables :

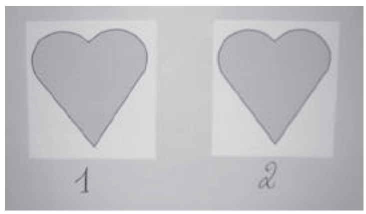
- uniquement par déplacement.
- uniquement par retournement.
- par déplacement et aussi par retournement.

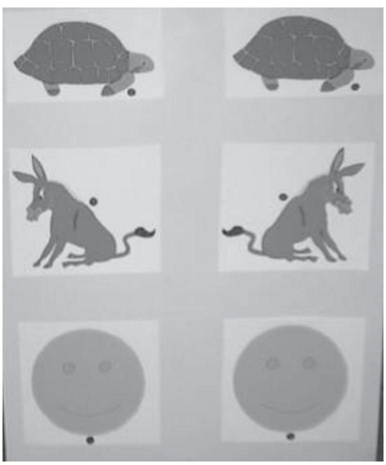
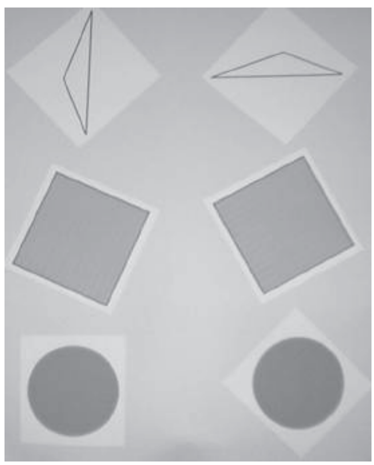
Voici quelques photos illustrant une partie du matériel didactique utilisé en classe et présenté à Pau.









Remarques :

- La méthodologie adoptée, les compétences développées, le déroulement des activités en classe ont également été explicités au cours de cet atelier.

Il existe des CDRom qui décrivent en détail toutes ces activités (voir le site www.uvgt.net).

- Les éléments de logique formelle introduits au cours des activités sont : les quantificateurs universel et existentiel ; les conjonctions « et », « ou ».
- Les programmes de toutes les activités de Géométrie des Transformations des quatre premières années de l'enseignement primaire sont détaillés sur le site www.uvgt.net ; les années suivantes sont en cours.
- Les activités géométriques proposées s'inscrivent dans un cours structuré et donné en continu, par la même institutrice (Danielle POPELER), aux mêmes élèves, depuis leur première année Primaire (ces élèves sont actuellement (2003-2004) en cinquième année de Primaire).

Atelier n° 3. « Raisonner grâce aux polyèdres » (JA20).

L'atelier « Raisonner grâce aux polyèdres » (JA20) prévoyait les six thèmes suivants :

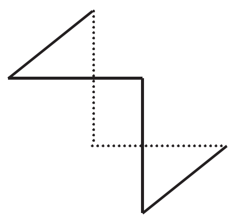
1) détermination du nombre de faces, d'arêtes et de sommets d'un polyèdre,
2) détermination des tétraèdres à faces isométriques,
3) détermination du nombre d'allumettes pour réaliser un développement de polyèdre,
4) détermination de la somme des angles-faces d'un polyèdre convexe,
5) détermination de la somme des déficiences angulaires d'un polyèdre convexe,
6) détermination des symétries (automorphismes) de solides.

Par manque de temps, seuls les thèmes (1) et (2) ont été développés[1].

Thème 1.

Au cours du premier thème « DÉTERMINATION DU NOMBRE DE FACES, D'ARÊTES ET DE SOMMETS D'UN POLYÈDRE », nous avons montré et expliqué que les conditions nécessaires (non suffisantes) : *« Toutes les faces sont des polygones »* et *« Toutes les faces sont planes »* ne sont pas équivalentes pour définir la notion de polyèdre.

En effet, depuis les années 1920, les Anglais PETRIE et COXETER ont mis en évidence l'existence de polyèdres formés uniquement de polygones gauches[2] (non coplanaires).



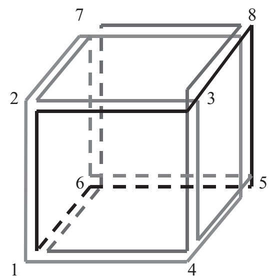
Nous avons présenté les polyèdres de PETRIE déterminés à partir des cinq polyèdres platoniciens et formés de polygones gauches réguliers.

Le fameux « cube » à faces gauches (non planes) de PETRIE (ci-dessous) est déterminé par quatre hexagones gauches réguliers.

(1) Nous espérons présenter les autres thèmes lors d'un prochain congrès.
(2) Léonard de Vinci avait déjà présenté des dessins de polyédres composés de faces planes et de faces gauches.

Ce sont les 4 hexagones réguliers suivants (en couleurs dans l'atelier ; ici et dans la suite, les couleurs sont remplacées par des traits différemment composés) :

L'hexagone rouge (7 – 8 – 3 – 4 – 1 – 6)
L'hexagone bleu (7 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6)
L'hexagone vert (7 – 8 – 5 – 4 – 1 – 2)
L'hexagone noir (2 – 3 – 8 – 5 – 6 – 1)



Si ce type de polyèdre peut paraître surprenant, il vérifie néanmoins les caractéristiques habituelles des polyèdres usuels.

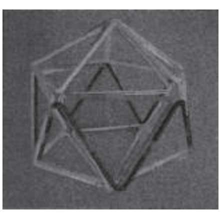
Les photos ci-dessous illustrent les autres polyèdres de PETRIE (réalisés en pailles), associés aux autres polyèdres platoniciens.

Pour reconnaître les polygones gauches réguliers intervenant dans les polyèdres de PETRIE, il suffit de suivre les pailles de la même couleur.

Tétraèdre de PETRIE formé de trois quadrilatères gauches réguliers.

Octaèdre de PETRIE formé
de quatre hexagones gauches réguliers.

Dodécaèdre de PETRIE formé de six décagones gauches réguliers.



Icosaèdre de PETRIE formé de six décagones gauches réguliers.

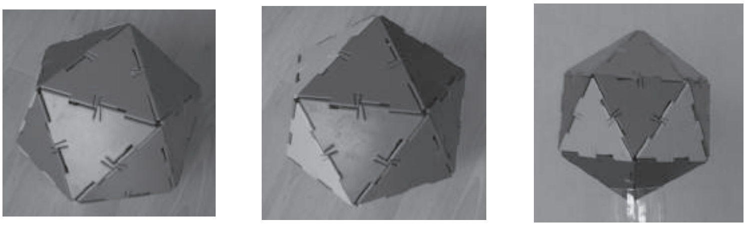
Par la suite, et à partir de polyèdres convexes *« classiques »*(3) (à faces planes) semblables aux polyèdres illustrés ci-après, nous avons expliqué comment, en s'appuyant sur les couleurs des faces et la relation d'incidence *« Toute arête est à*

(3) Nous les appelons « Polyèdres euclidiens ».

l'intersection de deux faces » ou *« Toute arête est incidente à deux faces »*, les élèves ont calculé (dénombré) le nombre de faces, d'arêtes et de sommets des polyèdres.

À titre d'exemples, citons les cas de l'icosaèdre régulier et de l'antiprisme hexagonal.

L'ICOSAÈDRE RÉGULIER



Aux cinq triangles équilatéraux rouges correspondent cinq triangles équilatéraux verts puisque *« toute arête est incidente à deux faces »*.
Aux cinq triangles équilatéraux bleus correspondent, pour la même raison, cinq triangles équilatéraux jaunes.
Il y a donc, au total : 5 + 5 + 5 + 5 = 20 triangles équilatéraux.

Le nombre d'arêtes de l'icosaèdre est obtenu par la relation :

$$A = \frac{\text{nombre de faces triangulaires} \times \text{nombre d'arêtes par face}}{2}.$$

La valeur (2) du dénominateur résulte de « toute arête est incidente à deux faces».

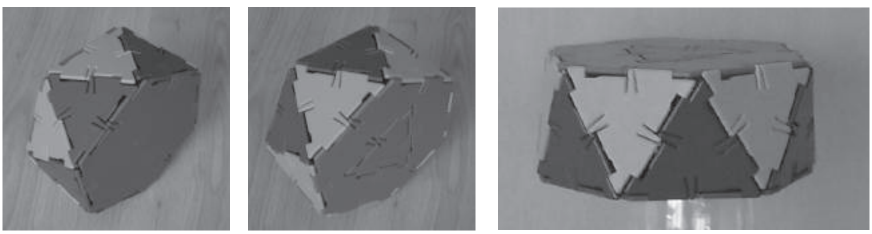
$$A = \frac{20\ (\text{faces triangulaires}) \times 3\ (\text{arêtes})}{2} = 30 \text{ arêtes.}$$

Remarque :
Le nombre de sommets de l'icosaèdre régulier est obtenu par la relation :

$$S = \frac{20\ (\text{faces triangulaires}) \times 3\ (\text{nombre de sommets par face})}{5}.$$

En chaque sommet s'attachent 5 faces

L'ANTIPRISME SEMI RÉGULIER À BASES HEXAGONALES



À la base hexagonale verte, correspondent 6 triangles équilatéraux bleus → 7 faces (1 + 6).

À la base hexagonale rouge, correspondent 6 triangles équilatéraux jaunes → 7 faces aussi.
Au total, il y a donc 14 faces (2 hexagones réguliers et 12 triangles équilatéraux).

Le nombre d'arêtes vaut donc :

$$A = \frac{(\text{nombre d'hexagones } \times 6) + (\text{nombre de triangles } \times 3)}{2}.$$

La valeur (2) du dénominateur résulte de « toute arête est incidente à deux faces ».

$$A = \frac{(2\times 6)+(12\times 3)}{2} = 24 \text{ arêtes.}$$

Le nombre de sommets de l'antiprisme vaut :

$$S = \frac{(\text{nombre d'hexagones } \times 6) + (\text{nombre de triangles } \times 3)}{4}.$$

En chaque somme s'attachent exactement 4 faces.

$$S = \frac{(2\times 6)+(12\times 3)}{4} = 12.$$

Remarque : Il est évident que l'on peut déterminer aussi le nombre des sommets à partir des deux bases ($6 \times 2 = 12$).

Nous avons généralisé les mêmes types de raisonnements à d'autres polyèdres convexes.

L'analyse des deltaèdres(4) convexes (polyèdres convexes dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux) a permis d'illustrer comment familiariser des élèves, dès l' âge de 11 ans, à la notion de preuve par l'absurde.
Après avoir initié les élèves de cet âge au calcul du nombre d'arêtes de polyèdres, nous leur posons la situation-problème suivante :
« Construire un deltaèdre à partir de cinq triangles équilatéraux isométriques ».
Après plusieurs tentatives infructueuses, des élèves constatent que la construction est impossible.
Nous leur disons alors que, même sans assembler les triangles, ils peuvent affirmer qu'il n'existe pas de polyèdre formé de 5 triangles équilatéraux isométriques !
Nous leur suggérons d'en faire la preuve en imaginant que ce polyèdre existe.
Ainsi, si ce polyèdre existait, son nombre d'arêtes vaudrait :

$$A = \frac{5\times 3}{2} = 7{,}5.$$

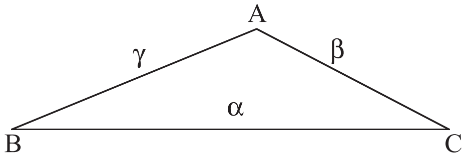
Les élèves constatent alors que ce polyèdre est « impossible » car le nombre d'arêtes doit être nécessairement un nombre entier.
Ils découvrent encore que le nombre de faces des deltaèdres doit être un nombre pair.

(4) Il en existe exactement huit.

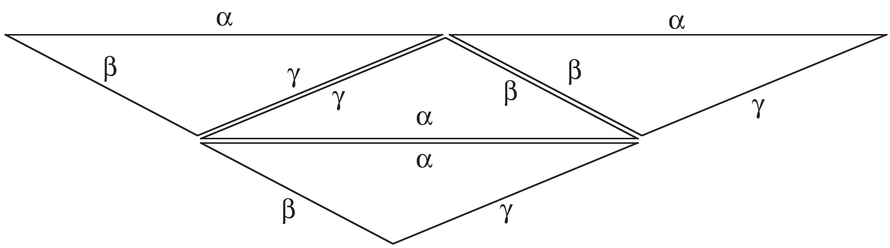
Pour les polyèdres (convexes) formés de polygones isométriques ayant un nombre impair de côtés, ils découvrent qu'il faut aussi utiliser un nombre pair de faces.

Thème 2.

Dans le deuxième thème : « LES TÉTRAÈDRES À FACES ISOMÉTRIQUES », il s'agissait de préciser les types de triangles (A,B,C) qui permettent de construire un tétraèdre à faces isométriques.



Contrairement à ce que suggèrent la relation *« Toute arête est incidente à deux faces »* et le *développement du tétraèdre potentiel ci-dessous*, il n'est pas vrai qu'il soit possible de construire un tétraèdre isométrique avec n'importe quel type de triangles.



La contrainte (souvent oubliée) de « l'inégalité angulaire » impose que les triangles isométriques soient des triangles acutangles.

En effet, cette inégalité angulaire affirme que l'amplitude d'un des angles « déterminant » un sommet d'un polyèdre doit être inférieure à la somme des amplitudes de tous les autres angles-faces « déterminant » ce même sommet (cette inégalité angulaire est analogue à la fameuse inégalité polygonale(5)).

Pour notre problème, l'inégalité angulaire impose donc :

$$\hat{A} < \hat{B} + \hat{C} =^{(6)} 180° - \hat{A} \Rightarrow \hat{A} < 90°.$$

$$\hat{B} < \hat{A} + \hat{C} = 180° - \hat{B} \Rightarrow \hat{B} < 90°.$$

$$\hat{C} < \hat{A} + \hat{B} = 180° - \hat{C} \Rightarrow \hat{C} < 90°.$$

Il en résulte donc que : « Les triangles isométriques admissibles doivent être acutangles. »

Remarque : Dans un tétraèdre à faces isométriques, la somme des amplitudes des angles-faces « déterminant » un sommet vaut toujours 180°.

(5) Dans tout polygone, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs de tous les autres côtés.

(6) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.

Voici quelques photos illustrant une partie du matériel didactique utilisé en classe et présenté à Pau ainsi que deux photos des participants.