Surfaces

Jean-Louis Faure(*)

I. Objectif

Cet atelier a présenté le travail réalisé en 2002-2003 par l'équipe académique mathématique de l'académie de Bordeaux afin de montrer comment il était possible à l'aide des nouveaux outils contenus dans le logiciel Geoplan-Geospace de présenter le programme de géométrie dans l'espace en classe de terminale.

Les différents outils présentés sont téléchargeables sur le site Mathématiques de l'Académie de Bordeaux :

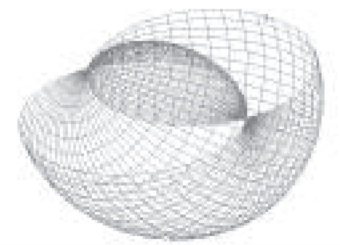
http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/peda/lyc/geospace.htm

(je peux aussi les envoyer par courrier électronique).

II. L'outil « Maillage » de Geospace

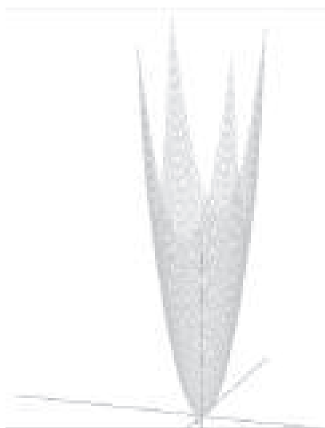
Cette nouvelle version de Geospace contient un nouvel outil accessible dans le menu **Créer** : l'outil **Maillage**.

Exemple 1



u et v sont deux réels libres respectivement dans les intervalles $[0, \pi]$ et $[-\pi, \pi]$.
Le point M est défini comme point repéré de coordonnées :
$x = (1 - 2 \cos v) \cos u$,
$y = (1 - 2 \cos v) \sin u$,
$z = 3 \sin v$.
Le maillage L est le lieu du point M, réalisé avec 40 valeurs pour chacun des deux pilotes u et v.

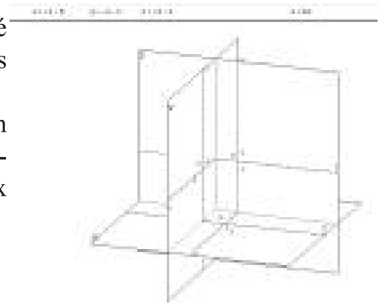
Exemple 2



Surface sur $[-4,4] \times [-4,4]$ représentant la fonction : $(x,y) \to x^2 + y^2$: le paraboloïde de révolution.
Les touches F7, F8 et F9 permettent de visualiser cette surface en plaçant de face respectivement les plans Oyz, Oxy et Oxz.
On remarque que lorsque l'on place le plan Oxy de face on observe un carré ; ceci étant dû au fait que la représentation graphique est construite dans un pavé droit.

(*) Équipe Académique Mathématiques – Bordeaux. JeanLouis.Faure@ac-bordeaux.fr

III. L'imagiciel « Plans parallèles aux plans de coordonnées »

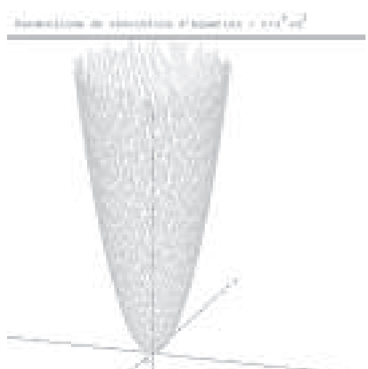


Dans le programme de S, il est demandé d'étudier les sections des surfaces par des plans parallèles aux plans de coordonnées.
Geospace crée des plans qui sont des objets non dessinables ; cet imagiciel propose des « représentations » de trois plans mobiles parallèles aux plans de coordonnées :

- Un plan Ph parallèle au plan O*xy*.
- Un plan Pf parallèle au plan O*yz*.
- Un plan Pv parallèle au plan O*xz*.

L'équation de chacun de ces plans est affichée à l'écran ; ils sont déplaçables à l'aide des flèches du clavier.
Il est possible de faire apparaître pour chacun des plans un repère orthonormé.
Cet imagiciel est destiné à servir de base pour la construction des différentes surfaces.

IV. Déplacement d'un point sur un maillage ; sections d'une surface par un plan frontal ou vertical : exemple avec le paraboloïde de révolution



Objets créés :

- La fonction s.
- La représentation graphique C_s de cette fonction.

Afin d'obtenir une vue correcte lorsque l'on place le plan O*xy* de face, il est possible de définir la fonction s par la formule :

$$s(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\mu\left(x^2+y^2\leq 15\right)},$$

ce qui ne la fera construire que pour des points d'ordonnée inférieure ou égale à 15.

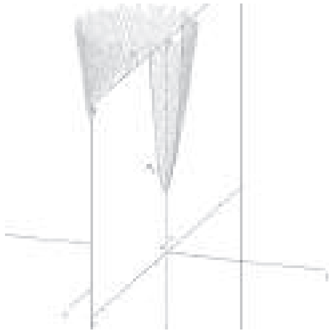
On construit le point M_1 de coordonnées :

$$M_1\left(x,y,s(x,y)\right);$$

c'est un point de la surface C_s (le paraboloïde de révolution) qui se trouve à la fois dans le plan Pf et dans le plan Pv.
1. En modifiant les valeurs de x ou de y à l'aide des flèches du clavier, on déplace le point M_1 sur la surface C_s.
2. Fixons $x = a$; alors le point M_1 va se déplacer dans le plan PF d'équation $x = a$ sur la courbe d'intersection de ce plan avec la surface C_s.

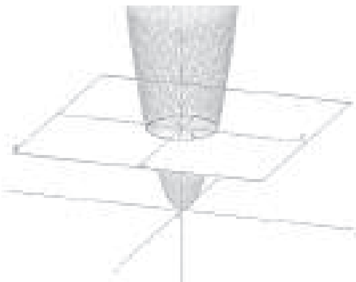
On peut visualiser cette section soit à l'aide du mode **Trace**, soit à l'aide d'un lieu.

3. Fixons $y = b$; alors le point M_1 va se déplacer dans le plan Pv d'équation $y = b$ sur la courbe d'intersection de ce plan avec la surface C_s.
On peut visualiser cette section soit à l'aide du mode **Trace**, soit à l'aide d'un lieu.
Il est alors possible de placer les plans Pf ou Pv de face afin d'examiner ces sections en vraie grandeur.



V. Section d'une surface par un plan horizontal

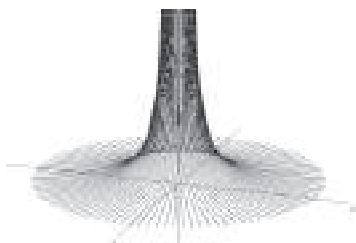
Si les sections par des plans verticaux ou frontaux sont obtenues par des traces ou des lieux de points de la surface, lorsque l'on veut visualiser la section d'une surface de révolution d'axe (Oz) par un plan horizontal, il est nécessaire de connaître la nature de cette section. Dans le cas du paraboloïde de révolution, il s'agit d'un cercle de rayon $\sqrt{k}$ centré à l'intersection du plan Ph d'équation $z = k$ et de l'axe (Oz).



VI. Génération d'une surface de révolution par rotation d'une génératrice autour de l'axe (Oz)

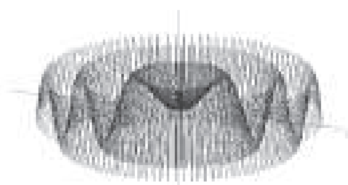
Exemple 1

Surface sur [–5,5] × [–5,5] représentant la fonction $(x, y) \to \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.
Dans le plan d'équation $x = 0$, on construit la courbe G d'équation : $z = \dfrac{1}{y^2}$; cette courbe admet l'axe (Oz) comme axe de symétrie.
On fait tourner G autour de l'axe (Oz), puis on observe sa trace.

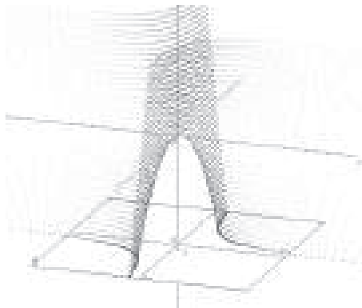


Exemple 2

Surface sur [–3,3] × [–3,3] représentant la fonction $(x,y) \to \sin(x^2 + y^2)$.
Dans le plan d'équation $x = 0$, on construit la courbe G d'équation : $z = \sin(y^2)$; cette courbe admet l'axe (Oz) comme axe de symétrie.
On fait tourner G autour de l'axe (Oz), puis on observe sa trace.



VII. Génération d'une surface de révolution à partir de l'une de ses sections par un plan parallèle aux plans de coordonnées : lignes de niveau

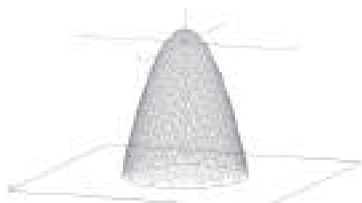


Pour générer une surface à partir de sa section par un plan parallèle à l'un des plans de base, on sélectionnera cette section afin d'en conserver la trace, puis on utilisera le mode Trace en déplaçant le plan qui contient cette section.
Exemple avec le paraboloïde hyperbolique : surface d'équation $z = xy$.
On voit ici les lignes de niveau obtenues à partir de la section par la plan horizontal Ph.

VIII. Surfaces et plans d'équation : $y = ax + b$; les problèmes de contrainte linéaire

Ces outils sont plus particulièrement destinés aux classes de ES.
En rajoutant une fonctionnalité à Geospace, grâce à l'outil Prototype, il va être facile de créer et de représenter des plans d'équation : $y = ax + b$.
L'intersection d'un tel plan avec la surface C_s d'équation $z = s(x,y)$ sera obtenue par la trace ou le lieu d'un point N de coordonnées : $N\left(x, ax+b, s(x, ax+b)\right)$ puisque ce point se trouve bien à la fois sur la surface C_s et dans le plan d'équation : $y = ax + b$.
L'exemple proposé est extrait du document d'accompagnement.
Soit la fonction s définie par :

$$s(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

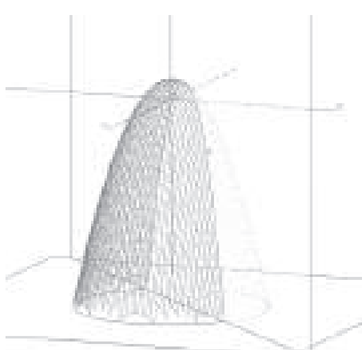


1. Construire la surface C_s d'équation :

$$z = 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

qui est la représentation graphique de la fonction s avec :

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -5 \leq y \leq 5 \\ -10 \leq z \leq 5 \end{cases}$$



2. Afin de respecter la contrainte sur z, la fonction s sera définie par la formule :

$$s(x,y) = \frac{1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)}{\mu\left(-10 \leq \left(1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)\right) \leq 5\right)}.$$

3. Recherche de l'extremum de la fonction s sous la contrainte $y = 1 + x$.
Dans l'espace, quelle est l'interprétation graphique de l'équation de contrainte : $y = 1 + x$?
Visualiser la surface et cette contrainte.
Déterminer l'extremum de la fonction s.

IX. Section d'un cône

Geospace ne sait pas construire directement l'intersection d'un cône avec un plan ; celle-ci sera obtenue comme trace ou lieu d'une génératrice du cône avec ce plan.

X. De l'hyperboloïde de révolution au cône de révolution

Le but de ce travail est de caractériser la section d'un cône par un plan parallèle à son axe de révolution. On utilise pour cela un imagiciel permettant un changement de repère par rotation autour de l'axe (Oz).

Partie 1 : Travail dans le repère par défaut

Visualisation du paraboloïde hyperbolique (C_s) d'équation : $z = x \times y$ et de ses sections par trois plans parallèles aux plans de base.

Partie 2 : Travail dans le nouveau repère

Étude théorique

On pose : $\vec{e_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$, $\vec{e_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} - \vec{j}\right)$ et $\vec{e_3} = \vec{k}$.

1. Montrer que le repère $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\right)$ est un repère orthonormal.

2. Déterminer l'équation de (C_s) dans ce nouveau repère et étudier les sections de (C_s) par les plans parallèles aux nouveaux plans de base.
3. Dans le cas de la section de (C_s) par le plan d'équation $X = a$, calculer les coordonnées du sommet S_a de la parabole et donner le lieu de S_a quand a décrit **R**.
4. Dans le cas de la section de (C_s) par le plan d'équation $Z = k$, on sait que ce sera encore une hyperbole. On obtient alors une autre équation de l'hyperbole : écrire la nouvelle équation de cette hyperbole. On peut étudier cette courbe dans le plan pour vérification. Pour $k = 2$, étudier la fonction f définie par : $x \to \sqrt{x^2 - 4}$ et construire sa représentation graphique ; retrouver l'hyperbole par symétrie.
5. On peut chercher les équations des sections de (C_s) par les plans Pf ou Pv.

Étude expérimentale

Dans l'imagiciel, le changement de repère s'effectue en appuyant sur la touche **W** ; l'affichage de la variable r permet de vérifier quel est le repère actif :

$r = 1$ si l'on travaille dans le repère par défaut Oxyz.

$r = 2$ si l'on travaille dans le repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$.