

# Quelques instruments astronomiques anciens

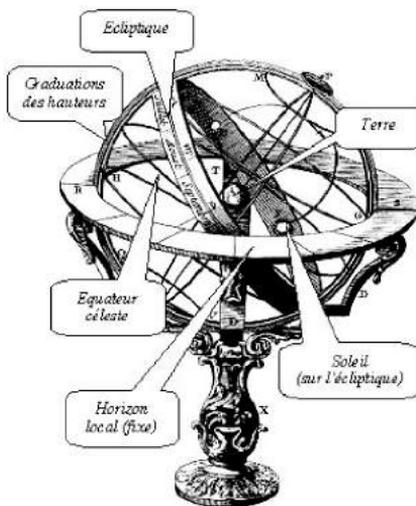
## Histoire et utilisation en classe

### Philippe Dutarte(\*)

« Grande et merveilleuse est l'excellence des instruments mathématiques puisqu'ils nous font connaître des choses qui semblent non seulement fort difficiles, mais même impossibles à croire. »

Danti – Radio latino – 1583.

### La sphère armillaire



Jusqu'au XVI<sup>e</sup> siècle, la sphère armillaire représente l'Univers selon le modèle géocentrique de *Ptolémée*. Cette figuration est celle « des apparences », c'est-à-dire telle que l'Univers nous apparaît quand on observe depuis la Terre. Chaque anneau (*armilla* en latin) correspond à un grand cercle du Ciel.

- La Terre est fixe au centre de l'Univers.
- Les astres (Soleil, lune, étoiles, ...) semblent se situer sur une grande sphère (*sphère céleste*) qui tourne autour de la Terre en 24 heures.
- L'axe de rotation de la sphère céleste passe à proximité de l'étoile polaire (*pôle nord céleste*), dans le prolongement du rayon terrestre passant par le pôle nord terrestre.

Le prolongement de l'équateur terrestre donne, sur la voûte céleste, *l'équateur céleste*.

- Sur la sphère céleste, le Soleil semble se déplacer, au cours de l'année, par rapport aux étoiles. Son trajet annuel apparent est le cercle de *l'écliptique*.
- La couronne horizontale extérieure est fixe. Elle correspond à *l'horizon local*. Une graduation sur l'anneau qui lui est fixé verticalement correspond, en degrés, aux angles de *hauteur*.

(\*) Lycée E. BRANLY - Créteil. Commission inter-IREM Lycées Techniques.

### Origines de la sphère armillaire

La sphère armillaire remonte à l'Antiquité grecque mais il est difficile de préciser son apparition. *Lalande* dans son *Abrégé d'Astronomie* (édition de 1775) prétend que « l'invention de la sphère armillaire est certainement aussi ancienne que celle de l'astronomie même. On l'attribue à Atlas, que l'on croit avoir vécu 1600 ans avant Jésus-Christ [...] mais il est plus naturel de croire qu'elle vint de Babylone ou de l'Égypte ». Ceci semble excessif dans la mesure où les anciens grecs, les Pythagoriciens en particulier, sont les premiers à prendre la sphère comme « forme type » de représentation des Cieux et de la Terre.

Un passage du *Timée* de *Platon* semble indiquer qu'au IV<sup>e</sup> siècle av. J.-C. des « maquettes » de ces combinaisons de sphères existent déjà : « décrire les danses de ces mêmes corps célestes, [...] montrer lesquelles se font l'une à l'autre écran et au bout de quel temps chacune se cache à nos yeux pour de nouveau reparaitre, provoquant ainsi l'effroi et fournissant des présages sur les événements à venir aux gens qui ne sont point capables de les prévoir grâce au calcul, expliquer tout cela, ce serait peine perdue, si on n'avait pas sous les yeux une représentation mécanique des mouvements considérés ».

*Cicéron* rapporte que l'on pouvait voir à Rome, rapportée de Syracuse, une sphère armillaire, « qui passait pour le chef-d'œuvre d'*Archimède* », reproduisant les mouvements du Soleil, de la Lune et des cinq planètes. Certains de ces planétaires pouvaient être mus par la force hydraulique.

C'est chez *Ptolémée* que l'on trouve la première description de la sphère armillaire d'observation, désignée par *astrolabos* (« preneur d'étoile » en grec).

### Usages de la sphère

La sphère armillaire n'est pas qu'une simple représentation, c'est un véritable instrument qui possède un double aspect : instrument plutôt pédagogique et instrument de mesure.

- Le plus souvent la sphère constitue un instrument de représentation de l'Univers dont elle aide à la compréhension et ne permet que quelques calculs, comme celui de l'heure du lever du Soleil ou de changements de coordonnées sans recours à la trigonométrie (avec l'aide éventuelle d'un compas à pointes sèches). Lorsqu'elle est orientable (munie d'une boussole), les cercles de référence (méridien, équateur) étant alors positionnés parallèlement aux cercles « réels », la sphère permet de déterminer l'heure ou la direction approximative d'un astre.

- Pour être un instrument d'observation et de mesure, la sphère armillaire doit être équipée d'éléments de visée (des pinnules), et être de bonne dimension. Elle permet alors, par visée des astres, de mesurer leurs coordonnées locales, puis d'obtenir d'autres coordonnées par simple lecture des graduations figurant sur les cercles ou en utilisant un compas. C'est ce type de sphère qu'utilisa *Ptolémée* pour constituer le catalogue d'étoiles figurant dans l'*Almageste* :

« En nous servant donc encore du même instrument, dont les cercles tournent autour des pôles de l'oblique, nous avons observé autant d'étoiles qu'il nous a été possible d'en apercevoir, jusqu'à celles de sixième grandeur. »

On pratiquait de même, avec de telles sphères armillaires utilisées pour l'observation et la mesure, au XIII<sup>e</sup> siècle à l'observatoire de *Maragha* (Azerbaïdjan) avec *Nasir al-Din al-Tusi*, au XV<sup>e</sup> siècle à *Samarkand* avec *Ulugh Beg* et *al-Kashi*, ainsi qu'à *Nuremberg* avec *Regiomontanus*, puis au XVI<sup>e</sup> siècle avec *Tycho Brahé* dont les sphères armillaires d'observation, fixes, atteignent un diamètre de 3 à 9 coudées (la coudée utilisée par *Tycho Brahé* serait d'environ 39 cm, ce qui donne des diamètres de 1,17 m à 3,51 m).

### Les anneaux astronomiques

Les anneaux astronomiques sont essentiellement des cadrans solaires dérivant de la sphère armillaire. Ils s'inscrivent ainsi dans la longue tradition des sphères grecques. L'anneau astronomique est en quelque sorte la « quintessence » de la sphère armillaire, en la limitant à ses cercles fondamentaux : l'équateur, le méridien local et, selon les modèles, un méridien mobile ou l'axe du Monde. Cette simplicité fait de l'anneau astronomique un objet très fonctionnel (il est pliable et solide), d'une grande pureté esthétique.

Le premier anneau astronomique proprement dit, a été décrit par *Gemma Frisius* (1508-1555), de *Louvain*, dans son traité publié en 1534 : *Usus annuli astronomici*. Dans ce petit traité, *Gemma Frisius* présente son instrument ainsi : « Certes ce qui en grande proximité de paroles, des Cadrans, Cylindres, et Astrolabes, d'autres est écrit, tout ce bien près en ce notre anneau est compris et digéré. Lequel anneau, voyant être très bel ornement et digne de Prince, et point seulement ornement, mais aussi singulière utilité très plaisante, je n'ai pas voulu commettre ni laisser, que ne dédicasse cette notre telle quelle œuvre à votre Seigneurie et noblesse. A laquelle en beaucoup d'affaires en son temps occupée, me semblait cette chose très utile et profitable. »

Vers la fin du XVI<sup>e</sup> siècle, le modèle d'anneau astronomique de *Gemma Frisius* est supplanté par un autre, venu d'Angleterre. En 1597, *Sir Thomas Gresham*, conseiller économique de la reine *Élisabeth* fonde le *Gresham college* à *Londres* (institution qui existe toujours). Ce dernier estime que l'économie de la ville serait favorisée par l'éducation des classes marchandes. C'est le premier lieu en Angleterre où des chaires traitant de sujets mathématiques sont créées. De plus, il est demandé aux professeurs de fournir des applications pratiques : le professeur de géométrie traite de topographie, celui d'astronomie, de navigation et de l'utilisation des instruments mathématiques. Le premier professeur de géométrie est *Henry Briggs* (connu pour ses tables de logarithmes).



L'anneau astronomique fabriqué, en laiton, par nos élèves est un anneau d'Oughtred. Il mesure 14 cm de diamètre.

Autour de lui se forme un groupe de mathématiciens et de scientifiques, parmi lesquels se situe l'inventeur de notre instrument : *William Oughtred* (1574-1660). En 1652 paraît « *The Description of the General Horological Ring* ». Il s'agit d'un anneau astronomique équatorial universel (pour toutes les latitudes), inspiré de celui de *Gemma Frisius* mais simplifié, de sorte à ne répondre qu'à la seule fonction de montre solaire. *Oughtred* a très astucieusement substitué au cercle méridien mobile portant les pinnules de l'instrument de *Gemma Frisius*, un axe dans la direction des pôles (l'axe du Monde). Cet axe supporte une pinnule mobile que l'on déplace selon la date d'observation (et donc la déclinaison du Soleil). L'appareil, pliable, est plus simple, plus robuste, d'un moindre coût.

Pour déterminer l'heure de jour, il suffit :

- De régler l'anneau à la latitude du lieu.
- De régler la pinnule sur l'axe du Monde selon la déclinaison du Soleil au jour de l'observation.
- Simultanément, de faire pivoter l'instrument et de tourner l'axe du Monde (mobile autour des pôles) jusqu'à ce qu'un rayon du Soleil traverse la pinnule et atteigne l'équateur. Si l'on sait si l'on est avant ou après midi, il n'y a qu'une seule telle position et l'instrument est alors orienté.
- L'impact du rayon solaire, sur l'équateur, donne l'heure (« heure solaire vraie »).

## L'astrolabe

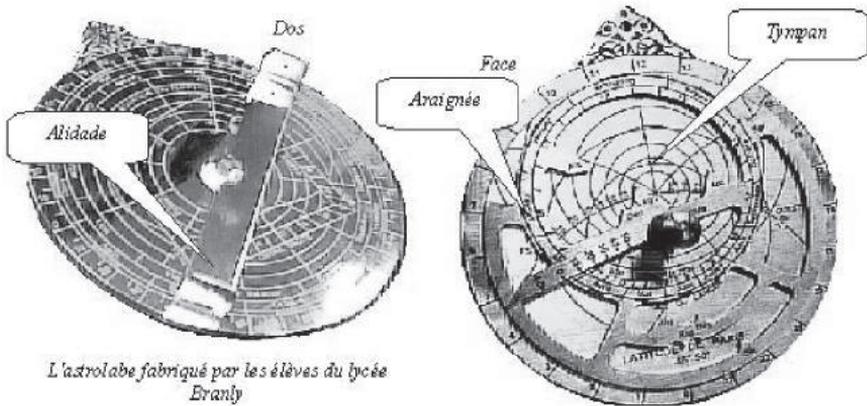
Instrument phare de l'astronomie, avec la sphère armillaire, l'astrolabe en est la projection stéréographique. Comme cette dernière, il est une représentation de l'Univers, dans sa vision géocentrique, et permet de « prendre les astres » (c'est l'étymologie grecque de son nom) pour donner l'heure, s'orienter, calculer et prévoir des phénomènes astronomiques et par là même dresser un horoscope. Pour ses multiples usages, il fut connu comme le « *roi des instruments mathématiques* ». C'est aussi celui dont la longévité fut la plus grande, en usage depuis la fin de l'Antiquité, jusqu'au début des temps modernes. Enfin, c'est sans doute l'instrument mathématique dont le charme ésotérique est le plus immédiat. Voici la présentation qu'en fait *Jean Stöffler* pour l'introduction de son *Traité de la composition et fabrique de l'Astrolabe, et de son usage* :

« *Encore que pour l'usage, et pratique des Mathématiques, lecteurs débonnaires, plusieurs instruments, forts beaux et dignes d'admiration, aient été inventés, déclarés, expliqués, et démontrés entièrement, par plusieurs livres décrits par auteurs très excellents : si est-ce que l'invention, et description, qui est faite du Planisphère, ou Astrolabe, entre toutes est la plus belle, et laquelle on doit plus estimer. [...] d'autant que ceci servira d'un vocabulaire à ceux, qui sont studieux en la discipline des Mathématiques, pour raison de la noble et haute inquisition de ses innumérables commodités, et usages.* »

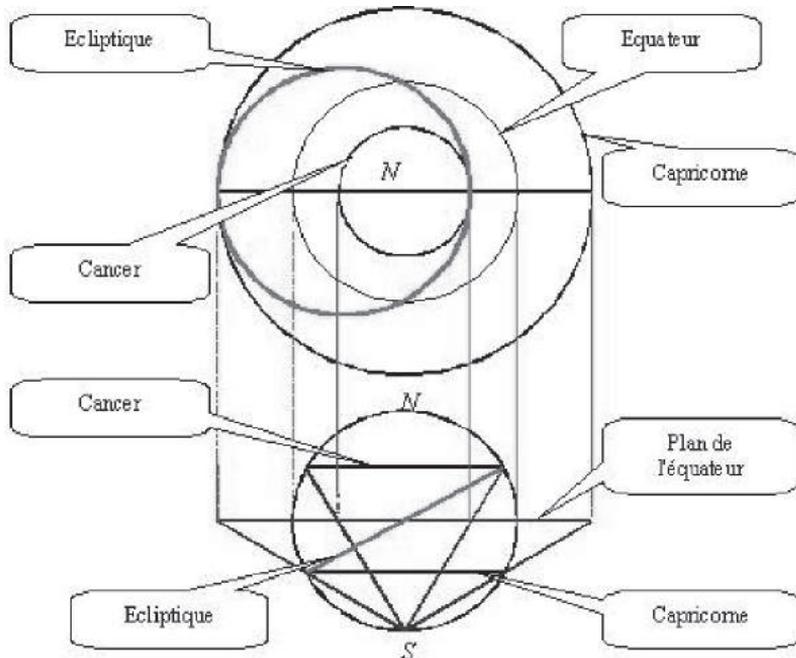
### Principe et usages de l'astrolabe

Pour « prendre les étoiles », on utilise le dos de l'astrolabe que l'on tient alors verticalement. Une tige nommée *alidada* (*al-idada* = la pièce forgée en arabe) ou dioptré en grec, et munie de deux œilletons, les *pinnules*, permet de viser un astre

pour en déterminer la hauteur (angle mesurant son altitude). Cette mesure étant faite, on prend, à plat, l'astrolabe côté face, pour obtenir, par rotation des pièces, l'information souhaitée (l'heure par exemple). Le simple mécanisme de l'instrument remplace tout calcul.



La partie face de l'instrument consiste en une projection stéréographique du système géocentrique de l'Univers. Imaginez votre œil situé au pôle sud de la sphère céleste, l'astrolabe correspond à ce que vous voyez, projeté sur le plan de l'équateur céleste, et limité au tropique du Capricorne.



On effectue en fait une double projection de la sphère céleste. Les parties mobiles de la sphère, dont les étoiles et l'écliptique, donneront l'*araignée*, qui est la pièce ajourée au dessus de la face de l'astrolabe. Ses pointes représentent les étoiles les plus brillantes. L'étoile polaire (fixe dans le ciel) est au centre de l'araignée. En faisant pivoter l'araignée autour de ce centre, on figure le mouvement apparent des étoiles durant la nuit (la Terre est supposée fixe). Les repères fixes de la sphère, comme l'horizon ou le méridien, donneront le *tympan*, situé au fond de l'appareil et correspondant aux coordonnées locales d'observation. Dans l'hémisphère nord, la hauteur de l'étoile polaire (centre de l'astrolabe) au-dessus de l'horizon correspond à la latitude du lieu. Le tympan dépend donc de la latitude.

La première mesure possible, en tenant l'astrolabe verticalement, est celle de l'angle de hauteur du Soleil, ou d'une étoile, par rapport à l'horizon. Elle s'obtient par visée à l'aide de l'alidade à pinnules. Avec cette information, et connaissant la latitude (choix du tympan) et le jour, on peut déterminer l'heure. Pour ce faire, prenant l'astrolabe à plat côté face, on fait tourner l'araignée de façon à reproduire l'aspect du ciel à l'instant de l'observation (hauteur de l'astre visé sur l'horizon). Il suffit alors d'amener l'aiguille (ou *index*) en face de la date du jour, pour lire sur l'heure le bord (*limbe*) de l'instrument.

On peut résoudre les problèmes analogues à ceux envisagés avec la sphère : heure et azimut du lever ou du coucher du Soleil, durée du jour, orientation selon les points cardinaux, ... L'alidade à pinnules permettra de plus la résolution de problèmes topographiques comme la mesure de distances inaccessibles, fondées sur le théorème de Thalès. Enfin, on se doit de citer les usages astrologiques. Il s'agit d'une motivation fondamentale dans le développement de l'astronomie.

### Histoire de l'astrolabe

L'astrolabe est d'origine grecque. Son principe repose sur le procédé mathématique de la *projection stéréographique* de la sphère (des étoiles) sur le plan (de l'équateur). Celui-ci est certainement dû à *Apollonios de Perge*, mathématicien du III<sup>e</sup> siècle av. J.-C., mais c'est le grand astronome *Hipparque* qui, vers 150 av. J.-C., le perfectionna et l'utilisa en astronomie. À *Alexandrie* vers 150 ap. J.-C., *Ptolémée* donne, dans l'*Almageste*, la description d'un « *astrolabon organon* » qui correspond à la sphère armillaire. Dans un autre texte de *Ptolémée*, le *Planisphaerium*, est décrit un planisphère rotatoire qui est une forme primitive d'astrolabe, sans en posséder toutes les caractéristiques (pas d'élément de visée). La première trace quasi certaine d'un traité de l'astrolabe correspond à celui, au IV<sup>e</sup> siècle, de *Théon d'Alexandrie*. L'ouvrage, qui ne nous est pas parvenu, est signalé dans une source arabe du IX<sup>e</sup> siècle, qui en donne le plan.

La première description de l'astrolabe planisphérique qui nous soit parvenue, est celle de *Jean Philopon* qui vécut à *Alexandrie* vers 550 ap. J.-C.. Son *Traité de l'astrolabe* montre qu'au VI<sup>e</sup> siècle l'instrument est techniquement fixé, et ses principaux usages, du moins astronomiques, définis. Il ne s'agit pas d'un ouvrage théorique (aucune justification mathématique), mais d'un ouvrage pratique assez court (15 brefs chapitres).

L'astrolabe fut introduit dans le monde islamique au VIII<sup>e</sup> siècle, à travers les traductions des textes grecs. *Muhammad al-Fazari* est considéré comme le premier à avoir confectionné un astrolabe. Il écrivit un ouvrage sur la sphère armillaire et un autre sur l'utilisation de l'astrolabe. Cet instrument connut un très grand succès dès le IX<sup>e</sup> siècle, où l'on fabriquait déjà de véritables chefs-d'œuvre. Le monde musulman se distingue en effet alors des autres civilisations par ses besoins d'une mesure précise du temps et des phénomènes astronomiques, l'astrolabe permettant, en particulier, de déterminer les heures des prières. Les Arabes en perfectionnèrent le principe pour s'orienter dans le désert ou trouver la direction de *La Mecque*. Le dos de l'instrument, laissé presque libre dans le traité de *Philopon*, sera complété par des tables ou des abaques (pour les calculs trigonométriques ou calendaires) et par un « carré des ombres », invention attribuée au grand mathématicien du IX<sup>e</sup> siècle, *Al-Khwarizmi*, permettant une utilisation de l'astrolabe à des fins topographiques (mesures de distances inaccessibles, ...).

Aux X<sup>e</sup> et XI<sup>e</sup> siècles, l'*Espagne* musulmane fut un important foyer d'études astronomiques et de réalisations d'astrolabes, puis le *Maroc* et en particulier *Marrakech* et *Fès* aux XII<sup>e</sup> et XIII<sup>e</sup> siècles. Au XI<sup>e</sup> siècle, le tolédan *az-Zarqali* (connu également sous le nom d'*Arzachel*) réalise le premier astrolabe « universel », dont le tympan ne dépend pas de la latitude.

Les astrolabes perses ou indiens deviendront par la suite de véritables œuvres d'art, réputés pour leur décoration raffinée.

Le fascinant pouvoir de connaissance, que semble offrir l'astrolabe, explique que dès le X<sup>e</sup> siècle, percer ses mystères était un enjeu important pour les occidentaux, au contact en *Espagne* avec le savoir arabe. C'est ce qui poussa *Gerbert d'Aurillac* (930-1003), le futur pape *Sylvestre II*, à se rendre dans les couvents de *Catalogne* pour consulter les « *Astrolabii Sententiae* », premier texte latin décrivant l'astrolabe. Si son principe fut ainsi connu dès la fin du X<sup>e</sup> siècle, son utilisation ne fut importante qu'à partir du XIII<sup>e</sup> siècle. Sur les premiers modèles d'astrolabe importés d'*Espagne*, des mots latins furent gravés à côté des originaux arabes. C'est ainsi que nombre d'étoiles portent encore, en français, leur nom d'origine arabe (*Altaïr*, *Vega*, *Deneb*) et que l'objet astrolabe, comme les traités décrivant son usage, constituèrent un vecteur de transmission de la terminologie arabe du Ciel et des chiffres arabes (avec les tables astronomiques).

L'astrolabe connut son pic de popularité à la fin du Moyen Âge et à la Renaissance. Il était utilisé dans l'université médiévale pour l'enseignement de l'astronomie.

Face à leurs nouveaux besoins de navigation en haute mer, les Portugais, sous l'impulsion de *Jean II*, développèrent, à la fin du XV<sup>e</sup> siècle, la navigation astronomique. On fabriqua des astrolabes spécifiques aux besoins de la navigation, plus simples et plus lourds, pour résister aux vents et aux mouvements du bateau.

Les progrès réalisés dans la construction des horloges ont été l'une des causes du déclin de l'astrolabe au XVIII<sup>e</sup> siècle, dans le monde occidental. L'autre cause est l'introduction de la visée optique.

## Exploitation en classe

Notre motivation principale, lorsque nous avons commencé à travailler en classe autour des instruments anciens (en productique, histoire, français, mathématiques et physique), était de donner conscience aux élèves de l'unité des savoirs, de la façon dont les différentes disciplines, littéraires, scientifiques et technologiques se complètent, se répondent et s'enrichissent mutuellement. Pour ce faire, l'étude d'un instrument s'est avérée être un vecteur privilégié. D'abord parce qu'un instrument est concret. Il est un symbole fort, matériel, qui donne nécessairement du sens (parce qu'un instrument sert à quelque chose) à nos enseignements. Ensuite, parce qu'un instrument suscite une curiosité naturelle. Pour le comprendre, on doit l'appréhender sous ses différents aspects : pratiques (à quoi sert-il, comment l'utilise-t-on ?), historiques et culturels (qui l'a inventé, à quelle époque, dans quel contexte ?), théorique (quel est son principe ?) et technique (comment peut-on le fabriquer ?). Et l'on constate alors que, bien souvent, tout est lié. La hiérarchie des disciplines s'estompe, les frontières deviennent plus floues.

L'étude d'un instrument pose régulièrement le problème des liens entre théorie (ici la représentation de l'Univers, les idées philosophiques qu'elle suppose, les principes géométriques ou physiques, ...) et applications (utilité, mode d'utilisation, solutions technologiques, ...). Le travail effectué en classe autour de l'instrument modifie l'image des disciplines, dites théoriques ou d'application.

On retrouve dans l'histoire, et en particulier dans le rapport aux instruments, différents changements d'attitude face à la théorie ou à la pratique. *Paolo Rossi*, dans *La naissance de la science moderne en Europe*, affirme que « la grande révolution scientifique du XVII<sup>e</sup> siècle a pour origine cette interpénétration entre technique et science qui a marqué toute la civilisation occidentale et qui, dans les formes qu'elle a prises aux XVII<sup>e</sup> et XVIII<sup>e</sup> siècles, était absente dans la civilisation antique et au Moyen Âge ». *Jean Baudet*, dans *De l'outil à la machine – Histoire des techniques jusqu'en 1800*, insiste sur le rôle des instruments et de la technologie dans l'histoire des sciences : « La science moderne commence à se former au XVI<sup>e</sup> siècle. Il [est] important de dire que c'est à l'aide d'instruments, et du fait des ingénieurs. [...] L'expérimentation résulte de l'utilisation systématique d'instruments en vue d'effectuer des mesures les plus précises possibles afin de déterminer sous forme quantitative et donc mathématique, les relations entre les causes et les effets. » Et de conclure : « C'est par l'action et la pensée (l'instrumentation et la mathématisation) que la technique donnera au monde, non pas des machines et des procédés [...], mais le moyen de connaître le monde, et la place de l'homme dans le monde ».

### Conclusion

Le but ultime de notre action, qui était de décroisser les savoirs de nos élèves, d'ouvrir leur esprit et d'aiguiser leur curiosité, a été, dans une large mesure, atteint. Chaque enseignant du projet a souvent, dans le cadre de son cours, fait appel à des connaissances, dont il savait qu'elles avaient été dispensées dans un autre cours (même si c'était plusieurs semaines plus tôt). C'est avec fierté que nos élèves montrent leur production et, pleins d'inspiration, qu'ils vous parlent, de façon très étonnante, du Ciel d'*Aristote*, même plusieurs années après avoir participé au projet.

Davantage d'informations, et une bibliographie, sont disponibles sur le site : <http://perso.club-internet.fr/dutarte/Siteinstruments>

## ANNEXE I : Principe de l'anneau astronomique (exercice en seconde)

L'anneau astronomique universel est un cadran solaire portatif, réglable en latitude. C'est, en modèle réduit, une représentation en 3 dimensions des lignes essentielles permettant de se repérer en astronomie : l'équateur, le cercle méridien du lieu d'observation et l'axe des pôles.

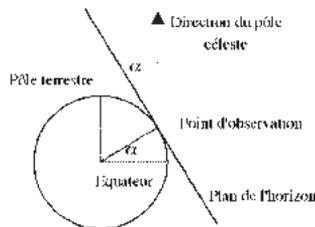


Figure 1

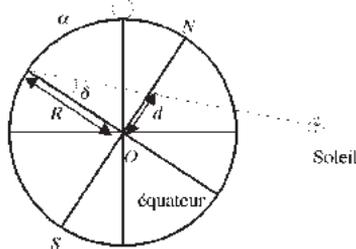


Figure 2

1) Qu'est-ce-que la latitude d'un lieu sur la Terre?

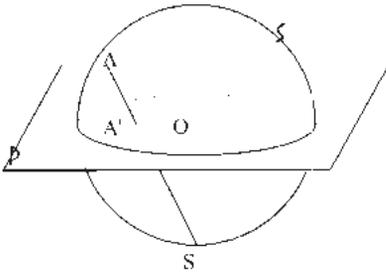
2) Montrer que l'angle de hauteur du pôle céleste (ou de l'étoile polaire) au dessus de l'horizon, c'est-à-dire l'angle  $\alpha$  de la figure 1, correspond à la latitude du lieu d'observation.

3) Lorsqu'on l'utilisera, l'instrument, tenu par l'observateur, sera orienté parallèlement aux repères réels du monde (l'équateur, le méridien, l'axe des pôles). Quelle relation mathématique existe-t-il entre la distance  $d$  séparant la pinnule du centre  $O$ , le rayon  $R$  de l'instrument et la déclinaison  $S$  du Soleil (voir figure 2) ?

4) On construit un anneau de rayon  $R = 5$  cm, à quelle distance  $d$  faut-il placer la pinnule sur l'axe des pôles pour utiliser l'instrument le 1<sup>er</sup> mai, alors que  $\delta = 14^\circ 52'$  ?

## ANNEXE 2 : la projection stéréographique (exercice en seconde)

L'astrolabe est basé sur le principe de la projection stéréographique, déjà utilisée par le grec *Hipparque* au II<sup>e</sup> siècle avant J.-C.

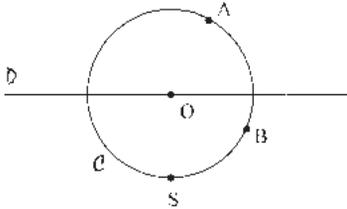


On ne peut pas projeter la sphère  $S$  sur le plan  $\mathcal{P}$  sans déformations. On peut cependant conserver certaines propriétés.

La projection stéréographique de pôle  $S$  projette la sphère  $S$  (sauf le point  $S$ ) sur le plan  $\mathcal{P}$  de la façon suivante :

Le point  $A$  de  $S$  a pour image le point  $A'$  de  $\mathcal{P}$  où  $A'$  est l'intersection de la droite  $(SA)$  avec le plan  $\mathcal{P}$ .

Le point  $A'$  est là où l'on voit le point  $A$ , sur le plan  $\mathcal{P}$ , lorsque notre œil est situé au pôle sud  $S$ .



Plaçons-nous dans le plan contenant les points  $A$ ,  $O$ ,  $S$  :

On considère la projection stéréographique de pôle  $S$ , par laquelle le cercle  $C$ , sauf le point  $S$ , a pour image la droite  $D$ .

1) Tracer les images des points  $A$  et  $B$ .

2) Déterminer l'antécédent du point  $O$ .

3) Y a-t-il des points invariants (qui sont leur propre image) ?

4) On désigne par  $x$  l'angle géométrique  $\widehat{AOA'}$  et par  $R$  le rayon de  $C$ . Montrer que :

$$OA' = R \tan\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) \quad (1)$$

5) On désigne par  $y$  l'angle géométrique  $\widehat{BOB'}$ . Montrer que :

$$OB' = R \tan\left(45^\circ + \frac{y}{2}\right) \quad (2)$$

La projection stéréographique possède les propriétés suivantes (qui font son intérêt) :

- Conservation des angles (deux courbes formant un certain angle sur  $S$  ont des images formant le même angle sur  $\mathcal{P}$ ) et en particulier de la tangence.
- L'image d'un cercle de la sphère  $S$  ne passant pas par le pôle  $S$  est un cercle sur  $\mathcal{P}$ .
- L'image d'un cercle de  $S$  passant par le pôle  $S$  est une droite sur  $\mathcal{P}$ .