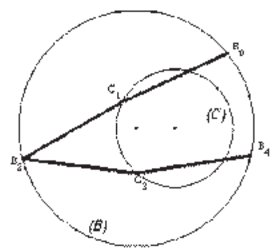
Zigzags entre deux cercles

Françoise Pécaut[(*)]

Une ligne polygonale régulière de 2*n côtés*, fermée, articulée, peut zigzaguer *n* fois entre deux cercles donnés dans le plan euclidien si la longueur du côté de cette ligne est convenablement choisie ; « zigzaguer » signifie qu'un sommet sur deux appartient à l'un des cercles, les autres appartenant à l'autre cercle ; de plus, la figure une fois réalisée, si nous faisons décrire à l'un des sommets tout ou partie du cercle auquel il appartient, les autres sommets suivent le mouvement. Dans ces conditions, nous disons que nous avons réalisé un *zigzag-n*.
Il n'existe probablement pas de démonstration élémentaire de ce théorème. Dans cet atelier, nous avons voulu familiariser les participants avec ses différents aspects et donner un itinéraire naturel de découverte. Les cas particuliers $n = 2$ et $n = 3$ relèvent de la géométrie élémentaire : nous avons proposé aux participants de faire eux-mêmes les démonstrations, en les mettant sur la voie, celle qui nous a permis de conclure, qui n'est pas forcément la seule ni la meilleure.

1. Processus et théorème des zigzags

On se donne arbitrairement deux cercles (B) et (C). On prend un point B_0 sur (B). Soit C_1 l'un des deux points de (C) se trouvant à la distance b donnée de B_0 (b est supposé suffisamment grand). Ensuite B_2 est le point de (B) tel que $B_2 \neq B_0$, $B_2C_1 = b$. Au troisième pas, C_3 est le point de (C) tel que : $C_3 \neq C_1$, $C_3B_2 = b$, etc.
Les sommets d'indice pair sont sur le cercle où on a choisi le point de départ, les sommets d'indice impair sur l'autre ; après k pas, le dernier sommet obtenu est d'indice k, et on a tracé k côtés d'une ligne polygonale.



Théorème des zigzags. Si la ligne polygonale du processus zigzag ferme après $2n$ pas, c'est-à-dire $B_{2n} = B_0$, il en est de même quel que soit le point de départ B_0 sur l'un des cercles. Quels que soient les deux cercles et quel que soit l'entier n, il existe au moins une longueur b telle que la ligne polygonale régulière de côté b ferme en $2n$ pas.

Notations. Nous utiliserons généralement les notations suivantes :
A centre de (B), D centre de (C), d = distance des centres, a = rayon du cercle de centre A, b = longueur du segment qui zigzague, c = rayon du cercle de centre D.

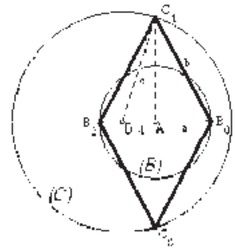
Pour chaque n, il existe une relation algébrique liant les paramètres a, b, c, d, qui permet de calculer b lorsqu'on s'est donné les deux cercles. On peut trouver cette relation et démontrer élémentairement le théorème des zigzags pour les petites valeurs de n. L'atelier a été consacré aux cas $n = 2$ et $n = 3$.

(*) F. Pécaut, 28 rue du Roi René, 84000 Avignon, France. e-mail : pierre.pecaut@wanadoo.fr

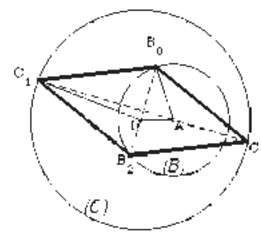
2. Zigzag-2 fermé

Une ligne brisée fermée de quatre côtés égaux est un losange.

(1) *Condition nécessaire pour un zigzag-2 fermé* : il faut que, quel que soit B_0 sur (B), le processus zigzag aboutisse à $B_4 = B_0$. Choisissons pour B_0 l'un des points d'intersection du cercle (B) et de la droite (DA), droite des centres des deux cercles. Par raison de symétrie, B_2 est diamétralement opposé à B_0 sur (B). Alors C_1 et C_3 sont sur (C) et sur la médiatrice du segment B_0B_2. Il reste à appliquer le théorème de Pythagore dans les triangles DAC_1 et B_0AC_1 pour obtenir $b^2 - a^2 = c^2 - d^2$.



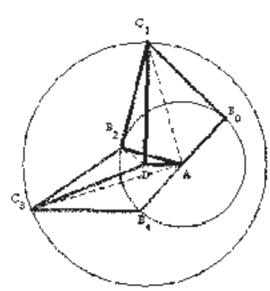
(2) *Condition suffisante* : supposons que les deux cercles et la longueur b soient tels que $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Choisissons arbitrairement B_0 sur (B) et faisons deux pas du processus zigzag jusqu'en B_2. On sait, ou on démontre à cette occasion, que $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère dont les longueurs de côtés sont a, b, c, d dans cet ordre, ait ses diagonales perpendiculaires. Appliquant aux quadrilatères DAB_0C_1 et DAB_2C_1, on prouve que B_0DB_2 sont alignés. Alors C_3, symétrique de C_1 par rapport à la droite B_0B_2, ferme le zigzag-2.



3. Processus et théorème de Darboux pour les quadrilatères articulés

On va décrire ce processus et citer le théorème associé, démontré par Darboux en 1879. On constate que le théorème des zigzags (Bottema, 1965) est équivalent au théorème de Darboux, dont l'énoncé fait découvrir l'existence de deux familles de zigzags.

Processus de Darboux : On construit une suite de quadrilatères dont les longueurs de côtés sont a, b, c, d dans cet ordre, dont les sommets D et A sont fixés. Les notations sont comme plus haut. Le premier terme Q_1 de la suite est DAB_0C_1. Le deuxième terme, $Q_2 = DAB_2C_1$ s'obtient en prenant pour B_2 le symétrique de B_0 par rapport à la diagonale AC_1. Pour le troisième terme, la symétrisation se fait par rapport à la nouvelle diagonale obtenue dans le deuxième terme, à savoir DB_2 ; c'est donc C_1 qu'on doit symétriser par rapport à cette droite pour obtenir C_3. Et ainsi de suite… Chaque terme de la suite a une diagonale commune avec le terme précédent. Les notations sont telles que, lorsqu'on inscrit un nouveau sommet, l'indice de ce sommet est le rang dans la suite du dernier quadrilatère défini. Au premier pas, pour obtenir Q_2 à partir de Q_1, on choisit la diagonale par rapport à laquelle on fait la première symétrisation ; au delà, il n'y a plus de choix.



Définition : forme et position d'un quadrilatère articulé
Deux quadrilatères articulés du plan euclidien ont même *forme* si l'un est l'image de l'autre par une isométrie. Ils ont même *position* si l'un est l'image de l'autre par un déplacement.

Soient deux quadrilatères ABCD et AB′C′D du plan, ayant deux sommets A et D en commun ; pour qu'ils aient même position, il faut et il suffit que B = B′ et C = C′ ; pour qu'ils aient même forme s'ils n'ont pas la même position, il faut et il suffit que B et B′ d'une part, C et C′ d'autre part, soient symétriques par rapport à la droite (DA).

Théorème de Darboux. Ou bien la suite (Q_i) construite ci-dessus présente une infinité de formes distinctes, ou bien $Q_{2n} = DAB_{2n}C_{2n-1}$ a la même forme que $Q_1 = DAB_0C_1$. Dans ce dernier cas, la suite (Q_i) est périodique, elle comporte $2n$ formes distinctes.
Le résultat ne dépend pas de la forme initiale choisie pour le quadrilatère.

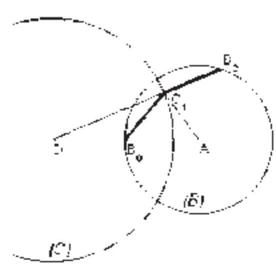
Les points B et C, rangés par leur indice en une suite, sont alternativement sur l'un et l'autre cercle, et la distance mutuelle de deux points consécutifs de la suite est b : *ils forment un zigzag* entre les cercles de rayons a et c centrés respectivement en A et D. Si les longueurs a, b, c, d sont telles qu'on se trouve dans le cas périodique du théorème de Darboux, deux cas sont possibles :

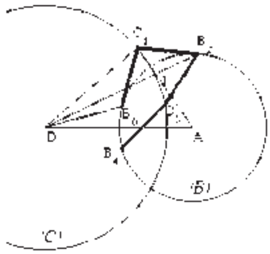
(i) $B_{2n} = B_0$ quel que soit le choix de B_0 sur le cercle de centre A, de rayon a : le processus zigzag ferme en $2n$ pas, la suite des côtés B_iC_{i+1}, $C_{i+1}B_{i+2}$, $0 \leq i \leq 2n-2$, est un zigzag-n fermé.

(ii) B_{2n} symétrique de B_0, C_{2n+1} symétrique de C_1 par rapport à la droite des centres des deux cercles : la suite des côtés B_iC_{i+1}, $C_{i+1}B_{i+2}$, $0 \leq i \leq 2n-2$, est un zigzag-n ouvert. Si on prolonge le processus zigzag au delà de B_{2n}, $B_{2n}C_{2n+1}$ est symétrique de B_0C_1, $C_{2n+1}B_{2n+2}$ est symétrique de C_1B_2, et ainsi de suite, jusqu'à fermer en $4n$ pas ; on a un zigzag-$2n$ fermé symétrique, ainsi nommé pour le distinguer des zigzags-$2n$ fermés pour lesquels $B_{4n} = B_0$ sans que le zigzag soit symétrique (sauf pour un choix de B_0 sur l'axe de symétrie).

4. *n* = 2, zigzag-2 ouvert (À la lumière du théorème de Darboux, nous complétons le §2)

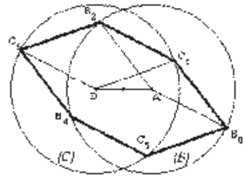
(1) *Condition nécessaire pour un zigzag*-2 *ouvert* : soit B_0 un des points de (B) sur l'axe de symétrie ; après deux pas, B_2 ne peut pas être diamétralement opposé à B_0 sur (B), car le zigzag serait fermé ; c'est donc que le zigzag revient sur lui-même, B_2, C_1, D sont alignés, *le zigzag est plié*. Dans le triangle DC_1B_0, C_1A est bissectrice extérieure, on en déduit que A divise DB_0 dans le rapport des deux autres côtés. La condition cherchée est : $ac = bd$.



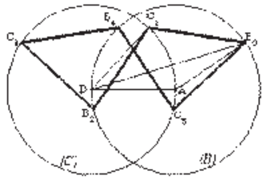


(2) *Supposons la condition remplie*. Prenons arbitrairement B_0 sur (B) et faisons quatre pas C_1, B_2, C_3, B_4 du processus zigzag. Il faut démontrer B_0 symétrique de B_4 par rapport à la droite (DA). On introduit l'un des points I qui partage le segment AC_1 dans le rapport $a / b = d / c$. On calcule le produit $DB_0 \times DB_2 = cd - ab$. De même $DB_0 \times DB_4 = cd - ab$. On en déduit $DB_0 = DB_4$, ce qu'il fallait démontrer.

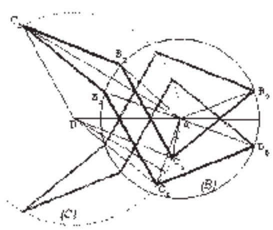
5. Zigzags-3, dans le cas où trois des longueurs *a*, *b*, *c*, *d* sont égales



(1) $a = b = c = 3$; $d = 2$ (distance des centres différente). B_0 arbitraire : on fait trois pas, C_1, B_2, C_3 ; AB_0DC_3 est un parallélogramme, B_0 et C_3 sont symétriques par rapport au milieu de DA, le zigzag complété par symétrie par rapport à ce point, est fermé. *Zigzag-3 fermé centrosymétrique*.



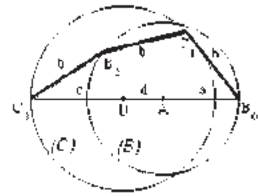
(2) $a = c = d = 3$; $b = 3{,}5$ (longueur de la bielle différente).
B_0 choisi sur (B), C_3 symétrique de B_0 par rapport à la médiatrice de DA. On trace les deux côtés B_0C_1 et B_0C_5 du zigzag issus de B_0 ainsi que les deux côtés C_3B_4 et C_3B_2 du zigzag issus de C_3. On calcule la longueur du segment B_2C_1. On trouve : $B_2C_1 = B_4C_5 = b$. *Zigzag-3 fermé à axe de symétrie*.



(3) $d = b = c = 4$; $a = 3$ (un des cercles de rayon différent).
On choisit B_0 sur (B). Du fait de la présence des losanges $C_1B_2C_3D$ et $C_5B_4C_3D$, le quadrilatère $B_2C_1C_5B_4$ est un parallélogramme. Avec la relation de Chasles et les symétries angulaires, des calculs d'angles orientés à 2π près montrent : $(DA, AB_0) = -(DA, AB_6)$. *Zigzag*-3 *ouvert*.
En continuant le processus zigzag au delà de B_6, *on obtient un zigzag*-6 *fermé, admettant la droite* (DA) *comme axe de symétrie, quel que soit le choix initial* B_0.
Si on prend le point initial B_0 sur la droite (DA), le zigzag-3 et le zigzag-6 sont « pliés ».

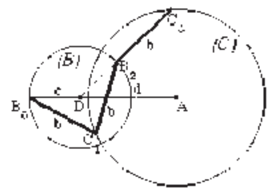
6. Relation liant *a*, *b*, *c*, *d* dans le cas général de zigzag-3

Comme il a été fait pour $n = 2$, supposons le problème résolu :



(i) *Pour un zigzag*-3 *fermé*, la figure doit être telle que le choix de B_0 en l'un des points d'intersection de (B) et de la droite (DA) mène en trois pas à l'un des points d'intersection de (C) et de la droite (DA). La figure ci-contre réalise cette condition. Dans ce cas on peut montrer que :

$$a^2c^2 - b^2d^2 = ac\,(a^2 + c^2 - b^2 - d^2).$$



(ii) *Pour un zigzag*-3 *ouvert*, le même choix de B_0 sur (B) et sur l'axe de symétrie des deux cercles doit mener en trois pas à un point C_3 de (C) tel que D, B_2, C_3 soient alignés, de façon à revenir sur ses pas jusqu'en B_0. La figure ci-contre réalise cette condition pour laquelle il faut :

$$a^2c^2 - b^2d^2 = bd\,(a^2 + c^2 - b^2 - d^2).$$

On peut se convaincre que les conditions sont suffisantes en traçant sur ces figures les zigzags à partir d'un point B_0 quelconque. On trouve bien un zigzag fermé dans le premier cas, un zigzag ouvert à extrémités symétriques dans le second ; on peut continuer ce dernier jusqu'à le fermer en un zigzag-6 symétrique.

7. Rapide survol de ce qui a été dit et n'est pas écrit ci-dessus

Pour ceux qui aimeraient calculer et dessiner des zigzags-4, 5, voici les formules :
$n = 4$: $2\,z^2 = a^2c^2 + b^2d^2$ pour un zigzag-4 fermé ordinaire, $ac - bd = 0$ pour un zigzag-4 fermé symétrique.
$n = 5$: $z^6 - 3\,b^2d^2z^4 + b^2d^2\,(b^2d^2 + 2\,a^2c^2)\,z^2 - a^4c^4b^2d^2 = 0$ pour un zigzag-5 ouvert et un zigzag-5 fermé ; ajouter la relation qui s'en déduit par échange de ac et bd. Il n'existe pas de zigzag-n fermé symétrique pour n impair.

L'introduction de z, défini par $(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)\,z = a^2c^2 - b^2d^2$, facilite l'écriture des relations et les calculs. Quand les deux cercles sont concentriques ($d = 0$), $2\,z\cos \pi/n = ac$. Par exemple, la première équation pour $n = 4$ devient, avec $d = 0$, $2\cos^2 \pi/4 = 1$.

Pour démontrer le théorème des zigzags et pour obtenir des formules de récurrence sur n permettant des dessins précis, il faut recourir aux fonctions elliptiques ; lors de l'atelier, des indications ont été données sur le paramétrage des longueurs de diagonales d'un quadrilatère articulé Q (a,b,c,d) à l'aide des fonctions elliptiques liées à la cubique $y^2 = x\,(x - 1)\,(\lambda - x)$ où λ est une fraction rationnelle des variables a, b, c, d.

Toutes les figures qui dépendent du choix d'un point sur un cercle peuvent s'animer par mouvement de ce point sur le cercle. *Lors de l'atelier, de telles animations ont été montrées*, en particulier dans deux cas de zigzag-5 réductibles à deux cas de cercles concentriques, et dans le cas d'un zigzag-5 ouvert, prolongeable à un zigzag-10 fermé symétrique.

Pour le théorème de Poncelet, qui concerne les polygones circonscrits à un cercle et inscrits dans un autre cercle, les premiers articles publiés remontent à la fin du 18^{e} siècle et l'intérêt suscité par ce théorème ne s'est pas démenti depuis. Pour le théorème des zigzags, qui dépend de la même façon de la théorie des fonctions elliptiques, il semble que la plus ancienne référence soit 1965. Quoi qu'il en soit, les deux théorèmes se formulent de façon accessible au profane et donnent lieu à de beaux dessins.