$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{0^{2^n}}$$

Michel Mendès France(*)

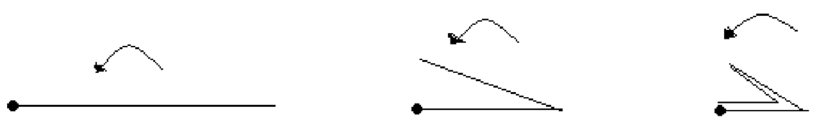
I. Introduction

J'ai choisi d'illustrer le thème des « Mathématiques de la Terre aux Étoiles » en allant à l'infini $\frac{1}{0} = \infty$, au delà des étoiles. Mais on verra qu'en fin de compte la série « interdite » est parfaitement maîtrisée. J'aurai besoin pour expliquer cela de décrire l'opération de pliage de papier, puis les fractions continues.

Le contenu de ma conférence provient d'un article publié il y a quelques années, écrit conjointement avec Ahmed Sebbar [4].

II. Plier du papier

Prenez une grande feuille de papier et pliez la en deux, puis à nouveau en deux et encore en deux.



En dépliant la feuille, la trace des plis subsiste :

V V Λ V V Λ Λ.

On obtient une séquence de longueur $2^3 - 1 = 7$.
On recommence l'opération de pliage, mais cette fois répétée quatre fois.
La feuille remise à plat, on y lit maintenant une séquence de V et de Λ de longueur $2^4 - 1 = 15$:

$\boxed{\text{V V Λ V V Λ Λ}}$ V V V Λ Λ V Λ Λ.

On constate que les sept premiers éléments coïncident avec la séquence obtenue par pliage en trois. Cette observation s'explique : déchirez la feuille en deux, la première moitié a été pliée sur elle-même trois fois de suite !
Dès lors, on l'aura compris, plier une feuille en cinq engendre une séquence de longueur $2^5 - 1 = 31$ dont les 15 premiers éléments coïncident avec la séquence précédente.
Et de façon plus générale, plier une feuille n fois engendre une séquence de longueur $2^n - 1$ dont les $2^{n-1} - 1$ premiers termes sont ceux d'un $(n-1)$-pliage.

(*) A2X, Université Bordeaux I. mél : mmf@math.u-bordeaux.fr.

La récurrence est ainsi établie et permet de définir une suite infinie de V et de Λ obtenue en pliant une infinité de fois une feuille sur elle-même. Cette suite, appelée suite de pliage débute ainsi :

V V Λ V V Λ Λ V V V Λ Λ V Λ Λ V V V Λ V V Λ Λ Λ V V Λ Λ V Λ Λ …

Elle a de multiples propriétés. Je n'en choisirai qu'une qui pourrait servir de définition mathématique. Jusqu'ici nous n'avons pas abordé les maths à proprement parler.

Lorsque l'on regarde les termes de rang impair, on constate que l'on obtient une alternance stricte de V et de Λ. Quant aux termes de rang pair, on constate qu'ils forment une nouvelle suite précisément égale à la suite de départ :

V	V	Λ	V	V	Λ	Λ	V	V	V	Λ	Λ	V	Λ	Λ	V	V	V	Λ	V	V	Λ	Λ	Λ	V	V	Λ	Λ	V	Λ	Λ
V		Λ		V		Λ		V		Λ		V		Λ		V		Λ		V		Λ		V		Λ		V		Λ
	V		V		Λ		V		V		Λ		Λ		V		V		V		Λ		Λ		V		Λ		Λ	

Ces observations peuvent se « démontrer » à partir de l'opération de pliage, mais l'on peut choisir de changer de point de vue et *définir* notre suite par ces propriétés.

Il est pratique de coder V par +1 et Λ par −1. La suite est donc une suite infinie :

$$+1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, +1, -1, -1, +1, \dots$$

Soit $s_n = +1$ ou -1 le n-ième terme ($n \geq 1$).

Théorème ou définition

$$\begin{cases} s_{2n+1} = (-1)^n, n \geq 0 \\ s_{2n} = s_n, n \geq 1 \end{cases}$$

III. Fractions continues

Soit $x \geq 0$ un réel donné. Soit $[x]$ sa partie entière et $\{x\}$ sa partie fractionnaire.

$$x = [x] + \{x\} = a_0 + \{x\}.$$

Si x n'est pas entier, alors $0 < \{x\} < 1$ donc $\{x\}$ s'écrit $\dfrac{1}{x_1}$ où $x_1 > 1$. Alors

$$x_1 = a_1 + \{x_1\},\ a_1 \geq 1 \text{ entier.}$$

Si à son tour x_1 n'est pas entier alors $\{x_1\} = \dfrac{1}{x_2}$, $x_2 > 1$, etc. Bref

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

où les $a_j \geq 1$ et $a_0 \geq 0$.

Cette fraction continue se note plus commodément :

$$x = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots].$$

On montre sans difficulté que si x est rationnel, alors la fraction continue s'arrête et on peut toujours choisir son dernier terme $a_n \geq 2$.
Si x est irrationnel, la fraction continue admet une infinité de termes.
De nombreux ouvrages élémentaires étudient la théorie des fractions continues et en premier lieu montrent la convergence de $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ quand n tend vers l'infini vers le réel irrationnel x.
Voir par exemple le très célèbre livre de Hardy et Wright [1].
Voici quelques exemples

(i) $\frac{47}{15} = [3, 7, 2]$.

(ii) On part de l'identité $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ que l'on itère :

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = [1, 2, 2, \ldots, 2, \ldots],$$

ce qui prouve en passant que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
(iii) e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, …].
Le motif est simple et se répète à l'infini …, 1, 1, $2n$, 1, 1, $2(n+1)$, 1, 1, …
La formule n'est pas facile à obtenir.
(iv) $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 4, \ldots]$.
Aucune structure simple connue…

IV. La fraction continue de Kmosek et Shallit

Voici un exemple étonnant de développement en fraction continue découvert indépendamment par deux étudiants M. Kmosek (Tchècoslovaque) et J. Shallit (Américain) il y a une trentaine d'années [2] [5]. Il s'agit du nombre :

$$\alpha(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^{2^n}}$$

où $b \geq 2$ est un entier. La formule ci-dessus donne le développement en base b du nombre $\alpha(b)$.
Commençons par une remarque fondamentale qui se trouve dans un de mes anciens articles [3].

Soit $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel dans]0,1[. Son développement en fraction continue est :

$$\frac{p}{q} = [0, a_1, \ldots, a_n]$$

où je suppose n pair (ceci n'est pas vraiment une limitation car sinon on remplace a_n par $a_n - 1 + \frac{1}{1}$).

Alors

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{q^2} = [0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1, a_n - 1, a_{n-1}, \ldots, a_1].$$

La preuve n'est pas bien compliquée mais je ne la donnerai pas ici.

Ce qui est remarquable, c'est que $\frac{p}{q}$ est représenté par le mot :

$$\overrightarrow{w} = a_1 a_2 \ldots a_n$$

et que $\frac{p}{q} + \frac{1}{q^2}$ s'obtient par la « symétrie perturbée » $\overrightarrow{w}\overrightarrow{\pi}\overleftarrow{w}$ où $\overrightarrow{\pi}$ représente la perturbation {+1,-1}. Le mot $\overleftarrow{w}$ est bien entendu le mot $\overrightarrow{w}$ lu à l'envers.

Je note s l'opérateur de symétrie perturbée : $s\left(\overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{w}\overrightarrow{\pi}\overleftarrow{w}$.

Revenons au nombre $\alpha(b)$. Les deux premiers termes de la série s'écrivent :

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} = \frac{b+1}{b^2} = \frac{1}{b - 1 + \frac{1}{b+1}} = [0, b-1, b+1].$$

Ajoutons le troisième terme :

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^{2^2}} = \frac{b+1}{b^2} + \frac{1}{(b^2)^2} = [0, b-1, b+2, b, b-1]$$

d'après la remarque précédente. Bref

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^{2^2}} = [0, b-1, b+2, b, b-1].$$

Ce développement est donc $s\left(\overrightarrow{w}\right)$ avec $\overrightarrow{w} = b-1, b+1$.

Le terme suivant de $\alpha(b)$ est $\frac{1}{b^{2^3}}$ d'où

$$\sum_{n=0}^{3} \frac{1}{b^{2^n}} = [0, b-1, b+2, b, b, b-2, b, b+2, b-1],$$

soit $s^2\left(\overrightarrow{w}\right)$ (on a appliqué s deux fois)

On continue ainsi d'où en fin de compte le développement en fraction continue de $\alpha(b)$ est représenté par $\alpha(b) = [0, s^{\infty}(b-1, b+1)]$.

On constate que $\alpha(b) = [0, b+c_1, b+c_2, b+c_3, \ldots]$ où $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$, $c_5 = -2$, … Bref pour $n \geq 2$, $c_n \in \{0, +2, -2\}$.

Regardons la suite $s^{\infty}\left(\vec{w}\right)$:

$$\vec{w} \xrightarrow{s} \vec{w}\pi\vec{w}\overleftarrow{} \xrightarrow{s} \overrightarrow{w}\overrightarrow{\pi}\overleftarrow{w}\overrightarrow{\pi}\overrightarrow{w}\overleftarrow{\pi}\overleftarrow{w} \xrightarrow{s} \ldots$$

d'où une suite de mots et de perturbations :

$$\overrightarrow{w}\overrightarrow{\pi}\overleftarrow{w}\overrightarrow{\pi}\overrightarrow{w}\overleftarrow{\pi}\overleftarrow{w}\overrightarrow{\pi}\overrightarrow{w}\overrightarrow{\pi}\overleftarrow{w}\overleftarrow{\pi}\overrightarrow{w}\overleftarrow{\pi}\overleftarrow{w}\ldots$$

Si on ignore les flèches, on constate sans surprise la périodicité $w\pi w\pi\ldots$

Par contre, la surprise c'est que la suite des flèches est la suite du pliage du papier ! (facile à montrer).

Ainsi la suite de pliage est cachée dans le développement en fraction continue de $\alpha(b)$.

Une étude un peu plus détaillée montre en fait que, pour $n \geq 2$,

$$c_n = (-1)^{[n/2]} + (-1)^n s[n/2].$$

Voici une autre surprise. Calculons $[0, c_1, c_2, \ldots, c_n]$ pour diverses valeurs de n.

$$[0, c_1] = \frac{1}{-1} = -1.$$

$$[0, c_1, c_2] = \frac{1}{-1 + \frac{1}{2}} = -2.$$

$$[0, c_1, c_2, c_3] = \frac{1}{-1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{0}}} = -1.$$

$$[0, c_1, c_2, c_3, c_4] = \frac{1}{-1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{0 + \frac{1}{0}}}} = -2.$$

La valeur suivante serait –3. Rappelez vous la suite de pliage :

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	…
+1	+1	−1	+1	−1	−1	−1	…

On a $s_1 = +1$, $s_1 + s_2 = +2$, $s_1 + s_2 + s_3 = +1$, …

On découvre que l'égalité

$$[0, c_1, c_2, \ldots, c_n] = -\sum_{k=1}^{n} s_k$$

a lieu pour n = 1,2,3,4,5. En fait, on montre qu'elle est vraie en toute généralité.
Étant établie pour tout n, je le représente formellement pour $n = \infty$ par :

$$[0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots] = -\sum_{k=1}^{\infty} s_k.$$

Si vous avez en tête le développement en fraction continue de $\alpha(b)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^{2^n}} = [0, b + c_1, b + c_2, \ldots],$$

vous concluez, en prenant $b = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{0^{2^n}} = [0, c_1, c_2, \ldots] = -\sum_{k=1}^{\infty} s_k.$$

La dernière série diverge, bien entendu, mais on a donné un sens à la série $\sum 0^{-2^n}$.
Elle ne converge pas vers un nombre. C'est une expression formelle qui ne fait que traduire l'égalité parfaitement légitime :

$$[0, c_1, c_2, \ldots, c_n] = -\sum_{k=1}^{n} s_k \; .$$

V. Conclusion

Je voulais montrer par cet exercice que, contrairement à ce que beaucoup de gens pensent, surtout chez les non-mathématiciens, les mathématiques sont souples.
Je n'irai pas jusqu'à prétendre qu'on fait dire n'importe quoi aux mathématiques … mais presque.
On sait que pour Euler :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n = -\frac{1}{4}$$

C'est encore Euler qui calcule : $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! = 0{,}596\,3\ldots.$

Et enfin tout physicien théoricien sait que $\infty ! = \sqrt{2\pi}$.
Les exemples abondent.

Références

[1] G.H. Hardy, E.M. Wright. An introduction to the theory of numbers, Oxford University Press, 5e édition, 1985.
[2] M. Kmosek. Thèse, 1979, Varsovie (en polonais).
[3] M. Mendès France. Sur les fractions continues limitées, Acta Arithmetica, vol. 23, 1973, p. 207-215.

[4] M. Mendès France, A. Sebbar. The ultra-divergent series $\sum 0^{-2^n}$, Number Theory in progress in honor of A. Schinzel, Walter de Gruyter Pub, 1999, p. 327-335.
[5] J. Shallit. Simple continued fractions for some irrational numbers, Journal of Number Theory ,vol. 11, 1979, p. 209-217.

Note de Claude Terras

Justification de $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n = -\frac{1}{4}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-x)^n\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right)' = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

valable si $|x| < 1$, puis on fait tendre x vers 1.

Justification de $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! = 0,596\,3\ldots$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^{+\infty} x^n \,\mathrm{e}^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n \,\mathrm{e}^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}\,dx = 0,596\,3\ldots$$