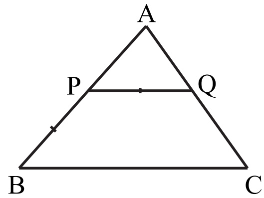
Exercices de ci, de là

1) Un jardinier doit faire un massif en forme d'ellipse. Il connaît l'emplacement et la longueur du grand axe AB. Le massif doit border le regard P d'une canalisation, c'est-à-dire que l'ellipse devra passer par le point P – ce point est situé à l'intérieur du cercle de diamètre AB et ne se trouve pas sur AB ni sur la médiatrice de AB –. Le jardinier dispose d'un cordeau de longueur AB terminé par deux piquets et de deux autres piquets. Dites comment il tracera son ellipse, sachant qu'il s'impose de ne pas planter de piquet à l'extérieur de la future ellipse.

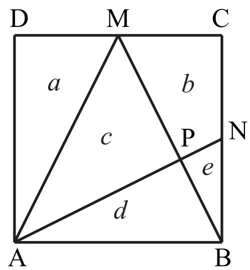
2). Show that the volume of a cone inscribed in a sphere cannot be more than 8/27 of the volume of the sphere.

3). In triangle ABC, PQ is drawn parallel to BC such PQ = PB. AP and AQ are 3 cm and 4 cm respectively. If B C is 2 cm longer than PQ, find the measure of angle BAC. (*On peut arrêter l'exercice au calcul des longueurs du triangle ABC*).



NDLR : *Les exercices 2 et 3 sont tirés de Mathematical Association of South Australia 1989.*

4) **Découpage d'aires dans un carré.** Soit un carré ABCD de coté 10 et M et N les milieux des cotés CD et BC. Quelle est l'aire de la région b ?



Daniel Reisz, d'après une idée de Ed Barbeau dans un article de ce dernier dans Notes de la SMC (Société Mathématique du Canada) Volume 36, nº 4, mai 2004.

5) **L'octogone du Texas**. La revue FOCUS de la Mathematical Association of America (MAA) rapporte dans son numéro de décembre 2003, sous le titre *The Texas Octogon Massacre* l'affaire suivante : Dans une épreuve de mathématiques d'un examen public de l'État du Texas était posé le problème suivant :

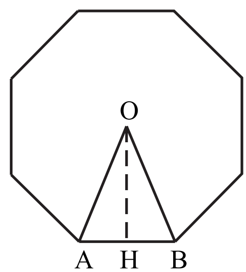
Dans l'octogone ci-contre on a :

OA = 4,6 cm *et* OH = 4 cm

Parmi les entiers

41, 36, 27, 18,

quel est celui qui est le plus proche de la longueur du périmètre ?



Premier calcul. Utilisation de Pythagore :

$$p_1 = 16\sqrt{4{,}6^2 - 4^2} \cong 36{,}34$$

et la réponse serait donc 36.

<u>Deuxième calcul.</u> Utilisation du sinus :

$$p_2 = 16 \times 4{,}6 \times \sin\frac{2\pi}{16} \cong 28{,}16$$

et la réponse serait alors 28.

<u>Troisième calcul.</u> Utilisation de la tangente :

$$p_3 = 16 \times 4 \times \tan\frac{2\pi}{16} \cong 26{,}51$$

et la réponse serait 27.

Trois périmètres pour un seul octogone, cela fait beaucoup…

Daniel Reisz

Solutions

Exercice 2 du n° 451.

Énoncé : Diviser un trapèze en deux parties équivalentes par une parallèle aux bases.

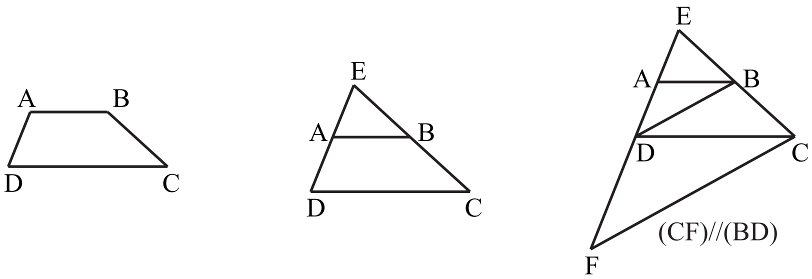
Solution de Bruno Alaplantive :

En posant EA = 1 et ED = k, pour les aires on a (EDC) = k^2 (EAB) et donc (ABCD) = (k^2 – 1) (EAB).

On obtient de même (ABQP) = (h^2 – 1) (EAB) et la demande (ABQP) = $\frac{1}{2}$ (ABCD)

équivaut à $h^2 - 1 = \frac{k^2-1}{2}$ soit aussi $h = \sqrt{\frac{k^2+1}{2}}$.

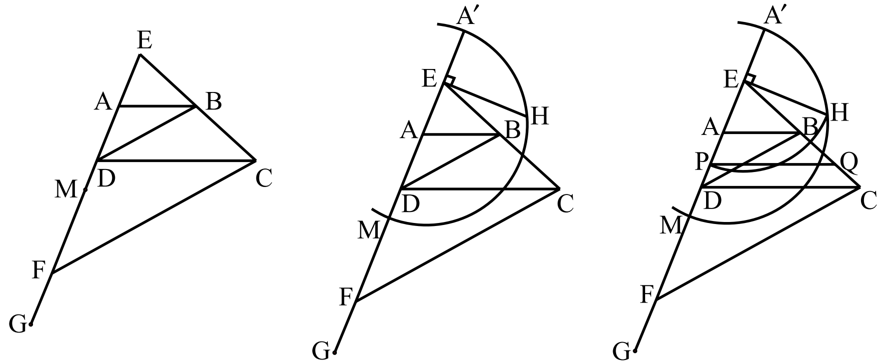
À la façon de Descartes,



En posant EA = 1 et ED = k, on a EF = k^2.

En reportant EA en FG puis en plaçant le milieu M de [EG], on a $\mathrm{EM} = \dfrac{k^2 - 1}{2}$.

On termine alors par la construction classique de la racine carrée d'un nombre :

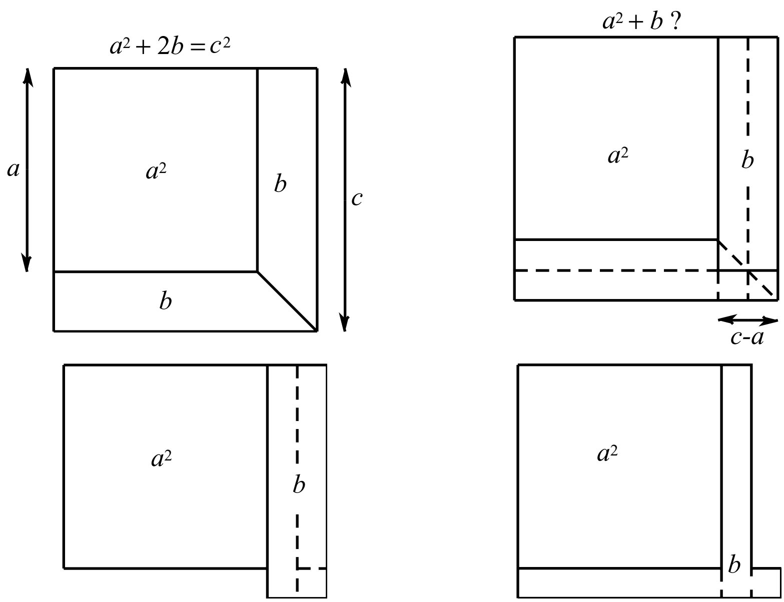


Exercice 6 du nº 451.

Énoncé : On considère deux nombres entiers (positifs) a et b tels que $a^2 + 2b$ soit un carré parfait.
Mettre $a^2 + b$ sous la forme d'une somme de carrés d'entiers..

Solution de Bruno Alaplantive :

À la façon d'Al Kwarizmi



Donc $a^2 + b = \left(a + \dfrac{c-a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{c-a}{2}\right)^2$!