

## Ce que les philosophes ont appris des mathématiques (II) ou de quoi parle-t-on ?(\*)

Jean-Marie Nicolle

L'arrivée du christianisme en Occident a bouleversé la vision du monde qu'avaient les philosophes et les mathématiciens grecs. Ils pensaient que le monde était éternel, immuable, ordonné par une harmonie intangible. Or, voilà qu'on dit que le monde a été créé par un Dieu, qu'il est le lieu d'une histoire entre les hommes et ce Dieu. Les successeurs de Platon vont poursuivre sa réflexion sur les mathématiques en s'intéressant moins à la méthode qu'à leurs objets. Le problème dit « de la participation » les préoccupe au premier chef. Il s'agit de comprendre le rapport entre la réalité sensible et les idées. Comment les idées peuvent-elles organiser le réel ? Comment les réalités sensibles peuvent-elles participer des idées ? Les objets mathématiques se retrouvent au cœur de cette interrogation, car leur nature mixte, à la fois sensible et intelligible, les place à la charnière des deux genres ; mais, surtout, ils ont été utilisés par Dieu au moment de la création du monde. *Tu as tout disposé selon la mesure, le nombre et le poids. (Omnia mensura et numero et pondere disposuisti, in Livre de la Sagesse, XI, 20, que l'on traduit aussi par Tu as tout réglé avec nombre, poids et mesure, in La Sainte Bible, École biblique de Jérusalem, Paris, Cerf, 1955, p. 881.)* C'est la formule biblique de base que l'on retrouve tout au long du Moyen Âge. On se demande quels sont ces objets mathématiques pour que Dieu lui-même s'en soit servi afin de créer le monde. Les objets mathématiques redeviennent une énigme.

### a – Du côté des définitions

Proclus (v. 412 – 485 ap. J. C.) représente bien l'effort fourni pour tenter de comprendre la nature des notions mathématiques. La géométrie représente pour lui un idéal au point de composer ses *Éléments de théologie* sous la forme d'un traité mathématique. Il affectionne particulièrement le raisonnement par l'absurde qui conclut à une hypothèse en éliminant toutes les autres. Pour réussir par ce biais, il lui fallait un classement précis des termes. Dans son *Commentaire sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, qui commente notamment les définitions géométriques d'Euclide, il donne une définition métaphysique aux objets mathématiques. Il classe les termes d'après leur généralité : plus un terme est général, plus il vaut ; chaque terme général est cause des choses comprises dans son extension. Par exemple, l'unité est cause de toutes les choses dont on peut dire qu'elles sont unes. La façon dont Proclus parle des notions mathématiques nous paraît aujourd'hui assez exotique, littéraire, diraient certains ; en tout cas elle ne manque pas de poésie.

(\*) La première partie est parue dans le numéro 452, p. 442-449.

Commençons par la notion de limite. Le point, la ligne et la surface sont des limites (le point pour la ligne, la ligne pour la surface et la surface pour le corps). La fonction de la limite est d'empêcher que la grandeur étendue ne s'échappe dans l'indétermination, qu'elle s'étende dans l'infini. Aussi, ce qui limite est-il inférieur d'une dimension à ce qui est limité. Par exemple, la ligne, qui n'a qu'une dimension, limite la surface plane qui en a deux. Ensuite, l'unité, selon Proclus, est plus parfaite que la multiplicité, car l'un est impartageable. L'unité est plus simple que le point et le précède. À la différence du point, l'unité est sans position, exempte de toute dimension et de tout lieu, alors que le point occupe une position. Pour Proclus, le point est un élément, c'est-à-dire ce jusqu'à quoi s'étend la décomposition des corps, non pour les sens, mais pour la raison ; il est aussi un impartageable. Le point, en effet, engendre toutes les autres grandeurs sans cependant y perdre son indivisibilité.

La ligne est une longueur sans largeur, une grandeur dimensionnée d'une seule manière. Selon Proclus, elle ne saurait être définie seulement comme le flux du point car ce serait la définir par sa cause et représenter ainsi seulement la ligne matérielle. La ligne se rend infinie par elle-même en raison de sa propre progression. C'est pourquoi elle doit être arrêtée dans son audace excessive par ses deux extrémités qui sont des points.

Le cercle est une certaine aire plane ; la circonférence est sa limite et son extrémité. Dans le cercle, le centre, les rayons et la circonférence sont séparés, et, cependant, ils sont les uns dans les autres. Le cercle est tel qu'il se place dans une position désirable avant les autres choses. Il donne part à l'existence des choses disposées autour de lui. Proclus voit dans le cercle la première, la plus simple et la plus parfaite des figures géométriques. Le cercle l'emporte sur toutes par sa similitude, son identité avec soi-même. Il correspond à l'achevé, à l'unité, au meilleur arrangement. Il est d'une nature plus divine que les autres figures. Le cercle est attribué au ciel, alors que les formes rectilignes sont attribuées à la terre.

Proclus distingue la ligne droite de la ligne circulaire par des caractères qui en font des symboles très différents. La ligne droite est la plus simple ; nulle dissimilitude ne s'y trouve. Dans le cercle, la circonférence n'est pas engendrée par une droite mais par le point emporté autour du point fixe au centre. La droite, elle, ne détermine que la distance de la circonférence au centre. *La ligne droite est symbole de la Providence inflexible, incorruptible, immaculée, inépuisable, omnipotente, présente à toutes les choses* (PROCLUS, *Commentaire sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, trad. Paul Ver Eecke, Paris, Blanchard, 1940, p. 98).

On est loin du classement moderne des lignes qui renverse complètement cette hiérarchie. Kepler a fait du cercle un cas particulier des sections coniques : le cercle est une ellipse dont tous les diamètres sont égaux. Aujourd'hui, la ligne droite est considérée comme un cas particulier de la ligne courbe : c'est une ligne dont la courbure est nulle. Le principe générateur des lignes est actuellement la courbure, et non plus la rectitude. Avec Proclus, on voit le commentaire philosophique sombrer dans le symbolisme religieux. Et, certes, au long du Moyen Âge, les objets mathématiques sont chargés de symboles. Mais il serait injuste de réduire les

mathématiques médiévales, en Occident, à ce seul aspect. On y mène également d'authentiques recherches. Voyons l'exemple de l'angle.

### b – Dans le coin des angles

La notion d'angle, malgré les apparences, n'est pas si simple. Les textes babyloniens et égyptiens n'en parlent pas. Ce sont les pythagoriciens qui, les premiers, ont essayé de définir l'angle avec les premiers objets de la géométrie comme le point, la ligne, etc. Chez Platon, l'angle fait partie des hypothèses du géomètre (hypothèse, non au sens de conjecture, mais au sens de donnée fondamentale). Selon Euclide, *un angle plan est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite* (L. I, déf. 8, Euclide, *Les Éléments*, vol. 1, Paris, PUF, 1990, trad. B. Vitrac, p. 158). Cette première définition est très restrictive, car elle écarte l'angle plat, l'angle curviligne, l'angle mixte et l'angle solide. Plus loin, dans ses *Éléments*, Euclide devra compléter sa définition en prenant en considération ces autres sortes d'angles. Très vite, le débat va consister à savoir dans quelle catégorie on doit placer l'angle : est-ce une qualité ? Une quantité ? Une relation ? Finalement, qu'est-ce qu'un angle ?

Aristote en fait une qualité en le définissant comme une ligne brisée : *La ligne droite est plus une que la ligne brisée. Nous disons de la ligne qui a flexion et angle, qu'elle est et une et non-une* (*Métaphysique*, Δ, 1016 a 13). Cependant, un angle rectiligne peut être bisecté, autrement dit divisé ; un angle peut être dit plus grand ou plus petit qu'un autre. Il peut être quantifié. C'est pourquoi il ne peut être considéré seulement comme une qualité.

On découvre très vite que tous les angles ne sont pas du même genre, c'est-à-dire capables de se dépasser l'un l'autre par addition répétée. Par exemple, l'angle corniculaire (Fig. 5) est plus petit que tout angle rectiligne, si petit soit-il. Euclide, dans ses *Éléments*, écrit : *La droite menée à angles droits avec le diamètre du cercle, à partir d'une extrémité tombera à l'extérieur du cercle, et dans le lieu compris entre la droite et la circonférence, une autre droite ne sera pas intercalée ; en outre, d'une part l'angle du demi-cercle est plus grand, d'autre part l'angle restant plus petit, que tout angle rectiligne aigu* (III, 16, Euclide, *Les Éléments*, vol. 1, Paris, PUF, 1990, trad. B. Vitrac, p. 423-424). C'est pourquoi il définit l'angle plutôt comme une relation, en parlant de l'inclinaison de deux lignes (supposées demi-droites et se touchant en leur extrémité commune). Toutefois, là encore, il y a une difficulté car cette rencontre définit en réalité deux relations (l'angle interne et l'angle externe), mais Euclide n'en dit rien.

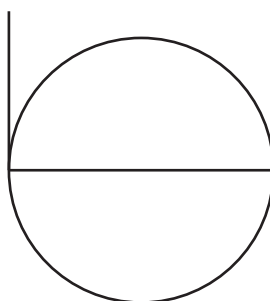


Fig.5

Proclus, dans son *Commentaire du premier livre des Éléments d'Euclide*, montre d'abord les objections contre les trois catégories (qualité, quantité, relation) : l'angle n'est pas exactement une qualité car il n'y a pas d'angles plus ou moins angles les uns que les autres, comme il y a de l'air plus ou moins chaud ; l'angle n'est pas exactement une quantité car les angles ne se divisent pas tous les uns par les autres (par exemple, aucun angle rectiligne ne divise l'angle corniculaire) ; l'angle n'est pas exactement une simple relation car une inclinaison peut engendrer plusieurs angles (par exemple, au sommet d'un cône sectionné verticalement par un triangle plan, il y aura un angle plan et un angle de surface mixte). C'est pourquoi Proclus considère que l'angle appartient à la fois aux trois catégories de la qualité, de la quantité et de la relation. Il propose une nouvelle définition pour le moins confuse : la nature de l'angle consiste ... *dans une surface contractée en un point et comprise sous des lignes inclinées, ou sous une seule ligne inclinée sur elle-même, ou consiste encore dans un solide contracté sous des plans inclinés l'un sur l'autre, afin que ce soit une quantité douée d'une certaine qualité et constituée par une relation de cette sorte qui définisse l'angle et non pas la quantité en particulier ni la qualité seule ni la relation* (PROCLUS, *Commentaire sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, trad. Paul Ver Eecke, Paris, Blanchard, 1940, Commentaire de la définition VIII, p. 113).

Au Moyen Âge latin, la discussion rebondit. Mais auparavant, il va falloir reconstituer tout le savoir mathématique des Grecs. En effet, on ne dispose plus au XI<sup>e</sup> siècle que de compilations pratiques des *Éléments*, c'est-à-dire des listes de propositions sans leurs démonstrations, et lorsque des maîtres-ès-arts veulent démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à  $180^\circ$ , ils ne savent plus le démontrer. Ils ont l'énoncé de la proposition, mais ne savent pas ce que veulent dire les expressions « angle intérieur » et « angle extérieur » qu'ils confondent avec « angle aigu » et « angle obtus ». Il faut attendre le milieu du XIII<sup>e</sup> siècle pour que Campanus de Novare reconstitue à peu près les *Éléments* d'Euclide à partir de plusieurs sources. C'est cette version des *Éléments*, en 15 livres, encore très fautive, qui va s'imposer jusqu'au XV<sup>e</sup> siècle.

Thomas Bradwardine (1290-1349), dans sa *Geometria Speculativa*, en 2. 3. 07, en s'appuyant sur la proposition III, 16 d'Euclide, soutient qu'un angle d'incidence peut être plus grand ou plus petit qu'un angle rectiligne, mais qu'il ne lui sera jamais égal. Il est plus grand que tous les angles rectilignes aigus avant l'angle droit ; il est plus petit que tous les angles rectilignes obtus ou droits. Et, paradoxalement, il peut être augmenté ou diminué à volonté. Il est le plus grand de tous les angles aigus parce qu'il diffère de l'angle droit seulement de l'angle de contingence (ou corniculaire) qui est plus petit que tout angle rectiligne. Il est plus petit que tous les angles rectilignes obtus jusqu'à l'angle droit parce qu'il est compris à l'intérieur de l'angle droit. Il peut être augmenté ou diminué à volonté, car si l'on décrit des cercles contingents de l'intérieur (Fig. 6), dont les centres s'étendent sur une même droite, on voit que plus

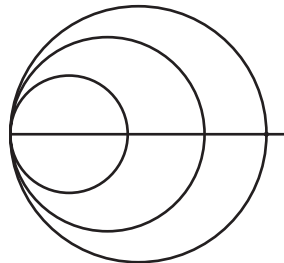


Fig.6

le cercle est grand, plus l'angle d'incidence augmente (et plus l'angle corniculaire diminue) et, cependant, jamais il n'arrivera à l'égalité avec l'angle droit.

Nicole Oresme (1323-1382) étudie les différents cas de l'improportionnalité des angles au cours d'une discussion cherchant à démontrer que l'angle n'est pas une substance mais n'est qu'un accident. Il montre que des angles circulaires ont un comportement bizarre : ils peuvent être soumis à augmentation et à diminution sans passer par l'égalité. Il donne trois cas :

1 – l'angle corniculaire formé entre deux cercles tangents va devenir brutalement plus grand qu'un angle rectiligne dès que les deux cercles commencent à s'entrecouper ;

2 – si un cercle diminue jusqu'à disparaître, l'angle d'incidence constitué par la circonférence et le diamètre reste toujours plus grand qu'un angle rectiligne aigu sans jamais pouvoir être en rapport rationnel avec un angle rectiligne, puis il devient nul, brusquement, lorsque le cercle se réduit à un point ;

3 – enfin, dans le cas où une corde descend depuis le diamètre jusque vers la circonférence, on constate que l'angle d'incidence qui était plus petit que l'angle droit devient en un instant plus grand que cet angle droit et augmente infiniment, sans passer par l'égalité avec un droit (Fig. 7).

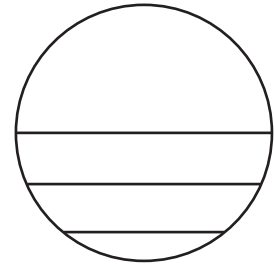


Fig.7

Ce petit historique montre le dynamisme des recherches au Moyen Âge latin. Ces auteurs nous paraissent bien démunis face à des problèmes que nous savons aujourd'hui résoudre facilement. On a l'impression, parfois, d'un retour considérable en arrière, dans une civilisation exotique, avec des outils conceptuels bien pauvres. Mais ce voyage dans le temps a le mérite de nous faire mesurer la difficulté réelle de certaines questions fondamentales. Qu'est-ce que l'égalité ? Qu'est-ce qu'un angle ? Ces deux questions paraissent d'une simplicité élémentaire. Et, pourtant, elles ne sont pas si simples ; il a fallu bien des efforts pour les clarifier et trouver les concepts adéquats pour y répondre. À la fin du Moyen Âge, les mathématiques ont gagné un prestige inversement proportionnel à la culture mathématique populaire : on révère d'autant plus une science qu'on l'ignore. Seule une élite intellectuelle la cultive et le philosophe Nicolas de Cues va en faire le juge de son entreprise métaphysique.

### c – Vers la quadrature du cercle

Le cardinal Nicolas de Cues (1401-1464) n'est pas un sceptique ; il a confiance dans les pouvoirs de l'esprit humain, mais à condition qu'on y distingue la raison et l'intelligence. La raison ne peut saisir l'essence des choses, alors que l'intelligence qui réside en nous, et qui est la marque de Dieu en nous, peut nous la faire voir. Grâce à notre intelligence, nous pouvons même nous approcher d'une vision de Dieu, une vision sans intermédiaire, une véritable intuition mystique. La raison procède laborieusement par abstractions successives, utilise des représentations approuchantes, tente d'établir une adéquation entre ses concepts et ses objets, sans

jamais parvenir à l'exactitude, alors que l'intelligence saisit d'un coup ce qu'elle veut voir par une intuition d'une puissance incomparable.

Parmi les limites de la raison, il en est une, essentielle, qui tient à son principe de fonctionnement : c'est le principe de non-contradiction. Lorsqu'elle se met à enquêter sur des objets métaphysiques comme Dieu ou l'infini, la raison tombe sur des contradictions qui l'empêchent d'aller plus loin ; elle refuse d'outrepasser son principe logique de non-contradiction. Pour qu'il y ait progrès dans la connaissance métaphysique, il faut que la raison accepte une rupture de l'intelligence avec la logique. En Dieu, les contraires sont réunis. Dieu est la synthèse de toutes choses, même des contradictoires : ... *Il est manifeste (...) que Dieu embrasse tout, même les contradictoires (De Docta Ignorantia, L. I, 22)*. Étant avant toutes choses, Dieu est au-dessus de toute affirmation comme de toute négation. L'étude de Dieu échappe aux principes de la logique qui, s'ils sont contraignants pour la raison, ne le sont plus pour l'intelligence, et l'intelligence qui admet la compatibilité des contraires, grâce à la coïncidence des opposés, va nous permettre d'approcher Dieu. Cette coïncidence des opposés est bien autre chose qu'une simple concession ; c'est véritablement un postulat fondamental et en même temps une méthode qui sert à résoudre quantité de problèmes : *j'essaie de voir si par hasard cette difficulté pourrait prendre fin par le moyen des coïncidences, comme dans d'autres sciences. Je prétends qu'elle est d'une puissance maximale (De Mathematicis Complementis, L. I, Opera, 1004)*. Elle n'est pas une simple négation du principe de non-contradiction, mais elle en est le dépassement nécessaire en cas de besoin. C'est grâce à l'union des contraires que l'intelligence va pouvoir comprendre les choses, car ce principe est inscrit dans les choses mêmes.

Pour donner une idée de cette connaissance obtenue par l'intelligence, Nicolas de Cues utilise l'exemple des mathématiques. Il observe que les mathématiques, sciences rigoureuses qu'on ne peut suspecter d'irrationalisme, connaissent elles-mêmes une transmutation de leurs lois lorsqu'elles abordent l'infini. Tant que l'on demeure dans le domaine des figures finies, les mathématiques sont rationnelles et s'appuient sur le principe de non-contradiction, mais dès que l'on infinitise les figures, les mathématiques deviennent intellectuelles et sont amenées à pratiquer la coïncidence des opposés.

Le problème le plus indiqué pour mettre à l'épreuve la coïncidence des opposés sera celui de la quadrature du cercle, puisqu'il s'agit de faire coïncider deux figures opposées, un cercle et un carré : *Ceux en effet qui ont cherché la quadrature du cercle ont présumé la coïncidence du cercle et du carré dans l'égalité, laquelle n'est assurément pas possible au niveau sensible. Car il n'existe pas de carré qui ne soit inégal à n'importe quel cercle engagé dans la matière. Cette égalité, qu'ils ont présumée, ils ne l'ont donc pas vue avec leurs yeux physiques, mais avec leurs yeux mentaux, et s'ils ont essayé de la démontrer par le raisonnement, ils ont cependant échoué, puisque la raison n'admet pas la coïncidence des opposés. C'est intellectuellement qu'ils auraient dû chercher la coïncidence dans ce cercle qui est égal dans chaque polygone (Complément théologique, in N. de Cues, Trois traités sur*

*la docte ignorance et la coïncidence des opposés*, trad. F. Bertin, Paris, Cerf, 1991, p. 100-101).

L'objectif de Nicolas de Cues, dans ses textes mathématiques, consiste tout simplement à réussir la quadrature du cercle en utilisant le principe de la coïncidence des opposés, et à démontrer ainsi la puissance et la fécondité de ce principe. La quadrature du cercle est essentiellement un problème d'égalité. 1. Peut-on trouver un carré de périmètre égal à la circonférence d'un cercle donné ? 2. Peut-on trouver un carré de surface égale à celle d'un cercle donné ? Ces deux questions peuvent s'entendre de façon arithmétique – il s'agit de tomber sur une égalité stricte de deux mesures – ou de façon géométrique – il s'agit de rapporter le droit au courbe –. Peut-on établir des proportions rigoureuses entre des lignes droites et des lignes courbes, permettant de passer des unes aux autres sans difficulté ?

C'est le problème le plus traité au Moyen Âge, jusqu'à en devenir une obsession, car il a une portée religieuse : c'est un exercice spirituel symbolisant le passage du terrestre (le carré) au céleste (le cercle), de l'imparfait au parfait ; on y voit un savoir secret qui donnerait un pouvoir surnaturel. Le centre du cercle, c'est l'Un, l'origine, le principe, Dieu. Du centre rayonne l'énergie de l'esprit divin ; le cercle est donc le monde céleste, l'éternité, la transcendance. Le carré, c'est l'univers créé, la stabilité terrestre, l'équilibre obtenu par la composition des quatre éléments. Associer le carré et le cercle, c'est non seulement associer le visible à l'invisible, mais c'est aussi opérer le passage salvateur du sensible vers la transcendance divine, c'est rejoindre Dieu. Cette symbolique médiévale du cercle et du carré n'est cependant pas figée. Si le cloître des monastères est carré, c'est pour signifier qu'il est une partie réservée sur la surface terrestre, un espace réglé par la proportion qui participe de la perfection céleste. Du point de vue mathématique qui nous intéresse ici, nous pouvons reformuler le problème autour des deux concepts de l'égalité et de l'identité : comment réduire l'altérité du droit et du courbe par une égalité entre leurs rapports ?

Au cours de sa recherche, le Cusain n'hésite pas à recourir à de multiples sources auxquelles il emprunte les concepts qui peuvent l'aider à avancer dans ses conjectures sur la quadrature du cercle. Il prend, il redéfinit, il transforme, il remanie les idées qu'il lit chez les autres. On peut parler d'un bricolage, au sens positif du terme, à savoir que le Cusain sait aller de-ci de-là pour emprunter des concepts et les manier adroitement. Mais, finalement, en dépit des apparences et des conclusions triomphantes, toutes ses recherches mathématiques aboutissent à un échec. Malgré l'ingéniosité dont il fait preuve, il ne parvient pas à la quadrature du cercle, problème dont la résolution, on le sait maintenant, est impossible. Ce n'est ni par ignorance, ni par maladresse qu'il échoue. Le niveau de sa discussion est tout à fait remarquable, alors que les chercheurs de cette époque étaient privés du symbolisme algébrique, de la méthode analytique, du concept de fonction, de définitions précises pour la trigonométrie, autant d'instruments nécessaires pour avancer dans le problème. Mais ce n'est pas « de l'extérieur » qu'il faut comprendre son échec, à savoir à partir des connaissances dont nous disposons aujourd'hui. Il faut le comprendre à partir de ses propres connaissances, « de l'intérieur », et l'on s'aperçoit que ses concepts

métaphysiques l'ont empêché d'admettre l'impossibilité de son entreprise. Les mathématiques sont un juge terrible pour qui s'expose à leur verdict.

Après la redécouverte des écrits d'Archimède, après la révolution astronomique commencée par Copernic, grâce, notamment, à la trigonométrie reçue des arabes, les mathématiques vont connaître une nouvelle expansion considérable. L'algébrisation de la géométrie opérée par Descartes va donner un outil d'une puissance extraordinaire pour la physique. L'homme moderne, fils de la Renaissance, réclame l'autonomie de la pensée. Il se libère du carcan théologique. Que va-t-il faire avec les mathématiques ? Peut-il s'en servir pour faire de la philosophie ?