Défense et illustration de la géométrie de Poncelet(*)

Roger Cuppens(**)

Dans un article récent, G. Hamon [7] expose l'histoire de la représentation géométrique des nombres complexes. Dans cette étude, par ailleurs remarquable, Poncelet est présenté (p. 644-647) comme le dernier opposant à une telle représentation et ceci de manière un peu caricaturale. Dans ce qui suit(1), je voudrais donner un autre point de vue sur cette attitude et rendre ainsi hommage à l'un de nos plus grands géomètres. De plus, en annexe, je voudrais donner un autre éclairage sur le point de vue de Wallis présenté p. 651-652.

1. État de la géométrie avant les travaux de Poncelet

Dans cet état, je ne considère que les parties de la géométrie auxquelles s'est intéressé Poncelet, négligeant en particulier les travaux allant des travaux d'Archimède jusqu'aux rapports entre la géométrie et le calcul différentiel et intégral.

1.1. La géométrie grecque

Tout le monde s'accorde pour prendre comme point de départ les *Éléments* d'Euclide. Dans ceux-ci, Euclide commence par définir des objets appelés *points*, *droites* et *plans* et, pour la géométrie plane, il introduit quatre postulats :
1. *Conduire une droite d'un point quelconque à un autre point quelconque.*
2. *Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.*
3. *D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une « circonférence de cercle »*(2).
4. *Tous les angles droits sont égaux entre eux.*

De ces quatre postulats, par une démarche hypothético-déductive, il déduit un certain nombre de résultats, en particulier le fait que deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles entre elles et, pour démontrer la réciproque (c'est-à-dire l'unicité d'une droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée), il est obligé d'introduire un cinquième postulat…

Tout cela peut sembler très proche de nos conceptions actuelles, mais ce serait oublier que les Grecs avaient remarqué de sérieuses difficultés avec l'infini actuel(3) et qu'en conséquence il ne faut pas considérer la droite comme un ensemble infini de points, mais comme un objet sur lequel on peut mettre autant de points que l'on en a

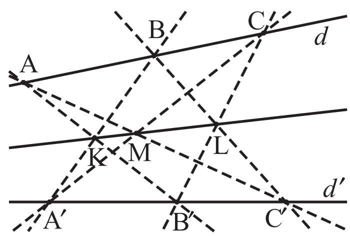
(*) Ce titre m'a été suggéré par Daniel Reisz.
(**) Professeur émérite, IREM de Toulouse.
(1) Ce qui suit ne doit pas être considéré comme un article d'histoire des mathématiques. En particulier, j'emploierai des notations modernes et décrirai les idées d'un auteur sous une forme qu'il n'aurait sans doute pas acceptée.
(2) Dans la suite, nous dirons plus simplement et selon l'usage actuel cercle.
(3) Par exemple les paradoxes de Zénon.

besoin, mais toujours en nombre fini : dans cette optique, si P est un point et d une droite, la notation moderne $P \in d$ signifierait « *le point* P *se trouve sur la droite d* » ou « *la droite d passe par le point* P »[4].

De même, si P est un point et c un cercle, la relation $P \in c$ se lit « *le point* P *se trouve sur le cercle c* » et est équivalente à « *la distance du point* P *au centre du cercle c est égale au rayon du cercle c* »[5].
Une « *figure* » est alors un ensemble fini de points, de droites et de cercles dont la cohérence est assurée par une construction (à la règle et au compas), ce qui signifie que, se donnant une droite et un cercle ou deux cercles, on peut définir (et utiliser) les points se trouvant éventuellement sur ces deux objets.

Parmi les autres travaux, je citerai le traité d'Apollonius sur les coniques introduites soit comme sections planes de cône, soit avec une définition plane propre à chacune des trois coniques.

Une place à part doit être mise à une œuvre perdue d'Euclide, les *Porismes*, dont on a une idée par des commentaires de Pappus (300-350) et qui contenaient, semble-t-il :
– le théorème suivant connu sous le nom de *théorème de Pappus* ([9], Proposition 139 ; [4], p. 37) :
Soient A, B *et* C (*resp.* A′, B′ *et* C′) *trois points sur une droite d* (*resp. d′*). *Les points* K, L *et* M *communs respectivement aux droites* (AB′) *et* (A′B), (BC′) *et* (B′C), (CA′) *et* (C′A) *sont alignés*.



– un résultat équivalent à l'*invariance par projection* de ce que l'on appelle actuellement le *birapport*[6].
De là à y voir les prémisses de la géométrie projective, il y a un pas que je ne franchirai pas.

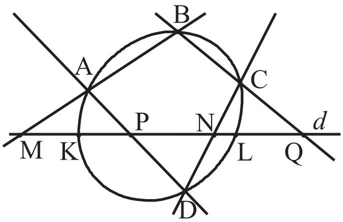
1.2. Le 17e siècle

Je ne parlerai pas des mathématiques arabes et de la Renaissance car elles ne concernent pas directement notre propos pour en arriver au 17e siècle où se produit une double révolution :
– la révolution cartésienne que tout le monde connaît et sur lequel je ne m'appesantirai pas : l'introduction de coordonnées par Descartes (1596-1650) eut une influence profonde qui dure encore…
– la révolution arguésienne au moins aussi importante, mais qui n'eut que peu de suite dans l'immédiat.

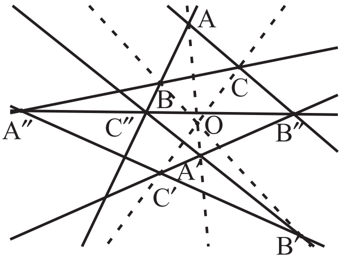
(4) On verra que cette double formulation est essentielle.
(5) Plus généralement, on peut introduire la notion de lieu géométrique d'une propriété : un point P se trouve sur le lieu géométrique si et seulement si le point P vérifie la propriété. Pour les cercles, cette propriété est l'équidistance au centre du cercle.
(6) Pour une définition du *birapport* (connu longtemps sous le nom de *rapport anharmonique*) de quatre points alignés, cf. [4], p. 28.

Architecte lyonnais, Girard Desargues (1591-1661) fut le premier à oser dire, en s'appuyant sur des considérations de perspective, que *deux droites parallèles ont un point commun à l'infini et que tous les points à l'infini d'un plan se trouvent sur une droite, la droite de l'infini du plan*.
Il s'agit là de l'acte de naissance de la géométrie projective.

L'œuvre mathématique de Desargues consiste essentiellement en un petit opuscule intitulé *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cone avec un plan* où il développe la théorie projective des coniques à partir du résultat suivant :
Si A, B, C *et* D *sont quatre points sur une conique et si une droite coupe cette conique en* K *et* L *et les droites* (AB), (CD), (AD) *et* (BC) *respectivement en* M, N, P *et* Q, *alors les couples de points* (K,L), (M,N) *et* (P,Q) *sont en involution*(7).

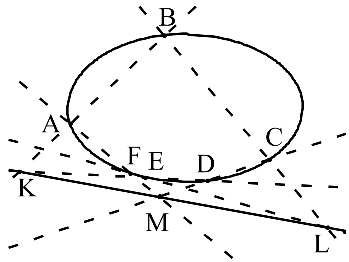


Mais cet ouvrage révolutionnaire(8) a suscité à sa sortie de sévères critiques(9) et il n'est plus disponible au début du 19e siècle, l'œuvre de Desargues n'étant alors connue que par ces critiques et par l'œuvre d'un de ses disciples, le graveur Bosse(10), qui donne en particulier, dans *Manière universelle de Mr Desargues pour pratiquer la perspective*, le résultat suivant connu sous le nom de *théorème de Desargues* :
Soient ABC et A′B′C′ deux triangles. Notons A″ (resp. B″, resp. C″) le point d'intersection des droites (BC) et (B′C′) (resp. (CA) et (C′A′), resp. (AB) et (A′B′)). Les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes si et seulement si les points A″, B″ et C″ sont alignés.



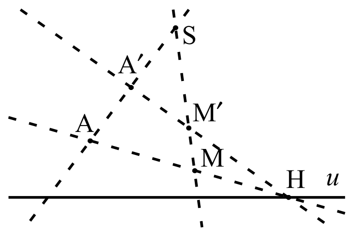
(7) Actuellement, on définirait trois couples de points d'une droite en involution par l'existence d'une involution (c'est-à-dire d'une application bijective conservant le birapport et confondue avec son inverse) qui transforme l'un des points de chaque couple en l'autre. Une telle notion était évidemment totalement étrangère à Desargues : il définissait trois couples en involution par l'existence de relations entre les distances des six points qui est équivalente (à condition d'introduire des mesures algébriques) à notre définition actuelle.
(8) Mais difficile à lire car la terminologie introduite par Desargues lui est personnelle : seul le mot « involution » continue à être utilisé de nos jours. Elle fut pourtant appréciée par Descartes, Fermat et Cavalcanti.
(9) Les plus virulentes sont dues à un mathématicien un peu oublié, Beaugrand, qui ne comprend pas l'originalité de Desargues (ni celle de Descartes d'ailleurs) et montre (de manière très pénible) que ses résultats peuvent être obtenus à partir des résultats d'Apollonius.
(10) C'est un des mérites de Poncelet et de Chasles d'avoir compris toute l'importance de Desargues à partir de ces documents de deuxième main. Lors du 19e siècle, Chasles retrouva une copie manuscrite du Brouillon project due à La Hire que publia Poudra et ce n'est qu'en 1950 que Pierre Moissy retrouva dans un carton de la Bibliothèque Nationale un exemplaire de l'édition originale de cette œuvre.

Deux autres mathématiciens français épousèrent les idées de Desargues. Le premier est Blaise Pascal qui écrit un Traité sur les coniques dont il ne reste que la Table des matières recopiée par Leibniz et quelques pages contenant le « *théorème de l'hexagramme mystique* »(11) :



Soient A, B, C, D, E *et* F *six points et* K (*resp*. L, *resp*. M) *les points d'intersection des droites* (AB) *et* (DE) (*resp*. (BC) *et* (EF), *resp*. (CD) *et* (FA)). *Les six points* A, B, C, D, E *et* F *sont sur une conique si et seulement si les points* K, L *et* M *sont alignés*.
Pascal démontre ce théorème dans le cas particulier où la conique est un cercle, puis passe au cas général par projection. On peut penser que tout le traité de Pascal reposait sur ce résultat qui fournit une construction effective (comme lieu géométrique) de la conique passant par cinq points.

Le deuxième est Philippe de La Hire (1640-1718) qui utilise une transformation appelée *homologie* (cf. [4], p. 80) conservant l'alignement des points et ayant un point fixe S et une droite de points fixes ne passant pas par S (une telle transformation peut être obtenue en considérant une projection conique d'un plan p sur un plan p' suivie du rabattement du plan p sur le plan p' en prenant comme charnière l'intersection de ces deux plans).



Avec cette transformation, La Hire développe une théorie des « planiconiques » où il utilise de manière intensive le birapport de quatre points alignés. Mais cet important travail reste incompris de ses contemporains et La Hire publie ensuite un traité des coniques « à la Apollonius ». Cette attitude provoquera l'ire de Poncelet qui, à plusieurs reprises, le traitera de pâle imitateur de Desargues(12).

La révolution arguésienne a donc fait long feu… Tout juste peut-on se demander si Newton connaissait les travaux de Desargues quand il a affirmé (sans en donner la démonstration) que toutes les cubiques étaient la projection de cinq cubiques et donné une classification (d'ailleurs incomplète) des cubiques.
Il a aussi posé le problème de la construction de la cubique passant par neuf points, question toujours ouverte au début du 19e siècle.
C'est Maclaurin qui fournira un premier traité des cubiques dont Poncelet estimera qu'il contient beaucoup trop de calculs.

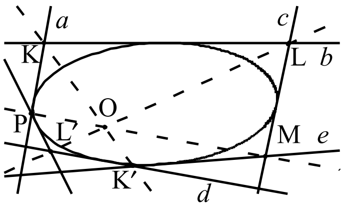
(11) Le théorème de Pappus cité ci-dessus peut être considéré comme le cas particulier du théorème de Pascal lorsque la conique est dégénérée.
(12) Peut-être le considère-t-il comme un renégat qui, ayant connu la « vérité », est retombé dans les erreurs du vulgaire…

Au 18e siècle, à côté de travaux en géométrie pure non négligeables (droite et cercle d'Euler, droite de Simson, …), c'est la géométrie analytique de Descartes qui semble triompher. Citons par exemple le théorème de Bézout (1779) :
Le degré du résultant d'un nombre quelconque d'équations algébriques à plusieurs variables est égal au produit des degrés des équations.
qui donne, appliqué aux courbes algébriques :

Si deux courbes algébriques n'ont pas de composante commune, le nombre de leurs points d'intersection (réels ou imaginaires, distincts ou confondus) est égal au produit des degrés de ces courbes.

1.3. L'école de Monge

Gaspard Monge (1746-1818), après avoir été professeur à l'École Royale du Génie de Mézières, participe en 1794 à la création de l'École Centrale des Travaux Publics qui deviendra l'École Polytechnique. Là il y enseigne la géométrie et en particulier la *géométrie descriptive* qu'il a créée. Cet enseignement a un retentissement considérable et de nombreux élèves suivent les pas du maître.
Parmi ceux-ci, outre Poncelet, je citerai Charles-Joseph Brianchon (1783-1864) qui a publié en 1806, alors qu'il était encore à l'École Polytechnique, un mémoire intitulé « *Sur les surfaces courbes du second degré* » dans lequel il démontre (à partir du théorème de Pascal en utilisant ce qui deviendra la théorie des polaires réciproques) le théorème qui porte son nom (cf. [4], p. 100) :
Si tous les côtés d'un hexagone sont tangents à une conique, les diagonales de cet hexagone sont concourantes.



1.4. Les autres mathématiques

Au début du 19e siècle, seules sont considérées comme « vraies » l'arithmétique (théorie des nombres entiers ou fractionnaires) et la géométrie euclidienne. Pour cette dernière, seul Gauss a des doutes qu'il se refuse de publier et la création des géométries non euclidiennes ne viendra que plus tard ébranler l'édifice euclidien.
Le reste des mathématiques repose sur des bases peu solides : les infiniment petits sont considérés comme contradictoires(13) et les travaux de Cauchy prenant comme base la notion de limite comportent une sérieuse lacune : ils reposent sur le résultat que les suites « de Cauchy » convergent dont la démonstration n'est qu'un magnifique cercle vicieux. Ce n'est que dans la deuxième moitié du 19e siècle que les diverses constructions des nombres réels dues à Weierstrass, Cantor et Méray fourniront des fondements solides à l'analyse (et donc à la géométrie analytique). Dans ces conditions, les nombres complexes ne peuvent apparaître que comme des artifices de calcul commodes.

(13) Ce n'est que dans la deuxième moitié du 20e siècle que les travaux de Robinson ont montré que leur introduction est possible, ce qui a donné naissance à l'analyse non standard.

2. Poncelet

2.1. Sa vie

Jean-Victor Poncelet (1788-1867) fut élève de Monge à l'École Polytechnique, d'où il sort ingénieur militaire. Blessé et fait prisonnier lors de la retraite de Russie, il passe son temps de captivité à faire des mathématiques. À son retour en France, il présente plusieurs mémoires à l'Académie des Sciences, mais Cauchy, rapporteur, lui reproche son manque de rigueur. Il rédige alors son œuvre fondamentale, le *Traité des propriétés projectives des figures* qui paraît en 1822 et est rapidement épuisé. Une seconde édition ne paraîtra qu'en 1865. Entre temps, Poncelet enseigne (sur ordre de sa hiérarchie militaire) la mécanique appliquée à l'École d'Application de Metz. Il s'occupe alors de machines hydrauliques, ses travaux lui valant un prix de l'Académie des Sciences. À la suite de la Révolution de 1848, il dirige un temps l'École Polytechnique, mais est rapidement renvoyé à l'École de Metz (il finira général de brigade). C'est donc un homme aigri et sourcilleux sur ses conceptions et ses résultats qui publie la seconde édition du traité(14).

2.2. Son but

Le développement de la géométrie descriptive par Monge amène des problèmes (intersection de deux surfaces, par exemple) dont la résolution analytique mènerait à des calculs démesurés. Poncelet se propose donc d'étudier « à la Euclide » les propriétés des figures invariantes par projection. Il adopte donc le point de vue cosntructiviste et finitiste d'Euclide, ses axiomes et ses méthodes. Néanmoins il va être obligé d'introduire d'autres principes et méthodes pour arriver à son but.

2.3. Les projections

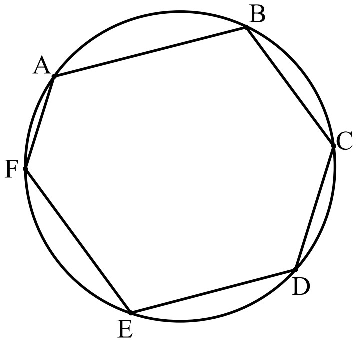
Poncelet distingue deux sortes de propriétés invariantes par projection :
– les propriétés que l'on qualifierait actuellement « d'incidence » : alignement de points, concourance de droites, degré des courbes, … La conservation par projection de telles propriétés mène tout naturellement aux idées de Desargues : deux droites parallèles ont un point commun à l'infini et les points à l'infini d'un plan se trouvent sur une droite, la droite de l'infini du plan.
– les propriétés qui font intervenir des distances et dont certaines sont invariantes par projection. L'exemple le plus simple est la *conjugaison harmonique*(15) : si P est un point situé sur une droite (AB), le conjugué harmonique Q du point P par rapport aux points A et B est le point défini par(16) :

$$\frac{QA}{QB} = \frac{PA}{PB}.$$

(14) Une bonne partie du deuxième tome (nouveau) de l'édition de 1865 est consacrée à des querelles de priorité.
(15) Curieusement, le birapport qui s'est avéré ultérieurement comme la notion principale de la géométrie projective (et dont Poncelet signale en note l'usage par Brianchon) ne semble pas avoir retenu son attention.
(16) En toute rigueur, il faudrait introduire des mesures algébriques, notion totalement ignorée de Poncelet.

En particulier, lorsque P est le point à l'infini de la droite (AB), le point Q est le milieu de A et B.

L'originalité, me semble-t-il, de Poncelet dans ce domaine consiste en une recherche quasi systématique du cas particulier le plus simple d'une figure pour démontrer une propriété projective de cette figure. Par exemple, une figure contenant une droite *d* et une conique *c* peut être considérée comme le résultat d'une projection telle que la conique *c* soit le projeté d'un cercle (ce qui n'a rien d'original) et la droite *d* soit le projeté d'une droite à l'infini. Ceci ramène la démonstration du théorème de l'hexagramme de Pascal à celle (beaucoup plus simple) du résultat suivant :
Soient A, B, C, D, E *et* F *six points sur un cercle. Si* (AB) *et* (DE) *sont parallèles de même que* (BC) *et* (EF), *alors* (CD) *et* (FA) *sont parallèles*.

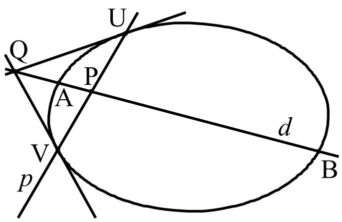


De même, Poncelet montre que, pour obtenir le théorème d'involution de Desargues énoncé ci-dessus, il suffit de le faire dans le cas particulier où ABCD est un rectangle inscrit dans un cercle.

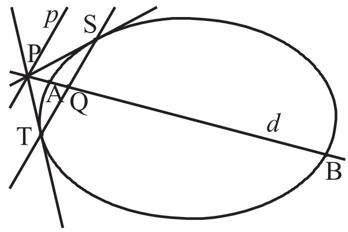
2.4. Le principe de continuité

Poncelet ne peut ignorer que l'introduction des nombres complexes en géométrie analytique permet de simplifier les calculs et d'obtenir des résultats (par exemple, le théorème de Bézout) en toute généralité.
Pour obtenir l'équivalent, il introduit un *principe de continuité* que l'on peut énoncer sous la forme suivante : *si en modifiant continûment une figure, des objets viennent à disparaître, ceux-ci continuent à exister comme objets imaginaires, certains objets dépendant de ces objets imaginaires pouvant continuer à exister réellement*.

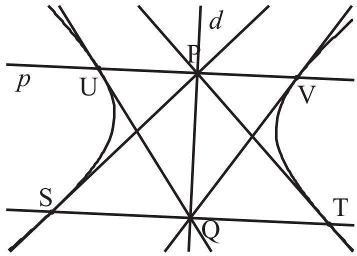
Par exemple, soient *c* une conique, *p* une droite et P le point d'intersection de la droite *p* avec le diamètre *d* conjugué de la droite *p* pour la conique *c*.
1. Si le diamètre *d* coupe la conique *c* en deux points A et B, notons Q le conjugué harmonique du point P par rapport à A et B.
a) Si la droite *p* coupe la conique *c* en deux points U et V, on sait que P est le milieu des points U et V et que les droites (QU) et (QV) sont les tangentes issues du point Q à la conique.
b) Si la droite *p* est tangente à la conique *c*, les points P, U et V sont confondus avec l'un des points A ou B et le point Q est aussi confondu avec le point P, ce qui est conforme au principe de continuité.



c) Si la droite *p* ne coupe pas la conique *c*, le point P est extérieur à la conique *c* et on peut tracer les tangentes *s* et *t* à la conique *c* passant par le point P ; si S et T sont



les points de contact de ces tangentes, on sait que le point Q est le milieu des points S et T. On obtient donc une situation semblable au cas a) et le principe de continuité nous mène à introduire des points imaginaires U et V comme points d'intersection de la droite *p* et de la conique *c* et à dire que les droites (QU) et (QV) sont les tangentes (imaginaires) à la conique *c* issues du point Q.



2. Si le diamètre *d* ne coupe pas la conique *c*, alors la droite *p* coupe la conique en deux points U et V (dont P est le milieu). Les tangentes *u* et *v* aux points U et V se coupent en un point Q situé sur la droite *p* et Q est le milieu des points de contact S et T des tangentes *s* et *t* à la conique *c* issues du point P. On obtient de nouveau une situation semblable aux cas précédents et le principe de continuité nous permet d'introduire deux points imaginaires A et B comme points d'intersection de la droite *d* et de la conique *c* et de dire que les points P et Q sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et B.

Si on dit que le point P est le pôle de la droite *p*, ceci revient à la définition suivante : le pôle P d'une droite *p* est le conjugué harmonique du milieu Q des points d'intersection (réels ou imaginaires) de la droite *p* et de la conique *c* par rapport aux points d'intersection (réels ou imaginaires) de la conique *c* avec le diamètre conjugué de la droite *p*.

On voit que le principe de continuité peut sembler vague et difficile à appliquer. C'est d'ailleurs ce qu'écrit Cauchy dans un rapport sur un mémoire présenté par Poncelet à l'Académie des Sciences ([10], Tome II, p. 356) : « *nous avons reconnu que ce principe n'était, à proprement parler qu'une forte induction qui ne pouvait être indistinctement appliquée à toutes sortes de questions de Géométrie, ni même d'Analyse. Les raisons données pour fonder notre opinion ne sont pas détruites par les considérations que l'auteur a développées dans son Traité des Propriétés projectives* ».

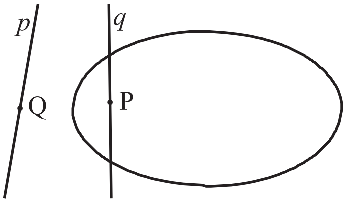
Il ajoute néanmoins que le Mémoire présenté « *fournit de nouvelles preuves de la sagacité de son auteur, dans la recherche des propriétés des figures, et qu'il mérite, sous ce rapport, l'approbation de l'Académie* ».

Poncelet répondra aux objections de Cauchy dans [11] où il fournit les exemples géométriques et les calculs analytiques justifiant ce principe. On verra ci-dessous que Chasles fournit une meilleure introduction des imaginaires en géométrie.

2.4. La transformation par polaires réciproques

Soit *c* une conique. Nous avons vu comment Poncelet associe à toute droite *p* du plan un point P appelé pôle de la droite *p*. Réciproquement, tout point P du plan est le pôle

d'une droite p (en termes modernes, la correspondance est bijective) et on dit que la droite p est la polaire du points P.
Les considérations du paragraphe précédent permettent d'affirmer la loi de réciprocité polaire : un point Q se trouve sur une droite p si et seulement si le pôle de la droite p se trouve sur la polaire du point Q.



On peut alors montrer que, si un point P parcourt une courbe algébrique c, alors la polaire du point P enveloppe une courbe algébrique c'. De plus, si p est la tangente au point P à la courbe c, le pôle de la droite p se trouve sur la courbe c'. En termes modernes, on dit que la courbe c' est la courbe duale de la courbe c.

Or, pour une courbe algébrique c, on peut introduire deux notions projectives :
– le degré de la courbe qui est le nombre de points d'intersection de la courbe avec une droite quelconque ;
– l'ordre de la courbe qui est le nombre de tangentes à la courbe issues d'un point quelconque.
Des considérations précédentes, Poncelet déduit immédiatement que le degré de la courbe duale d'une courbe c est égal à l'ordre de la courbe c.

Or on a le résultat :
L'ordre d'une courbe algébrique de degré n est inférieur ou égal à $n\,(n-1)$.
D'où Poncelet déduit que, si c est une courbe algébrique de degré n, le degré de la courbe duale de c est inférieur ou égal à $n\,(n-1)$(18).
Rapportant sur ce raisonnement, Cauchy écrit : « *Mais, pour mettre cette conclusion hors de doute, il nous paraîtrait nécessaire de substituer à la démonstration géométrique de M. Poncelet une démonstration analytique* » ([10], Tome II, p. 361).
On voit à quel point d'aberration peut amener le « tout analytique » et comprendre l'animosité de Poncelet envers Cauchy(19) !

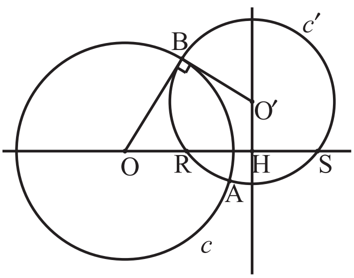
2.5. Quelques résultats obtenus

Il serait fastidieux et hors de propos de détailler le contenu du Traité des propriétés projectives. Je me contenterai de signaler que Poncelet y donne de nouvelles démonstrations de bon nombre de théorèmes fondamentaux (théorèmes de Desargues, théorème de Pascal, de Brianchon, …) et d'indiquer trois résultats qui, à eux seuls, suffiraient à assurer sa renommée.

Les deux premiers concernent l'intersection de deux coniques pour laquelle Poncelet introduit la notion de sécante commune, c'est-à-dire de droite passant par deux points communs (réels ou imaginaires) aux deux coniques.

(18) Poncelet donne une étude montrant l'influence de l'existence de points singuliers de la courbe c pour les cas où l'inégalité est stricte
(19) D'autant que l'on sait depuis Apollonius introduire les pôles et polaires sans faire appel au principe de continuité, celui-ci ne servant ici qu'à donner une définition simple du degré et de l'ordre.

Dans le cas des cercles, il y a toujours une sécante réelle, l'axe radical des deux cercles. Cet axe radical permet d'introduire la notion de faisceau de cercles comme l'ensemble des cercles ayant deux à deux même axe radical. Mais l'introduction des points imaginaires lui permet de définir un faisceau de cercles comme l'ensemble des cercles passant par deux points à distance finie (réels ou imaginaires, distincts ou confondus). Lorsque les deux points sont imaginaires, Poncelet montre que le faisceau contient deux cercles de rayon nul dont les centres sont ce que l'on appelle actuellement les *points de Poncelet* du faisceau. De plus, il montre qu'un cercle d'un tel faisceau est toujours orthogonal à un cercle passant par les deux points de Poncelet, ce qui fournit la notion de faisceaux de cercles orthogonaux.



Il montre aussi que deux coniques homothétiques ont pour sécante commune la droite de l'infini. Appliqué au cas des cercles, ceci donne l'existence des *points cycliques* : il existe sur la droite de l'infini deux points imaginaires par lesquels passent tous les cercles du plan.

Enfin signalons le résultat suivant connu souvent comme le théorème de Steiner alors qu'il a été obtenu en premier par Poncelet ([10], Tome I, p. 130 ; [5], p.216) :
Théorème de Poncelet-Steiner. *Étant donnés un cercle et le centre de ce cercle, on peut construire à la règle tous les objets constructibles à la règle et au compas*.

2.6. Poncelet et les imaginaires

On comprend sans doute un peu mieux la position de Poncelet sur les nombres complexes : ce sont des auxiliaires utiles, mais difficiles à interpréter quand on fait de la géométrie analytique. Ses imaginaires à lui sont des points dont les deux coordonnées peuvent être imaginaires et des droites passant par ces points imaginaires. Il sait aussi que l'on peut introduire des cercles imaginaires(20), voire des coniques imaginaires. C'est donc emporté par son élan de généralisation qu'il parle de spirale imaginaire dont il n'a pas besoin et qui, en réalité, n'existe pas dans son monde(21).
Quant à la phrase de Hamon « *comme les droites imaginaires, sa spirale n'existe que dans l'imagination* », elle est particulièrement mal venue : en effet, rappelons que, en géométrie, la figure n'existe que dans un monde « imaginaire », les dessins en fournissant une représentation utile et les constructions en assurant la cohérence.

(20) Entre les deux éditions du Traité, ceci a été fait par Chasles (cf. ci-dessous).
(21) On peut d'ailleurs se poser le problème de l'existence pour Poncelet de ses objets imaginaires.

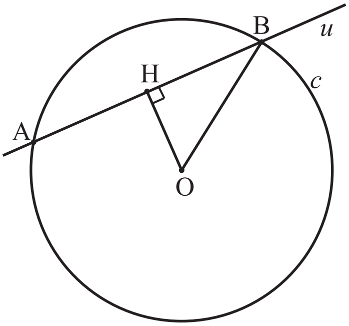
3. Après le Traité

Nous n'indiquerons que quelques éléments concernant directement cette étude.

3.1. Chasles

Michel Chasles (1793-1880) fut élève de l'École Polytechnique où il commença sa carrière d'enseignant. Il milita ensuite pour la création d'une chaire de Géométrie Supérieure en Sorbonne qu'il occupa lors de sa création. Pour son enseignement, il rédigea deux traités : un *Traité de Géométrie Supérieure* et un *Traité des sections coniques*.

Dans le premier de ces traités, il introduit des points, des droites et même des cercles imaginaires. Mais au lieu d'invoquer un vague principe de continuité, il remarque que, dans des constructions à la règle et au compas, les points imaginaires s'introduisent pour étudier l'intersection d'un cercle avec une droite ou un autre cercle.



Partons donc d'un cercle c de centre O et de rayon r et d'une droite u.
• Si ces objets sont sécants, le projeté H du centre O sur la droite u est le milieu des points d'intersection A et B et l'on a les relations :

$$\mathrm{HA}^2 = \mathrm{HB}^2 = -\overline{\mathrm{HA}}\cdot\overline{\mathrm{HB}} = r^2 - d^2, \qquad (1)$$

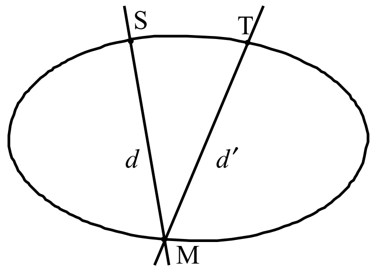
d étant la distance du point O à la droite u.
• Si ces objets sont tangents, les conditions précédentes définissent deux points A et B confondus avec H : un point de tangence est bien un point double.
• Par contre, si la droite u est extérieure au cercle c, la quantité $r^2 - d^2$ est strictement négative et l'on peut définir des points d'intersection imaginaires A et B comme ayant le projeté H du centre O comme milieu et vérifiant les relations (1)(22).
Chasles affirme alors que toute démonstration ne comprenant que des relations du type (1) (ou celles que l'on peut en déduire) reste valable pour une telle figure. Par exemple, si Q est le conjugué harmonique d'un point P par rapport à deux points réels A et B, on a la relation :

$$\overline{\mathrm{HP}}\cdot\overline{\mathrm{HQ}} = \mathrm{HA}^2 = \mathrm{HB}^2 \qquad (2)$$

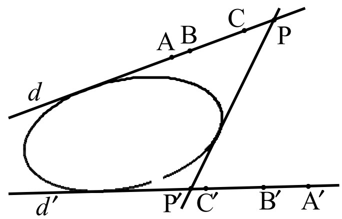
où H est le milieu de A et B. Chasles dit alors que la relation (2) permet de définir le conjugué harmonique Q du point P par rapport à deux points imaginaires A et B vérifiant (1).
Chasles ramène ensuite l'intersection de deux cercles à l'intersection de l'un des cercles avec leur axe radical. Ainsi les points imaginaires introduits lors des constructions à la règle et au compas sont parfaitement définis.

(22) Il s'agit du même procédé que celui consistant à dire qu'une équation du second degré $x^2 - sx + p = 0$ a deux racines complexes dont la somme est s et le produit p.

Dans le Traité de Géométrie Supérieure, il étudie alors systématiquement la notion de birapport et montre comment l'invariance du birapport par projections permet de définir le birapport de quatre courbes algébriques appartenant à un même faisceau. Puis il étudie de manière exhaustive les tranformations qui conservent le birapport : homographies et involutions.



Dans le Traité des sections coniques, il reconstruit la théorie des coniques à partir du résultat suivant connu sous le nom de *théorème de Chasles* :
Soient S, T *et* M *trois points d'une conique. L'application qui à la droite* (SM) *associe la droite* (TM) *est une homographie du faisceau des droites de sommet* S *dans le faisceau des droites de sommet* T.
et de sa réciproque :
Si h est une homographie d'un faisceau de droites $\mathcal{S}$ dans un faisceau de droites $\mathcal{T}$, le lieu du point d'intersection d'une droite d du faisceau $\mathcal{S}$ avec la droite h(*d*) *est une conique*.



Remarque. Le dual de cette réciproque est :
Si h est une homographie d'une droite s dans une droite t, l'enveloppe de la droite joignant un point M *de la droite s au point* M′ = *h*(M) *est une conique*.
De plus si l'homographie transforme le point à l'infini de la droite en le point à l'infini de la droite , la conique est tangente à la droite de l'infini, donc une parabole. L'importance de ce résultat pour les logiciels de géométrie dynamique est considérable : en effet, puisqu'une application algébrique bijective est une homographie, il sera utilisable dès qu'à partir d'un point M sur une droite *s* on sait construire (à la règle et au compas ou même en admettant des coniques) un point M′ sur une droite *t* tel que la correspondance entre M et M′ soit bijective.

La réciproque du théorème de Chasles peut être étendue à d'autres courbes algébriques :
Si h est une homographie d'un faisceau $\mathcal{S}$ de courbes de degré m dans un faisceau $\mathcal{T}$ de courbes de degré n le lieu des points d'intersection d'une courbe c du faisceau $\mathcal{S}$ avec la courbe h(*c*) *est une courbe de degré m* + *n*.

Avec ce résultat, dans une série de notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Chasles fournit plusieurs solutions au problème posé par Newton de construire (à la règle et au compas) le point courant de la cubique passant par neuf points donnés. Ce travail fut poursuivi par un officier de marine, Ernest de Jonquières, qui résolut le même problème pour la quartique passant par 14 points (cf. [4], Tome II).

3.2. Gergonne et la dualité

Joseph Gergonne (1771-1859), enseignant à Montpellier, édita, à partir de 1810 et jusqu'à sa nomination comme Recteur de l'Académie de Montpellier, les *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, premier journal au monde consacré entièrement aux mathématiques(23). Dans celui-ci, on trouve de nombreux articles consacrés à la nouvelle géométrie. Dans l'un d'eux, Gergonne proposa de remplacer la méthode de transformation par polaires réciproques par un principe de dualité consistant à « doubler » les théorèmes de géométrie projective en remplaçant systématiquement « point » par « droite », etc., ce qui donnait le « dual » du théorème de départ. Ce point de vue, adopté par plusieurs auteurs dont Steiner, fut vivement critiqué par Poncelet qui défendait bec et ongles la méthode des polaires réciproques, l'un des arguments étant que c'était la seule transformation fournissant une telle possibilité.

Cet argument fut infirmé par Chasles qui, dans son Traité de Géométrie Supérieure, montra que pour trois points A, B et C non alignés et trois droites a, b et c, il existe une transformation unique de l'ensemble des points du plan dans l'ensemble des droites du plan qui conserve le birapport et transforme A en a, B en b et C en c (cf. [4], p. 84).

Mais ce n'est qu'en examinant les axiomes de la géométrie projective que l'on peut pleinement justifier le principe de dualité de Gergonne : en échangeant dans chaque axiome les mots « points » et « droites », on obtient un axiome ou un théorème.

3.3. Remarque

L'œuvre de Chasles et la dualité de Gergonne constituent des exemples de l'apport de l'école française en géométrie pure. Il faudrait aussi analyser l'apport de Steiner, le « Poncelet allemand », mais ma connaissance de la langue de Goethe ne me permet pas de le faire. Signalons qu'une bonne part du développement passe par l'Allemagne (von Staudt qui crée réellement la géométrie projective en définissant le birapport sans référence à une notion de mesure, Plücker qui développe un calcul pour la géométrie des courbes algébriques, Möbius qui introduit les barycentres) ou l'Angleterre (où Cayley et Hamilton introduisent l'algèbre linéaire en géométrie). Toutes ces idées mèneront au Programme d'Erlangen de Félix Klein. De là, à voir dans la volonté de Poncelet de séparer les propriétés projectives ou dans les travaux de Chasles sur les transformations comme des prémisses de l'œuvre de Klein, il y a un pas qu'il me semble difficile de franchir.

4. L'actualité de Poncelet

L'œuvre de Poncelet semble bien oubliée aujourd'hui. Par exemple, Houzel, dans l'introduction de son livre [8] écrit : « *Le 19e siècle a vu les recherches sur les courbes algébriques se conjuguer avec les méthodes de la géométrie projective naissante : c'est l'œuvre de géomètres comme Steiner, Plücker, Hesse et Salmon dans la première moitié du siècle* » sans citer ni Poncelet, ni Chasles. Il semble pourtant

(23) D'après [12], p. 282. Mais J.-P. Friedelmeyer m'a signalé les onze cahiers du « Archiv der reinen und angewandte mathematik », publiés en Allemagne par Hindenburg de 1794 à 1800.

difficile de donner du sens aux grandes théories abstraites en ignorant leurs points de départ et Poncelet en est un.

Mais c'est surtout au niveau de l'enseignement qu'il ne faudrait pas oublier de telles œuvres. En effet, si comme le souhaite H. Bareil [1] dans la revue de l'une de mes brochures, il y avait un renouveau de l'enseignement de la géométrie utilisant les logiciels de géométrie dynamique, il me semble essentiel que le point de départ adopte le point de vue d'Euclide (et de Poncelet) : un logiciel ne manipulant qu'un nombre fini d'objets, seule la conception que les droites sont des objets sur lesquels on peut mettre des points (en nombre aussi grand que l'on veut, mais fini) permet de faire le lien entre le monde mathématique et celui du logiciel.
Cette conception permet d'ailleurs d'éviter de nombreux problèmes concernant le sens des objets manipulés. En effet, lors de l'introduction de l'ensemble des nombres réels, on fait souvent appel à ce qui se passe sur une droite (plus précisément sur un axe). Mais, si on veut introduire trop rapidement une droite comme liée à l'ensemble des nombres réels(24), on aboutit ainsi à un magnifique cercle vicieux. Il vaut sans doute mieux familiariser les élèves aux idées et problèmes de la géométrie euclidienne et introduire progressivement les difficultés liées à l'introduction d'ensembles infinis. On peut d'ailleurs se demander combien d'étudiants ont à la fin des études universitaires une idée saine de l'ensemble des nombres réels et, en particulier, combien d'entre eux ont entendu parler de l'axiome du choix sans lequel on ne peut pas « comprendre », entre autres, ce qu'est une suite **quelconque** de nombres réels alors que les exemples fournis sont des suites **calculables**. Dans ce cas on ne sort pas du dénombrable… Cette sortie est-elle d'ailleurs nécessaire et à quel moment ?

Je remercie Jean-Pierre Friedelmeyer pour ses remarques qui m'ont permis d'améliorer mon manuscrit.

Références

[1] BAREIL, H. *Une nouvelle brochure*. Bulletin de l'APMEP n° 450 (janvier 2004), p. 145-146.
[2] CHASLES, M. *Traité de géométrie supérieure*. Gauthier-Villars, Paris. 1852. réédité par l'IREM de Lille.
[3] CHASLES, M. *Traité des sections coniques*. Gauthier-Villars, Paris. 1865. réédité par l'IREM de Lille.
[4] CUPPENS, R. *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri-Géomètre II*. Deuxième édition. Brochures APMEP nos 124 & 125.
[5] CUPPENS, R. *Avec Cabri-Géomètre II, jouez … et faites de la géométrie !* Brochures de l'APMEP nos 136 & 137.
[6] DESARGUES, G. *L'œuvre mathématique*. Deuxième édition. Librairie Philosophique J. Vrin, 1988.
[7] HAMON, G. *De la torture mentale aux images fractales*. Bulletin de l'A.P.M.E.P n° 448 (octobre 2003), p. 627-663.

(24) Ceux qui ont vécu la réforme des maths modernes se souviennent de la définition des droites en quatrième.

[8] HOUZEL, C. *La géométrie algébrique*. Recherches historiques. Librairie Blanchard, Paris, 2002.
[9] PAPPUS d'ALEXANDRIE. *La collection mathématique*. Librairie Blanchard, Paris, 1982.
[10] PONCELET, J.-V. *Traité des propriétés projectives des figures*.
[11] PONCELET, J.-V. *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures*. Gauthier-Villars, Paris, 1864.
[12] *Concise dictionary of scientific biography*. Charles Scribner's sons, New York, 1981.

Annexe
Remarque sur la position de Wallis ((7), p.651)

G. Hamon indique que Wallis distingue deux cas de construction d'une moyenne proportionnelle : celui de la « tangente » et celui du « sinus » résumés dans les figures ci-dessous :
Dans ces deux cas, on a

$$BP^2 = BA \times BC.$$

Comme explication du deuxième, il invoque des triangles « de même forme » (de mon temps, on disait semblables, ce qui permettait de parler de cas de similitude des triangles) et il ne semble pas capable d'expliquer le premier cas. Pourtant la notion de puissance du point P par rapport au cercle fournit une explication commune aux deux cas. Puisque cette puissance est positive dans le premier cas et négative dans le deuxième, on a peut-être l'explication du raisonnement de Wallis. De là à ce que cela serve à quelque chose…