

Quels problèmes pour le grand public ?

Élisabeth Busser

C'est mon expérience de « chroniqueur mathématique » dans diverses publications à grande diffusion que je souhaiterais vous faire partager, évoquant tout d'abord qui se cache derrière le « **grand public** » d'une rubrique à thème largement mathématique, analysant ensuite **jusqu'où aller** dans les termes mathématiques comme dans les concepts, sans choquer ni décourager.

Je me réserverai pour la fin le droit d'ouvrir quelques pistes, pour prouver que **dépasser les limites** peut parfois être payant : on peut de temps en temps aller un peu plus loin et faire accepter au lecteur quelques avancées dans la recherche ou le raisonnement. On l'amènera ainsi à dégager des résultats qu'il sera peut-être le premier surpris de pouvoir trouver !

Vous trouverez, dans ces exemples, vos thèmes mathématiques favoris et pourrez tout à loisir les transformer en activités pour vos élèves.

Voilà plus de 7 ans que Gilles Cohen et moi tenons une rubrique mensuelle de mathématiques dans « la Recherche », et exactement 352 semaines que nous fournissons au journal « le Monde » la chronique « Affaire de logique » tous les mardis, à côté des « Mots croisés ». La collaboration entre « La Recherche » et le magazine « Tangente », dont la création remonte à 1987, a abouti à la sortie en été 2000 d'un numéro « hors série » entièrement consacré aux jeux mathématiques, auquel l'équipe de « Tangente », dont je fais partie, a largement contribué. Tout ceci, ajouté à quelques contributions épisodiques à diverses autres revues scientifiques comme « Les Cahiers de Science et Vie » ou « Thesaurus » m'a forgé une certaine habitude des mathématiques pour le grand public.

Qu'est-ce que le « grand public » ?

« La Recherche » est vendue en kiosque, et compte plusieurs milliers d'abonnés, « Tangente » aussi, « Le Monde » tire chaque jour à 500 000 exemplaires, mais quel lectorat ces journaux et revues touchent-ils ? Sans pousser trop loin l'analyse sociologique, on peut distinguer environ trois sortes de public, pour « La Recherche » comme pour « le Monde » :

– D'une part un public d'initiés, curieux de mathématiques sous toutes leurs formes. C'est ce public-là qui participe au Courrier des Lecteurs, prend la peine d'écrire pour dire son accord ou son désaccord, proposer des généralisations, des améliorations ou d'autres solutions. Parmi ceux-ci, peu de femmes, hélas... Où sont-elles donc ?

– D'autre part un public d'amateurs, de formation scientifique, médecins, architectes, ou ingénieurs, qui lit les énoncés, les cherche parfois vaillamment, trouve quelquefois même des idées ingénieuses pour les plus abordables des problèmes.

– Il existe en plus un public « évanescant » : ce sont les occasionnels, ceux qui, tout à coup, seront attirés par un dessin, un titre, et, par curiosité, liront au moins le problème, le chercheront un peu et seront peut-être – qui sait ? – un jour acquis à l'idée que les mathématiques peuvent aussi être plaisantes et délectables... C'est pour ce public potentiel, mais non négligeable, que nous insistons toujours sur la qualité du graphisme et de la mise en page des problèmes, qui joue un rôle certain dans l'appétit pour les jeux mathématiques.

– Il y a ceux aussi, bien sûr, qui, sans lire « Le Monde » ou « La Recherche », sont attirés par des énigmes logiques, des problèmes de stratégie, ou encore des histoires de nombres : les nombres, ça parle toujours aux gens. Et puis il y a les autres... mes collègues de français, par exemple, lecteurs assidus du « Monde », qui me disent « Tes problèmes, ce n'est même pas la peine que je les lise, je n'y comprends rien ».

Les problèmes et leurs limites

C'est sur l'approche de ces trois premières catégories, à savoir les « initiés », les « amateurs » et les « occasionnels » que nous allons nous pencher.

– Tout d'abord, **quelles entrées choisir ?**

Pour un public de non initiés, la seule entrée possible dans le monde mathématique est celle du jeu, et ce sera un premier aspect de nos rubriques. Nous allons donc proposer aux lecteurs de petits problèmes, présentés si possible de façon ludique, en évitant jusqu'à l'extrême les notations et le vocabulaire typiquement mathématiques et en s'interdisant le recours à des théorèmes non élémentaires. Pour un public déjà plus curieux de mathématiques, une autre entrée possible est celle de la culture mathématique : histoire des idées, biographies de mathématiciens commentées et émaillées d'anecdotes, thèmes proprement mathématiques abordés sous différents éclairages. Ce côté-ci est pour le moment introduit essentiellement dans « La Recherche », l'approche « culturelle » étant quasiment absente de la rubrique du « Monde ».

– Qu'appelle-t-on « **problème ludique** » ?

Un problème peut être ludique par son habillage : il faut lui éviter d'être trop scolaire, et introduire une touche d'humour dans son énoncé. Nous pouvons pour cela nous permettre une certaine liberté de vocabulaire. Pour ce qui est de l'habillage, on peut soit habiller un problème isolément, soit le situer dans le contexte d'un thème, ou d'une narration. On fera par exemple une page de problèmes « polychromes » sur le thème des voyages, où interviendront des notions mathématiques très diverses. On peut faire aussi des pages « monochromes » regroupant plusieurs problèmes sur le même thème mathématique : problèmes de minimum, problèmes sur un quadrillage, problèmes de coloriage, de partages, aussi bien en géométrie (dissections de figures) qu'en algèbre (décomposition d'un entier en diverses sommes), etc.

Vous voulez par exemple fabriquer un problème sur la suite de Fibonacci. Vous pouvez évidemment demander brutalement de calculer le sixième terme de cette suite, en donnant d'emblée la règle du jeu ... et vous n'aurez personne, ou presque,

pour s'intéresser à la question. Léonard de Pise, lui, l'avait bien compris : il a introduit cette suite fameuse avec une histoire de lapins. Pour ne pas recommencer le coup du lapin, on peut inventer beaucoup d'autres histoires, comme celle du jeu de construction : *On superpose des briques rouges et blanches pour construire des tours, sans que deux briques rouges aient le droit de se toucher. Combien de tours différentes de hauteur 6 peut-on former ? Peut-on prévoir une règle donnant le nombre de tours de hauteur n ?*

On va ici faire une partition des tours de hauteur n : d'une part les $T(n-1)$ qui se terminent par une brique blanche, d'autre part les $T(n-2)$ qui se terminent par une brique rouge, ce qui conduit directement à une suite de Fibonacci.

Un problème peut être ludique aussi parce qu'il évoque un jeu : véritable jeu, avec une stratégie, ou jeu de chiffres, comme on dit un jeu de lettres ou un jeu de mots, ou encore jeu sur une figure, parcours géométrique itératif, propriété inattendue qu'on prend plaisir à découvrir. Les problèmes de chiffres, par exemple, plaisent toujours et ne nécessitent aucun habillage. Ils peuvent être donnés tels quels : *On part de 0 et on ne peut effectuer que deux opérations, ajouter 9 ou multiplier par 9. Quel est le nombre minimum d'opérations nécessaires pour atteindre 999 ? Parmi les multiples de 9 inférieurs à 1000, quel est celui qui nécessite le plus d'opérations ?*

Il faut 9 opérations au minimum pour atteindre 999, et le nombre le plus long à atteindre est 720, qu'on obtient au bout de 17 opérations.

– **Quelles catégories de problèmes** présenter ?

* Pour « Le Monde », les champs qu'on peut espérer couvrir pour le grand public ont été balisés et clairement définis avec la rédaction du journal :

- A/ Logique,
- B/ Problèmes numériques,
- C/ Jeux sur une figure,
- D/ Graphes et algorithmes,
- E/ Curiosités et paradoxes.

À l'intérieur de chacune de ces catégories, quels sont les principes mathématiques qu'on peut mettre en œuvre ?

A/ En logique

- Le **principe des tiroirs**, comme dans *La cité autarcique* (Le Monde du 05/05/1998, problème n° 68) : *Dans la cité de Vaseclaux, il ne vient jamais d'étranger. Alors les 7 843 habitants doivent se contenter de choisir leurs relations parmi les Vaseclausiens. D'ailleurs, chacune tient à jour un registre précis des personnes qu'il connaît (et donc qui le connaissent). Y a-t-il deux habitants qui connaissent le même nombre de personnes ?* La réponse est « oui » car le nombre de relations d'un individu devrait en théorie prendre 7 843 valeurs (de 0 à 7 842), mais il est impossible qu'à la fois un habitant connaisse tout le monde et qu'un autre ne connaisse personne (ils se connaîtraient). Un individu peut donc avoir au maximum 7 842 relations, mais il y a 7 843 habitants. C'est donc que deux d'entre eux au moins connaissent le même nombre de personnes.
- Le raisonnement **par l'absurde**, dont les problèmes de menteurs sont une belle illustration, telle cette enquête (Le Monde du 30/05/2000, problème n° 173) :

Trois malfaiteurs sont soupçonnés de meurtre. Un et un seul des trois est coupable. Les enquêteurs ont recueilli trois déclarations de chacun d'eux :

– André :

* (A1) : « Je suis innocent »,

* (A2) : « D'ailleurs, à l'heure du crime, j'étais avec Béatrice »,

* (A3) : « Claude est coupable ».

– Béatrice :

* (B1) : « Je suis innocente »,

* (B2) : « André aussi »,

* (B3) : « Mais il n'était pas avec moi à l'heure du crime ».

– Claude :

* (C1) : « Je suis innocent »,

* (C2) : « Béatrice aussi »,

* (C3) : « André a menti trois fois ».

C'est Béatrice la coupable : on obtient ce résultat en supposant tour à tour que le coupable soit André, puis Claude, ce qui mène chaque fois à des contradictions. Il ne reste que la culpabilité de Béatrice.

- Le raisonnement par **disjonction des cas**. On l'emploie par exemple dans « Rencontres du troisième type » (Le Monde du 15/04/2003, problème n° 321) : Sur une planète de mutants, les habitants (en nombre total invariable car ils sont immortels et ne se reproduisent pas) sont tantôt aventuriers, tantôt bourgeois, tantôt cinglés. La simple rencontre de deux êtres de type différent les fait muter en êtres du troisième type. Et le dernier recensement fait apparaître un nombre grandissant de cinglés. *À quelle condition sur les effectifs de chaque catégorie se peut-il que la planète ne compte plus, un jour, que des cinglés ?* Les deux seuls cas qui peuvent se produire lors d'une rencontre sont :
 - * soit les effectifs des populations d'aventuriers et de bourgeois diminuent conjointement d'une unité,
 - * soit l'une diminue de moitié tandis que l'autre s'accroît de deux unités.
 En tout cas, la différence ne bouge pas, ou varie de trois unités. Elle ne pourra donc devenir nulle que si c'était déjà au départ un multiple de trois.
- Des **métapuzzles**, où l'information paraît à première vue incomplète, mais où le fait de savoir qu'une personne plus informée a pu (ou non) résoudre l'énigme vous permet d'arriver à bout du problème, comme dans « Les quatre enfants » (Le Monde du 11/07/1998, problème n° 78) : Je croise ma voisine avec ses quatre enfants au jardin public.
 - Tiens, quel âge cela leur fait-il ?
 - Comme tu es très forte en mathématiques, je vais te répondre par une énigme : Le produit de leurs âges est 72, et la somme est ... justement ton âge.
 - Cela ne me suffit pas... L'un au moins de vos enfants a-t-il deux ans ?
 Elle répond à ma question et, cette fois, je suis en mesure d'indiquer l'âge de ses quatre enfants.

On écrit toutes les façons possibles d'obtenir 72 comme produit de 4 entiers, et on calcule la somme correspondante. Seule la somme 15 donne lieu à plusieurs possibilités : 1-2-6-6, 1-3-3-8, 2-2-2-9. Elle a dû répondre « non » à ma question, sinon, j'hésiterais encore. Les enfants ont 1, 3, 3 et 8 ans.

B/ La catégorie « **problèmes numériques** » touche essentiellement l'**arithmétique**, avec les problèmes de divisibilité, à condition d'éviter les mots trop spécialisés comme « nombres premiers ». On peut aller jusqu'aux identités remarquables, considérées quelquefois comme une aide à la factorisation. « Énigme numérique » (le Monde du 12/06/2001, problème n° 227) en est un exemple :

Je suis un nombre de 3 chiffres. Si on coupe mon carré en deux tranches de 3 chiffres, en additionnant ces deux « moitiés », on trouve 1 000. Qui suis-je ? 998, 406 ou 593 répondent à la première énigme. En effet, vu la structure du carré du nombre X cherché (une « moitié égale à A , l'autre à $1\,000 - A$), $X^2 = 1\,000A + 1\,000 - A$, qui s'écrit encore $X^2 - 1 = 999(A + 1)$, ou $(X - 1)(X + 1) = 27 \times 37(A + 1)$. En examinant les 4 cas possibles, on trouve que $X - 1$ ne pouvant pas être multiple de 999, les seules possibilités sont $X + 1$ multiple de 999 (donc $X = 998$), $X - 1$ multiple de 27 et $X + 1$ de 37 (donc $X = 406$), ou le contraire (alors $X = 593$).

C/ Pour les **jeux sur une figure**, les problèmes de géométrie ont lieu plus souvent dans le plan que dans l'espace. On y utilise essentiellement :

- le **triangle** et ses propriétés, y compris les droites remarquables,
- le **cercle**,
- les **polygones** et les **polyèdres**,
- quelques calculs d'**aires** et de **volumes**,
- les **pliages**, visualisation de la symétrie,
- les **coloriages**, qui sont à la fois des problèmes de logique et des jeux sur une figure,
- les problèmes de découpage et de pavages sont légion, et ils ont toujours beaucoup de succès, comme celui-ci (*Découpe harmonieuse*, Le Monde du 15/01/2002, problème n° 257) :

Et les cinq comparses se partagèrent le gâteau, un beau gâteau carré. Ils n'étaient pas exigeants : il leur suffisait d'avoir chacun une part en forme de triangle rectangle, pas forcément de même taille, mais en tout cas de même forme. Leur première idée fut de partager le gâteau en 5 triangles rectangles isocèles.

Vous retrouverez aisément vous-mêmes les 4 configurations.

Après réflexion, les 5 individus décident cette fois que les parts seraient toujours des triangles rectangles, mais dont l'un des côtés de l'angle droit mesurerait le double de l'autre.

Là aussi il y a 4 configurations. Saurez-vous les retrouver ?

D/ Pour les « **graphes et algorithmes** »,

on les place soit dans un contexte **arithmétique** (chaînes de nombres, opérations itérées), soit en **action** (itération de pliages ou de découpages), soit en **géométrie** (partage de figures). C'est d'un algorithme « en action » qu'il s'agit dans « *Les petits papiers* » (Le Monde du 10/06/1997, problème n° 21) : Sur un ruban de papier, vous pouvez réaliser les deux opérations suivantes :

* p : le plier en deux en amenant la moitié droite sur la moitié gauche.

* c : couper au milieu et superposer le morceau de droite sur celui de gauche.

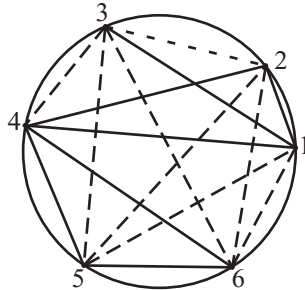
On obtient par exemple à partir d'un morceau initial 5 morceaux avec la suite d'opérations ppc. On alterne maintenant cpcpcp... *Au bout de combien de coupes dépassera-t-on les mille morceaux ? Combien aura-t-on alors de morceaux ?*

Un pli n augmente pas le nombre de morceaux, une coupe en k -ième position accroît celui-ci de $2k - 1$. Au morceau initial vont s'ajouter : 1 pour la première coupe, 4 pour la seconde (troisième position), 16 pour la troisième (cinquième position), puis 64, 256, 1 024 pour la sixième coupe, soit au total 1 366 morceaux.

E/ Dans la rubrique « **Curiosités et paradoxes** »,

l'idée est d'introduire un peu de **culture mathématique**, c'est-à-dire en particulier de rendre les lecteurs sensibles à certaines propriétés qui pourraient, à première vue, paraître étonnantes, mais que les mathématiques permettent d'expliquer.

Vous prenez par exemple 6 points sur un cercle, et deux crayons de couleurs différentes : rouge et bleu. Joignez les points deux à deux de toutes les façons possibles en utilisant la couleur de votre choix. Tiens... vous obtenez un triangle entièrement rouge.⁽¹⁾



Le résultat se généralise : quelle que soit la manière de colorier les segments, il existe toujours un triangle monochrome. *Pouvez-vous le prouver ?* (Le Monde du 16/09/1997, problème n° 35).

Si on nomme les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, cinq segments partent de 1 dont 3 au moins sont rouges par exemple : 12, 13 et 14.

– Si 23 est rouge, 123 est rouge.

– Si 23 est bleu, si 34 est rouge, 134 est rouge, et si 34 est bleu, et 24 aussi, 234 est bleu, alors que si 24 est rouge, c'est 124 qui l'est.

Pour un public un peu plus averti, comme par exemple celui du mensuel « La Recherche », les problèmes mettent en œuvre des principes plus élaborés, et on peut se permettre un vocabulaire plus technique.

– Quels **grands principes** peut-on mettre en jeu ?

En plus de ceux que je viens d'évoquer, et qui demeurent présents, on peut faire appel à :

- la notion d'**invariant**, au point de lui avoir consacré une rubrique entière (*Recherche invariant désespérément*, dans La Recherche n° 311, juillet-août 1998).

En voici un exemple :

2 000 jetons numérotés de 1 à 2 000 sont sur la table. Vous en prenez deux au hasard et, avant de les jeter, vous inscrivez leur différence sur un jeton vierge, que vous reposez sur la table. Vous recommencez, jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul jeton sur la table. *Son numéro est-il pair ou impair ?*

Chaque opération diminuant le nombre de jetons de 1, il y a eu 1999 manipulations, et si on remarque que la différence de deux nombres a même parité que leur somme, le dernier jeton a la parité de la somme des 2 000 premiers (paire).

- des **calculs algébriques** plus avancés, en évitant cependant les trop grosses formules,

(1) Sur la figure, le « rouge » est en traits pleins et le « bleu » en pointillés.

- des **propriétés géométriques** pouvant aller jusqu'à faire appel à quelques formules trigonométriques,
- des méthodes par **approximations successives**, mises en œuvre sur des problèmes plus originaux que des problèmes algébriques. Considérons par exemple un problème d'*autoréférence*, qui va finir par se résoudre par approximations successives : Comment faire pour que la phrase : « Cette phrase contient ... consonnes » soit vraie ? Il suffit de corriger les phrases au fur et à mesure en commençant par « cette phrase contient 18 consonnes », puis « 22 », puis « 24 », et enfin « 25 », qu'on obtient 2 fois. Comme la seconde décrit la première, elles sont exactes.
- des **algorithmes** plus élaborés, qu'ils soient de calcul ou géométriques : tout le monde connaît l'*algorithme de Kaprekar*, du nom de ce mathématicien indien qui l'inventa. Vous partez d'un nombre de 4 chiffres, que vous rangez dans l'ordre croissant, puis dans l'ordre décroissant. Faites la différence des deux nombres obtenus, puis recommencez. *Sauriez-vous trouver, parmi les nombres inférieurs à 10 000, les « puits », c'est-à-dire les nombres qui sont leur propre image ?* En procédant par éliminations, on trouve que les puits sont ici 0, 495 et 6 174.
- la **théorie des graphes**, et des problèmes de chemins eulériens, comme ceux que nous envoient parfois les lecteurs souvent assidus et prompts à prendre la plume ;
- le **principe de récurrence** pour jouer jusqu'à l'infini, comme dans « *À la queue, comme tout le monde !* » (La Recherche n° 308, avril 1998) : *Existe-t-il un entier dont le cube, exprimé en système décimal, se termine par 1111...1, c'est-à-dire 1 998 fois le chiffre « 1 » ?* $N_1 = 1$ convient. Supposons qu'il existe un entier N_p se terminant par 1 dont le cube se termine par p chiffres « 1 », et posons $N_{p+1} = N_p + K \cdot 10^p$. Comme $N_{p+1}^3 = N_p^3 + 3K \cdot N_p^2 \cdot 10^p + A \cdot 10^{p+1}$, ses p derniers chiffres sont des 1. Le précédent s'obtient en ajoutant le chiffre B correspondant de N_p^3 au chiffre des unités de $3K$; or, 3 étant premier avec 10, il est toujours possible de trouver K tel que $B + 3K$ se termine par 1. En faisant ce choix, N_{p+1}^3 se termine bien par $p + 1$ chiffres 1.

Toutes ces références constituent la panoplie « de base », en quelque sorte les mathématiques « nécessaires » à la confection des problèmes soumis à un vaste public. On ne peut pas faire à moins sans affadir totalement la conception même de problèmes ludiques, que nous avons l'habitude de nommer « jeux mathématiques », et sans assécher la recherche qu'ils impliquent. Mais peut-on aller au-delà ?

Transgresser les tabous

Je suis persuadée qu'on peut mener le lecteur encore plus loin, c'est-à-dire l'amener à une démarche dont les mathématiciens savent qu'elle est féconde, et lui faire ainsi découvrir la puissance du raisonnement mathématique.

À cette fin, nous avons imaginé pour « Le Monde » des **problèmes à deux vitesses**, c'est-à-dire avec une première question destinée à tous, et une deuxième, pour ceux qui veulent aller plus loin, consistant en une généralisation, dont voici un exemple :

Les polygones étoilés (Le Monde du 16/05/2000, problème n° 171). On place 7 points sur un cercle, on les joint de 2 en 2 pour faire un heptagone étoilé.

– *Quelle est la somme de ses angles ?*

On se place au centre du cercle, et on considère les angles au centre correspondant aux angles inscrits. Le total des angles au centre vaut $3 \times 360^\circ$, et les angles inscrits donnent ainsi un total de 540° . Puis arrive la seconde question :

– *Plus généralement, sauriez-vous trouver la somme des angles d'un polygone étoilé de n sommets joints de p en p ?*

La technique précédente donne $(n - 2p) \times 180^\circ$.

D'autres problèmes ont eux aussi une « suite », comme « *Énigme numérique* », cité plus haut, où on posait comme seconde question : *Et si je suis un nombre de 4 chiffres dont la somme des deux tranches du carré vaut 10 000 ?* Un raisonnement similaire conduit à 6 solutions dans le cas de 4 chiffres : 9 998, 9 899, 5 455, 4 544 et 4 445.

On peut citer également « *Découpe harmonieuse* », mentionné ci-dessus, où la seconde question posée était : *Existe-t-il d'autres découpages du gâteau en 5 triangles rectangles de même forme ?*

Vous en trouverez également 4, où l'un des côtés de l'angle droit mesure un peu plus de la moitié de l'autre, environ 0,57 fois, ce rapport étant solution de l'équation $x^3 = (x - 1)^2$.

Pour « *La Recherche* », où nous avons déjà une gradation du niveau des problèmes, nous essayons de temps en temps de proposer un **problème ouvert** en sollicitant les réponses des lecteurs, comme dans *Le damier sensitif* (la Recherche n° 334, septembre 2000) :

Un damier rectangulaire, dont les cases sont colorées soit en vert soit en rouge. Lorsqu'on effleure une case, elle change de couleur, ainsi que toute celles de sa ligne et de sa colonne. Pour des damiers 2×2 , 3×3 , 5×4 , etc. est-il possible de les rendre entièrement rouges ? Un appel est lancé aux lecteurs pour la dimension $p \times q$ où p et q sont paires.

Et ça marche ! Plusieurs preuves intéressantes sont venues des lecteurs, qui ont démontré que dans ce cas il fallait effleurer toutes les touches du damier pour le faire changer de couleur. À chaque question ouverte ainsi posée, le courrier est d'ailleurs abondant et souvent très riche.

Sans poser de problèmes à deux vitesses, ni de problèmes ouverts, on peut aussi amener les lecteurs à **améliorer** leur solution, en recherchant par exemple à **optimiser un résultat**, c'est-à-dire montrer qu'il est minimum ou maximum.

C'est le cas dans le *problème des 9 jetons* : 9 jetons présentant tous une face blanche et une face noire sont placés en ligne. Au départ, toutes les faces sont blanches. Lors de chaque coup, vous avez le droit de retourner deux jetons à la fois, à condition qu'ils soient côte à côte.

– *Au bout de combien de coups au minimum est-il possible de parvenir à une configuration qui ne comporte que des cases noires ?*

– *Quelle est la configuration qu'il est possible d'obtenir mais qui nécessite, pour y parvenir, le maximum de coups ?*

Il n'est pas possible d'obtenir 9 faces noires car la parité du nombre de faces blanches n'est pas modifiée par un coup. Si on part de 9 cases blanches, on ne peut donc en obtenir zéro.

Quant à la configuration cherchée dans la seconde question, la voici :



Elle nécessite les 8 coups possibles, car jouer deux fois le même coup produit le même effet que ne pas jouer.

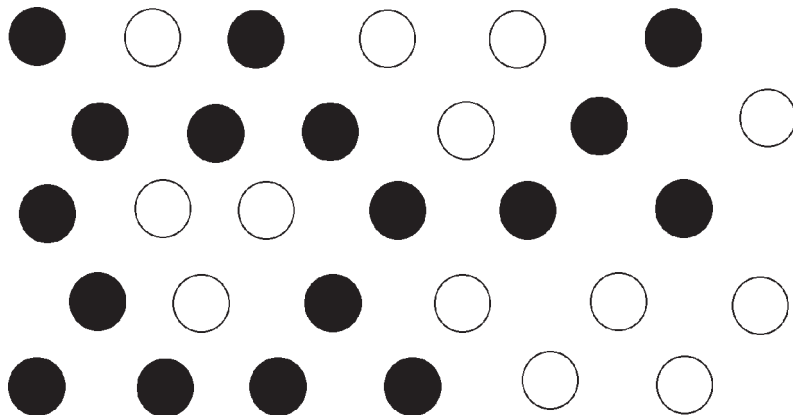
On peut aussi faire en sorte que les gens trouvent en définitive une **formule** de généralisation, les amenant ainsi à manipuler des lettres en calcul, ce qu'ils n'auraient peut-être pas fait spontanément au départ.

Il faut en effet noter que l'idée première du « chercheur » de jeux mathématiques n'est pas toujours de trouver une formule, et c'est tant mieux : une approche par un autre biais se montre parfois tout aussi fructueuse. L'exemple des *Bicyclettes chinoises* est typique. Si on vous le pose, vous aurez peut-être envie de poser des équations, mais on peut trouver mieux... *Dans cette petite ville de Chine, toutes les familles possèdent 1, 2 ou 3 vélos. Il y a autant de familles à 1 vélo que de familles à 3 vélos. Il y a 60 familles. Combien y a-t-il de vélos ?*

Certains comptent le nombre moyen de vélos par famille (c'est évidemment 2) pour conclure que le village compte exactement 120 vélos. D'autres, encore plus futés, peuvent imaginer que chaque famille possédant trois vélos en prête momentanément un aux familles qui n'en ont qu'un. Il y a alors exactement deux vélos par famille, et donc 120 vélos au village.

On peut également ramener des arguments mathématiques à **quelques idées simples** (par exemple, *la réflexion n'est rien d'autre qu'un pliage*) qui feront toucher du doigt les propriétés géométriques de la transformation concernée. On peut, dans le même ordre d'idées, montrer qu'un raisonnement sur la **parité** permet de venir à bout de certains problèmes « coriaces ».

Faire découvrir une **stratégie de jeu** est souvent intéressant : on peut ainsi amener le lecteur à résoudre des problèmes inattendus. Sous le problème « *Noir ou blanc ?* » se cache en réalité une règle que vous connaissez bien !



Chacune des lignes de ce diagramme se déduit de la précédente selon une règle immuable de filiation.

- Sauriez-vous trouver cette règle et en déduire la sixième ligne ?
- Retrouvera-t-on le première ligne au bout d'un certain nombre d'étapes ?

Pour passer d'une ligne à sa « fille », on pose un pion blanc entre deux pions de même couleur et un pion noir entre deux pions de couleur différente, en faisant comme si les lignes « se refermaient ». On retrouve à nouveau la troisième ligne en septième position, d'où une

configuration où réapparaissent de manière cyclique les quatre lignes 3, 4, 5 et 6. La première ligne ne se retrouve donc jamais.

On peut enfin, aussi et surtout pour un public de non initiés, montrer que les mathématiques se parlent, et bien souvent autrement qu'à l'école. Prenons l'exemple des nombres en triangle. Vous les rangez de cette façon :

$$\begin{array}{cccccc}
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\
 & & 4 & 8 & 12 & 16 \\
 & & & 12 & 20 & 28 \\
 & & & & 32 & 48 \\
 & & & & & 80
 \end{array}$$

Le but du jeu est évidemment de trouver le dernier nombre. On aurait bien sûr envie de voir de la récurrence là-dessous, mais la récurrence, c'est un truc de mathématiciens... On peut pourtant s'en passer : en fait, ce dernier nombre ne se calcule qu'avec les termes extrêmes des lignes, et on peut aisément montrer que la somme de ces termes double à chaque ligne : $a b \dots c d$. À la ligne suivante, cette somme devient $a + b + \dots + c + d$, et, comme la somme des termes équidistants des extrêmes est la même dans une suite arithmétique, on trouve en définitive $2(a + d)$, qui est bien le double de la somme correspondant à la ligne précédente. Vous voyez, pas besoin de termes mathématiques sophistiqués : quelques idées simples suffisent.

J'ajouterai enfin que pour arriver loin en mathématiques avec quelques idées simples, il est nécessaire de travailler et retravailler sans cesse la rédaction, celle des solutions plus encore que celle des énoncés. Ce travail n'est pas aussi facile qu'on croit, surtout pour quelqu'un qui sait un peu de mathématiques. On est en effet toujours tenté d'employer le vocabulaire formel adéquat, mais il faut se garder d'en faire usage si on veut conserver ses lecteurs, et même en attirer d'autres. L'exercice le plus difficile est sans doute d'essayer de faire tenir en le moins de mots possibles la rédaction des solutions, afin qu'elle reste tout de même lisible et compréhensible par le plus grand nombre, mais qu'elle ne dépasse pas la place allouée.

Les idées mathématiques peuvent donc faire leur chemin dans un vaste public, à condition qu'il soit curieux et un peu patient. C'est finalement le jeu mathématique qui aura le dernier mot : c'est lui qui, touchant à des domaines très ouverts comme ceux que nous venons d'évoquer, montrera le mieux aux « gens » que les mathématiques sont bien autre chose que l'art du calcul, et qu'on peut aussi y prendre du plaisir.

Bibliographie :

100 défis mathématiques du « Monde » (Affaire de logique I, problèmes 1 à 100). Éditions POLE.

100 défis mathématiques du « Monde » (Affaire de logique II, problèmes 101 à 200). Éditions POLE.

100 défis mathématiques du « Monde » (Affaire de logique III, problèmes 201 à 300). Éditions POLE.

Rubrique « Chercher, jouer, trouver » du magazine « La Recherche ».