Le jeu de Juniper Green

Daniel Djament(*)

Résumé : En juillet 1997, dans le numéro 237 de la revue « Pour la science », Ian Stewart présentait le jeu de Juniper Green et donnait quelques éléments de stratégie. Cet article reprend celui de Ian Stewart, et approfondit, pour des professeurs de mathématiques de collège ou de lycée, l'analyse de ce jeu, praticable du cours moyen à l'université. Il peut être une aide à l'apprentissage de la multiplication et de la division, et jouer un rôle primordial pour l'acquisition de la notion de nombre premier. Le nom de ce jeu est celui de l'école dans laquelle enseigne le professeur qui l'a imaginé et expérimenté.

En juillet 1997, dans le numéro 237 de la revue « Pour la science », Ian Stewart présentait le jeu de Juniper Green et donnait quelques éléments de stratégie. Redécouvrons ce jeu et essayons de répondre à certaines questions soulevées par cet article.

On dispose de n cartes numérotées de 1 à n présentées faces visibles pour les deux joueurs (dans la version initiale $n = 100$).

Les joueurs tirent chacun une carte à tour de rôle. Les cartes enlevées ne sont ni remises sur la table ni réutilisées. Le premier joueur choisit une carte. Ensuite, quand vient son tour, chaque joueur doit prendre une carte portant un numéro qui soit multiple ou diviseur du nombre inscrit sur la carte tirée au coup précédent.

Celui qui ne peut plus jouer a perdu.

Avec ces seules règles, la stratégie est, en général, évidente : le premier joueur prend un nombre premier strictement supérieur à $n/2$, ce qui oblige son adversaire à prendre 1, le premier joueur prend alors un autre nombre premier strictement supérieur à $n/2$ et la partie s'arrête. Par exemple, si $n = 100$, la suite 97, 1, 89 est gagnante pour le premier joueur.

Aussi, on ajoute une autre règle : le premier joueur doit commencer par un nombre pair.

Nous adopterons donc cette nouvelle règle dans la suite en faisant cependant deux remarques :

Cette stratégie « évidente » sera une découverte pour les plus jeunes joueurs (à partir du cours moyen) et sera une occasion d'introduire les nombres premiers.

Cette stratégie est en échec pour $n = 10$ car 10 est le double de 5, et 7 est le seul nombre premier entre 5 et 10.

Ian Stewart appelle les deux joueurs Alice et Bob et présente une stratégie gagnante pour Alice lorsque $n = 40$:

(*) Centre de Seine Saint-Denis de l'IUFM de l'académie de Créteil.

Coups	Alice	Bob	Alice	Bob
1	22			
2		11		2
3	33		26	
4		3		13
5	21		39	
6		7		3
7	35		21	
8		5		7
9	25		35	
10		perd		5
11			25	
12				perd

Au début, Bob a le choix entre 11 et 2, mais ensuite, tous ses coups sont forcés. On remarque le rôle des nombres premiers 11 et 13 : 11, 22 et 33 sont inférieurs à 40 mais 44 est strictement supérieur à 40, de même 13, 26 et 39 sont inférieurs à 40 mais 52 est strictement supérieur.

Cela donne des idées, essayons $n = 60$. 17 et 19 jouent les rôles tenus précédemment par 11 et 13 d'où la stratégie gagnante pour Alice :

Coups	Alice	Bob	Alice	Bob
1	38			
2		19		2
3	57		34	
4		3		17
5	33		51	
6		11		3
7	55		33	
8		5		11
9	35		55	
10		7		5
11	49		35	
12		perd		7
13			49	
14				perd

Généralisons : si on peut trouver deux nombres premiers p et q tels que p, $2p$, $3p$ ainsi que q, $2q$, $3q$ soient inférieurs ou égaux à n et $4p$ ainsi que $4q$ strictement supérieurs à n, alors Alice peut obliger Bob à prendre 3. Si Alice veut forcer Bob à prendre ensuite 5, il suffit qu'elle prenne $3r$, puis au coup suivant $5r$ avec r premier, strictement supérieur à $n/6$ et inférieur ou égal à $n/5$. En effet, si r a ces propriétés, après $3r$, Bob ne peut prendre que r (car $6r > n$), donc Alice peut prendre $5r$ et Bob ne peut prendre que 5, ou, bien sûr 1, qui est perdant.

Ainsi, on imagine le tableau suivant :

Coups	Alice	Bob	Alice	Bob
1	$2p$			
2		p		2
3	$3p$		$2q$	
4		3		q
5	$3r$		$3q$	
6		r		3
7	$5r$			
8		5		
9	$5s$			
10		s		
11	$7s$			
12		7		
13	$7t$			
14		t		
15	$11t$			
16		11		

En remarquant que p et q sont interchangeables et que s et t doivent être premiers avec $n/10 < s \le n/7$ et $n/14 < t \le n/11$.

Il est inutile de remplir les deux dernières colonnes à partir de 3, ce sont les mêmes que les deux précédentes avec un simple décalage.

Le tableau peut évidemment se poursuivre s'il existe des nombres premiers répondant aux conditions ; pour gagner, Alice doit saisir l'occasion de coincer Bob.

Parfois, il y a plus rapide que la recherche de r, s, t, etc. Par exemple, pour $n = 100$, qui est la version initiale du jeu :

Coups	Alice	Bob	Alice	Bob
1	62			
2		31		2
3	93		58	
4		3		29
5	57		87	
6		19		3
7	95			
8		5		
9	85			
10		17		
11	51			
12		perd		

On remarque que $p = 29$ et $q = 31$, ensuite $r = 19$, nous aurions pu prendre $s = 13$ compris entre 100/10 et 100/7, mais le choix de 17 a rendu la victoire d'Alice plus rapide. Cependant, le tableau précédent montre que cette stratégie pour n = 100 est valable pour tous les n compris (largement) entre 95 et 101, en effet, 95 est le nombre le plus grand du tableau, 51 est le plus petit nombre pris par Alice et le double de 51 est 102 qui permettrait à Bob de s'échapper. Par contre, le choix s = 13 donnerait cette fin de partie :

Alice	Bob
95	
	5
65	
	13
91	
	7
77	
	11
55	
	perd

La victoire d'Alice est plus tardive, mais ce nouveau tableau lui donne une stratégie gagnante pour n compris (largement) entre 95 et 109 (car 55 est le plus petit nombre pris par Alice), c'est meilleur que précédemment.

Un dernier exemple avec n = 120 que je vous laisse analyser comme précédemment :

Coups	Alice	Bob	Alice	Bob
1	74			
2		37		2
3	111		62	
4		3		31
5	69		93	
6		23		3
7	115			
8		5		
9	85			
10		17		
11	119			
12		7		
13	91			
14		13		
15	65			
16		perd		

Tableau en fait valable pour tous les n compris (largement) entre 119 et 123.

Bien sûr, beaucoup de questions restent posées : jusqu'où est-il suffisant de trouver des nombres premiers p, q, r, s, t, etc. pour assurer la victoire d'Alice ? L'existence de p et de q est-elle nécessaire ? Ceci mènera les plus avancés à se poser la question de la répartition des nombres premiers qui jalonne l'histoire des mathématiques. Après avoir étudié la question, ils se convaincront que, pour n assez grand, l'existence de p et de q est assurée grâce au célèbre théorème des nombres premiers.

Pour $n = 20$, on ne peut pas trouver p et q (seul 5 convient), on pourra chercher une autre stratégie pour Alice, à moins qu'elle ne soit pour Bob, je vous laisse y réfléchir…

On pourra aussi jouer tout seul en cherchant une suite de longueur maximale. Pour $n = 20$, je vous propose :

$$20, 10, 5, 15, 3, 9, 18, 6, 12, 4, 8, 16, 2, 14, 7, 1, 11$$

On s'aperçoit donc que le jeu de Juniper Green, facile à mettre en œuvre, peut amuser et faire faire des mathématiques du cours moyen à l'université.