Interdisciplinarité sur le thème des équations différentielles en terminale scientifique

Des professeurs de Mathématiques
et de Sciences physiques
du Lycée Bertrand d'Argentré de Vitré(*)

Introduction

Les très intéressants articles récemment publiés dans la revue sur le thème interdisciplinaire des équations différentielles en terminale scientifique, nous ont décidés à apporter un témoignage sur les échanges entamés depuis deux ans entre professeurs de mathématiques et de physique au sein de notre lycée. Plus précisément nous présentons comment les nouveaux programmes nous ont amenés à mettre en place lors de nos séances de mathématiques des activités plus en liaison avec les autres matières.

L'idée est bien que chacun reste maître de son enseignement mais aussi que la connaissance de l'approche et des exigences de l'autre sur un thème commun, ici les équations différentielles, constitue un plus pour la pratique de notre enseignement propre et pour nos élèves.

Notre fil conducteur a été la méthode d'Euler. Les programmes officiels de nos deux matières y font référence. Cette démarche, nouvelle pour nos élèves et qui met en jeu équation différentielle, approximation, discrétisation et algorithme, est riche d'enseignement. Nous avons décidé d'y accorder du temps, de manière progressive, d'utiliser les cadres graphique et numérique, ainsi que la calculatrice avec le plus de simplicité possible. Notre but était de promouvoir une démarche scientifique auprès des élèves et de favoriser un passage de témoin de l'enseignant de mathématiques à celui de sciences physiques.

De fil en aiguille, nous nous sommes intéressés aux pratiques dans nos deux matières concernant la résolution d'équations différentielles et l'exploitation de leurs solutions en cherchant à faire ressortir les concepts mathématiques.

(*) Pour tout contact, utiliser le mail : roselyne.halbert@ac-rennes.fr

I) Première approche des équations différentielles et de la méthode d'Euler

1) Le déroulement d'une séance sur l'introduction de la méthode d'Euler

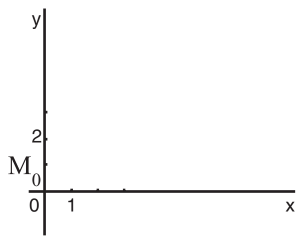
Nous avons proposé la problématique suivante :

> On cherche une approximation, sur un intervalle donné, de la courbe représentative d'une fonction f égale à sa dérivée f' sur **R** et vérifiant $f(0) = 1$.

Au niveau du cours de mathématiques, tout est inconnu pour les élèves : manipuler une fonction dont on ne connaît pas l'expression analytique et qui est liée à sa dérivée, construire une approximation d'une courbe à partir d'une nouvelle démarche basée sur des aspects locaux, « du proche en proche » et la répétition d'actes similaires, un algorithme.
Voici les différentes étapes de la recherche, le professeur disposant éventuellement d'un vidéoprojecteur couplé à un ordinateur exploitant un logiciel de géométrie dynamique.

L'analyse des données et première étude globale

« Comment exploiter de telles données ? Que veut dire approximation ? Est-ce l'allure de la courbe ? » sont des questions bien naturelles de la part de nos élèves qui s'orientent vers une recherche globale de la courbe : position par rapport à l'axe des abscisses, variation de la fonction f. On saisit alors l'opportunité de mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde et d'exploiter la continuité de la fonction.

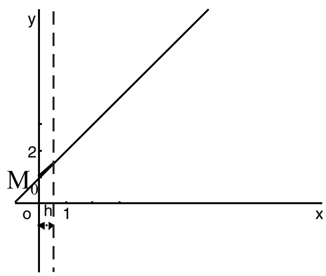


<u>Constat</u> : sur l'intervalle considéré, la fonction f, si elle existe, ne peut être que positive et donc ($f' = f$) une fonction croissante.
Cadrage de l'approximation recherchée sur la feuille.

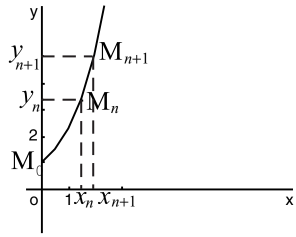
Vers une analyse locale et la discrétisation du problème

Un nouvel acteur : la tangente au point d'abscisse 0.
Que dire de la courbe au voisinage du point de coordonnées (0,1) ?
Retour sur l'approximation affine (cadre graphique, cadre numérique) et ses limites.
Prise en compte d'une première approximation.

<u>Constat</u> : on s'oriente vers une discrétisation du problème et l'introduction d'un pas h.



La naissance d'un algorithme

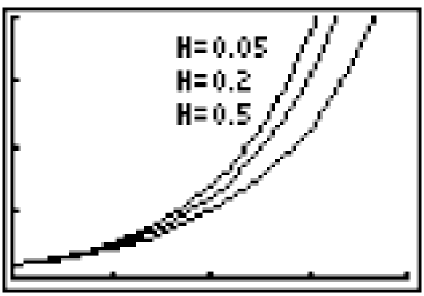


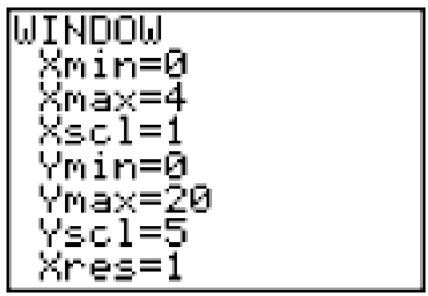
Une définition à exploiter : $f' = f$.
Que dire de la tangente à la courbe au point d'abscisse h ? D'abscisse $2h$?
Prise en compte d'une deuxième approximation.
Une première construction « à la main » s'engage, prenant l'allure d'une ligne brisée.

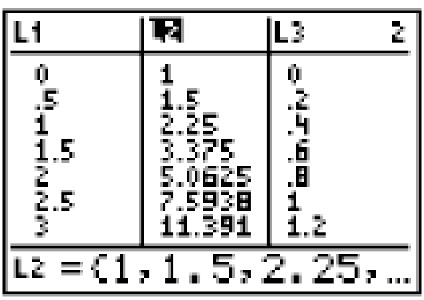
Constat : Cette construction est obtenue par un procédé itératif.
Le codage de la figure obtenue permet de mettre en évidence une suite de points (M_n) dont les abscisses, x_n, sont en progression arithmétique et les ordonnées, y_n, en progression géométrique.
$x_0 = 0$ et $x_{n+1} = x_n + h$; d'où $x_n = nh$.
$y_0 = 1$ et $y_{n+1} = y_n + h\, y_n = (1 + h)\, y_n$ d'où $y_n = (1 + h)^n$.

Les expérimentations et la conjecture

La calculatrice permet ensuite d'obtenir des approximations pour d'autres valeurs du pas h. Il suffit d'utiliser deux instructions (sans programme) accessibles sur pratiquement la totalité du parc des calculatrices de nos élèves :
Les données : H le pas et N, le nombre d'itérations pour couvrir un intervalle donné.
Seq(X* H , X, 0, N, 1) → L1 : Seq((1 + H)^X, X, 0, N, 1) → L2
Les valeurs obtenues ont été stockées, donc sont accessibles. L'affichage de la ligne brisée s'opère en utilisant le module graphique de la partie statistique de la calculatrice.
Six listes au minimum sont disponibles et la visualisation simultanée de trois approximations est possible.

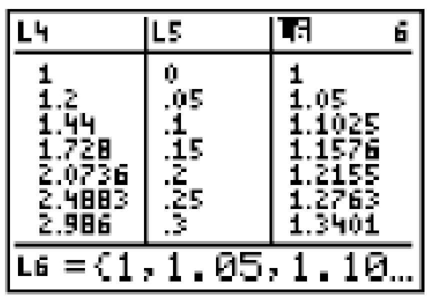






L1	L2	L3 2
0	1	0
.5	1.5	.2
1	2.25	.4
1.5	3.375	.6
2	5.0625	.8
2.5	7.5938	1
3	11.391	1.2

L2 ={1,1.5,2.25,…



L4	L5	L6 6
1	0	1
1.2	.05	1.05
1.44	.1	1.1025
1.728	.15	1.1576
2.0736	.2	1.2155
2.4883	.25	1.2763
2.986	.3	1.3401

L6 ={1,1.05,1.10…

Constat : une conjecture de l'existence d'une fonction satisfaisant aux contraintes.

Quelques commentaires

Tout d'abord une remarque sur la mise en place de l'algorithme sur calculatrice : nous avons choisi dans un premier temps de ne pas systématiser le calcul de N, nombre d'itérations pour couvrir l'intervalle considéré, pour faire prendre conscience de ce nombre. Pour une même abscisse, plus h est petit, plus N est grand (de petites erreurs mais plus nombreuses !). Il s'agit aussi de familiariser l'élève à son outil de calcul et à ses limitations (la dimension des listes par exemple).

Ensuite, il nous a paru aussi important de faire construire des approximations sur des intervalles de $\mathbf{R}^-$, la construction à la main n'étant d'ailleurs pas aisée pour les élèves.

Enfin, au moment de conjecturer l'existence d'une fonction f satisfaisant à l'équation différentielle avec condition initiale, nous sommes restés vigilants. Nous avons construit des approximations et rien d'autre. En aucun cas, l'une d'elles n'est la représentation graphique d'une fonction satisfaisant aux conditions imposées. Comment mettre en évidence avec les élèves une convergence de la méthode et mesurer la qualité des approximations ? Au niveau de notre enseignement, nous en sommes restés pour l'instant à une analyse graphique de plusieurs approximations et à la comparaison avec une courbe de référence, celle donnée par la calculatrice en précisant bien qu'elle aussi est une approximation (certes de meilleure qualité).

Durant cette séance, les élèves ont généré un algorithme en utilisant différents concepts mathématiques qui ne sont pas simples pour eux, mais qu'ils ont pu apprivoiser sous un nouvel angle. Ils ont appris à manipuler une fonction sans connaître ni sa courbe ni son expression analytique. Au moment du cours sur la fonction exponentielle, ils sont apparus mieux préparés à prendre en compte que toutes les démonstrations s'appuient sur une autre manière de définir une fonction : une équation différentielle avec sa condition initiale.

2) Les équations différentielles $y' = ay$ et la radioactivité

La physique et l'étude de la radioactivité, par exemple, viennent donner du sens à notre recherche et mettent en évidence des modélisations où la fonction recherchée est proportionnelle à sa dérivée. Nous poursuivons alors avec l'étude des équations différentielles du type $y' = ay$ ($a \neq 0$), conjointement avec la physique : étude des fonctions solutions, mise en évidence du temps caractéristique que nous exploiterons plus loin, du temps de demi-vie qui de surcroît a été exploité par certains élèves dans le cadre de leur TPE math-SVT (cinétique pharmacologique par exemple). Enfin nous expérimentons à nouveau la méthode d'Euler, dans le but de mettre en place un savoir-faire, avec une programmation sur calculatrice peu modifiée par rapport au premier exemple traité. Autant d'occasions pour les élèves de manipuler de nombreuses notions et méthodes.

En physique, les élèves ont étudié une première méthode de datation absolue (Carbone 14). Ils en étudieront d'autres dans le cours de Sciences de la vie et de la terre durant l'année. Nous avons donc proposé quelque temps après en devoir surveillé un exercice dont le cadre est une deuxième méthode de datation absolue.

Voici le texte dont les données numériques sont extraites d'un manuel de SVT de TS.

Soit λ *et* N_0 *deux constantes réelles strictement positives.*
1) a) *Justifier que la fonction* N *définie pour tout* t *de* $\mathbf{R}^+$ *par* $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$ *est l'unique solution sur* $\mathbf{R}^+$ *de l'équation différentielle avec condition initiale :*

$$\begin{cases} y' = -\lambda y \\ y(0) = N_0 \end{cases}$$

b) *On appelle* T *le temps de demi-vie, c'est-à-dire le temps au bout duquel la population* $N(t)$ *a diminué de moitié.*

Montrer que $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$.
2) *On pose pour* $t \in \mathbf{R}^+$, $F(t) = N_0 - N(t)$.
a) *Montrer que pour tout* t *de* $\mathbf{R}^+$, $F(t) = N(t)\,(e^{\lambda t} - 1)$
b) *En déduire que* $t = \dfrac{T}{\ln 2} \ln\left(\dfrac{F(t)}{N(t)} + 1\right)$.
3) *<u>Application : Datation absolue</u>*
Le potassium 40 est un isotope radioactif qui se désintègre en formant de l'argon 40. La demi-vie de cette transformation est de $11{,}9 \times 10^9$ *années. La longueur de cette période qui permet des datations très anciennes, et la distribution universelle du potassium dans les roches font du couple potassium/argon la méthode la plus utilisée en géologie. On a cherché par cette méthode à déterminer l'âge d'un gisement de fossiles d'hominidés dans le rift est africain. Un prélèvement d'échantillons a donné les résultats suivants :*

$$\begin{cases} 1 \\ 667\,10^{-7} \text{ \textit{moles par gramme d'échantillon de potassium 40}} \\ 2{,}26\,10^{-11} \text{ \textit{moles par gramme d'échantillon d'argon 40}} \end{cases}$$

Les chercheurs ont conclu que l'âge des échantillons est d'environ 2,3 *millions d'années.*
À l'aide des questions précédentes et des données de cette question, confirmer la réponse des chercheurs.

II) Les équations différentielles $y' = ay + b$

1) Le cours

Au niveau du cours de mathématiques, les élèves doivent savoir démontrer que les solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$ sont les fonctions f telles que pour tout x réel $f(x) = K\, e^{-ax} - \dfrac{b}{a}$ où K est une constante réelle.

Quelle démarche est adoptée par les professeurs de sciences physiques ?

Partons d'un exemple du chapitre de sciences physiques « Évolution des systèmes électriques » où il est établi que la tension U_C entre les bornes d'un condensateur initialement déchargé d'un dipôle (R,C) soumis à un échelon de tension E est solution de l'équation différentielle $E = U_C + RC\dfrac{dU_C}{dt}$ avec la condition initiale $U_C(0) = 0$.

S'agissant de déterminer l'expression analytique de $U_C(t)$, deux méthodes sont proposées aux élèves dans notre lycée.
La première prend en compte l'étude faite dans le cours de mathématiques :

• transformation de l'équation différentielle, $\dfrac{dU_C}{dt} = -\dfrac{1}{RC}U_C + \dfrac{E}{RC}$ pour l'identification des coefficients a et b ;

• application du théorème, $U_C(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + E$ où K est une constante réelle ;

• utilisation de la condition initiale $U_C(0) = 0$ pour aboutir à $U_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$.

La deuxième est la suivante :

• on admet que les solutions sont de la forme $U_C(t) = Ae^{-\alpha t} + B$ où A, B et α $(\alpha > 0)$ sont des constantes fixées ;
• utilisation de la condition initiale $U_C(0) = 0$ et de la condition « à la limite », $\lim\limits_{t\to+\infty} U_C(t) = E$, pour obtenir A = – E et B = E ;
• en « injectant » $U_C(t)$ dans l'équation différentielle qu'elle vérifie , on montre que $\alpha = \dfrac{1}{RC}$.

Cette méthode paraît vraiment incongrue aux professeurs de mathématiques. En effet, l'élève connaît précisément les solutions de cette équation différentielle d'après le cours de mathématiques. De plus, cette méthode utilise le comportement en $+\infty$ de la solution comme une donnée alors que la limite est entièrement déterminée par les constantes a et b (dès lors que a est négatif).
Pour le physicien, il s'agit d'abord de réunir le plus de données liées à la réalité physique du système étudié, de donner du sens aux constantes et de développer une méthodologie dans le cas d'équations différentielles plus complexes.

Nous avons relevé une troisième méthode dans certains manuels de sciences physiques en TS :

• on admet que les solutions sont de la forme $U_C(t) = Ae^{-\alpha t} + B$ où A, B et α sont des constantes fixées ;

• en « injectant » $U_C(t)$ dans l'équation différentielle qu'elle vérifie, on montre que $\alpha = \dfrac{1}{RC}$ et B = E ;

• en utilisant la condition initiale $U_C(0) = 0$, on montre que A = – E.

Cette méthode demande de connaître la propriété suivante :

$$(\forall t \in R)\ \beta e^{at} = \gamma \Rightarrow \beta = 0 \text{ et } \gamma = 0.$$

D'une part cette propriété n'a pas été rencontrée dans le cours de mathématiques et d'autre part cette méthode conduit à manipuler six paramètres. Que les élèves fassent le lien entre nos deux disciplines apparaît là fort compromis.

2) Des questions fréquemment posées aux élèves en sciences physiques

Pour poursuivre la discussion, nous avons recensé quelques questions posées aux élèves, les données étant l'équation différentielle et sa condition initiale citées plus haut.

- (Bac 2003 métropole)
  La solution générale de cette équation différentielle est de la forme $U_C(t) = E\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$.
  En déduire l'expression littérale de α.

- Vérifier que $U_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ est solution de l'équation différentielle.

- Cette équation admet des solutions de la forme $U_C(t) = A\,e^{-\frac{t}{RC}} + B$.
  Déterminer A et B.

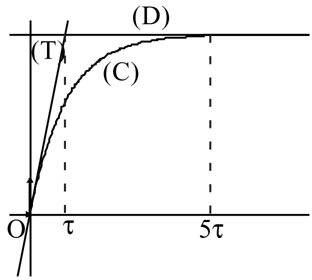
- a) Vérifier que l'expression $U_C(t) = A\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$ où A est une constante et $\lambda = \dfrac{1}{RC}$ est solution de cette équation.
  b) Déterminer la valeur à donner à A pour que l'expression précédente décrive l'évolution de $U_C(t)$.

L'inventaire, non exhaustif, de ces questions nous amène à réfléchir aux exigences que nous avons, et notamment lors d'un examen, au niveau des réponses. Le terme « vérifier » est au cœur de nos discussions. En sciences physiques, il semble qu'une solution consistant à résoudre l'équation grâce au cours de mathématiques ne soit pas une réponse correcte. Il est attendu que l'élève « injecte » la forme donnée et sa dérivée dans l'équation différentielle dès lors qu'il s'agit d'effectuer une vérification ou de déterminer des constantes. Ceci ne nous semble pas aller dans le sens de l'interdisciplinarité. Il reste néanmoins à remarquer qu'en mathématiques, au niveau

des équations, lorsque la question est formulée en terme de « vérifier », l'élève n'a pas en général les outils pour procéder par résolution.
Une discussion au delà même de notre lycée devrait être engagée au niveau des équations différentielles du type $y' = ay + b$ afin de prendre en compte les savoir faire issus de chaque matière.

3) Le temps caractéristique (pour $a < 0$) et la méthode d'Euler

La détermination graphique ou par le calcul du temps caractéristique (ou constante de temps) noté τ est souvent demandée en physique. Lorsque $a < 0$, le temps caractéristique τ est défini comme l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe au point de départ et de l'asymptote horizontale.
Le programme de mathématiques demande de mettre en évidence ce temps dans le cas des équations différentielles du type $y' = ay + b$ avec $a < 0$ et on montre que $\tau = -\frac{1}{a}$.



(D) : asymptote
(T) : tangente à l'origine
(C) : courbe représentative de f

Dans le cours de mathématiques, pour $a < 0$, $b > 0$ et $f(0) = 0$, nous avons proposé l'étude théorique de la solution f, la détermination de τ, puis la résolution de l'inéquation $\left|\dfrac{f(x)-\left(-\frac{b}{a}\right)}{-\frac{b}{a}}\right| \leq 0{,}01$.

Nous en avons tiré une figure-clé mettant notamment en évidence la valeur 5τ fréquemment utilisée en physique.

Nous avons ensuite proposé de mettre en œuvre la méthode d'Euler sur un exemple en comparant les écritures propres à nos deux disciplines, à partir de l'équation différentielle $\mathrm{E} = \mathrm{U_C} + \mathrm{RC}\dfrac{\mathrm{d\,U_C}}{\mathrm{d}t}$ et $\mathrm{U_C}(0) = 0$, avec les valeurs numériques R = 100 Ω, C = 1 F, E = 5 V (voir tableau page suivante).

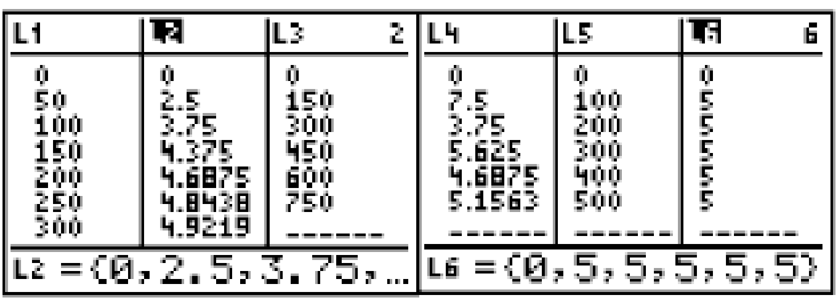
Mais quel pas de discrétisation prendre ? Que veut dire h ou Δt petit ? Sur quel intervalle construire une approximation de la courbe ? Bien sûr, ceci est généralement imposé mais, en s'appuyant sur la figure-clé précédemment donnée, les élèves conviennent assez facilement de prendre h ou Δt inférieur à τ et de choisir une représentation sur $[0 ; 5\tau]$. Remarquons que dans notre exemple $\tau = 100$! Puis, ils s'exercent à obtenir des approximations plus fines avec des valeurs du pas plus faibles en tenant compte des limitations de leur outil de calculs.
Théoriquement , lorsque le pas de discrétisation (noté h ou Δt) est inférieur à τ, le système discret (obtenu avec la méthode d'Euler) a la même limite lorsque t tend vers $+\infty$ que la solution analytique. Plus précisément :

	En sciences physiques	En mathématiques
Équation différentielle	$\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{U_C}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\mathrm{RC}}\mathrm{U_C} + \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{RC}}$ $\mathrm{U_C}(0) = 0$	$y' = ay + b$ avec $a = -\dfrac{1}{\mathrm{RC}}$ et $b = \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{RC}}$ $y(0) = 0$
Approximation	à t fixé et pour Δt petit $\mathrm{U_C}(t+\Delta t)$ $= \mathrm{U_C}(t) + \Delta t\left(\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{U_C}(t)}{\mathrm{d}t}\right)_t$ avec $\left(\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{U_C}(t)}{\mathrm{d}t}\right)_t = -\dfrac{1}{\mathrm{RC}}\mathrm{U_C}(t) + \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{RC}}$	Soit f la fonction solution. Pour x_0 un réel fixé et h proche de zéro, $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h\,f'(x_0)$ avec $f'(x_0) = a\,f(x_0) + b$
Algorithme	$t_0 = 0$; $t_{n+1} = t_n + \Delta t$; $\mathrm{U}_0 = 0$; U_{n+1} $= \mathrm{U}_n + \Delta t\left(-\dfrac{1}{\mathrm{RC}}\mathrm{U}_n + \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{RC}}\right)$	$x_0 = 0$; $x_{n+1} = x_n + h$; $y_0 = 0$; $y_{n+1} = y_n + h\,(ay_n + b)$

si $a < 0$ et $|1 + ah| < 1$, la suite (y_n) qui est une suite arithmético-géométrique est convergente de limite $-\dfrac{b}{a}$.

Concernant la mise en œuvre de l'algorithme, dès lors que la calculatrice possède un mode « suites », l'obtention des valeurs des deux suites est aisée. Sinon, on peut avoir recours à un programme faisant appel à une boucle « For » par exemple.

$h = 50$ $\qquad$ $h = 150$ $\qquad$ $h = 100$

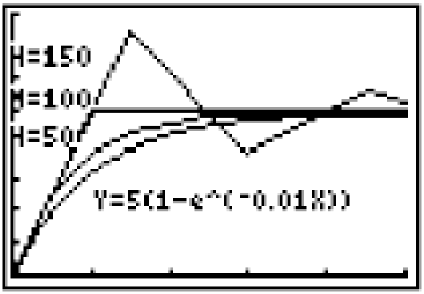


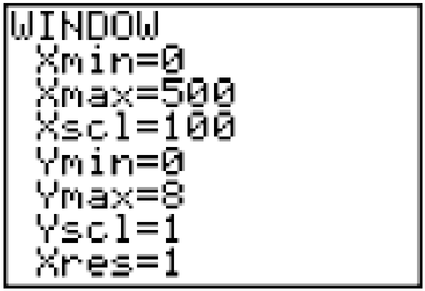
L1	L2	L3 2
0	0	0
50	2.5	150
100	3.75	300
150	4.375	450
200	4.6875	600
250	4.8438	750
300	4.9219	------

L2 ={0,2.5,3.75,…

L4	L5	L6 6
0	0	0
7.5	100	5
3.75	200	5
5.625	300	5
4.6875	400	5
5.1563	500	5
------	------	------

L6 ={0,5,5,5,5,5}





Conclusion

L’échange des approches de nos deux matières sur le thème des équations différentielles nous a permis d’une part d’apprécier la complémentarité des nouveaux programmes de Terminale Scientifique et d’autre part de proposer à nos élèves des activités qui tentent de rendre compte d’une démarche scientifique.

Il reste cependant quelques points de divergence et notamment la faible implication des théorèmes démontrés dans le cours de mathématiques dans les solutions de certaines questions posées en cours de sciences physiques.

Nous militons fortement pour que des discussions à plusieurs niveaux soient engagées afin que l’interdisciplinarité soit efficace et contribue à la réussite de nos élèves.

Sur le site académique de Rennes, à l’adresse

http://www.ac-rennes.fr/pedagogie/maths/gfrlyseq.htm,

plusieurs points abordés ici, ainsi que d’autres sur le même thème, ont été développés.