# À partir d'une question d'élève

## – et des R et *r* d'un triangle quelconque –

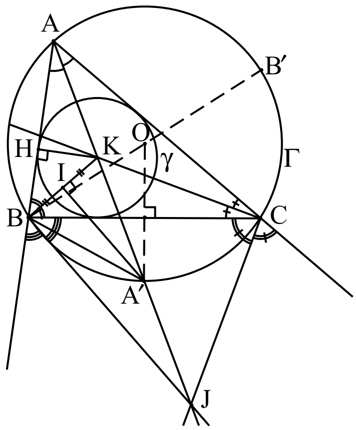
Henri Bareil

## I

Soit un triangle ABC – non aplati –, son cercle circonscrit Γ(O,R), son cercle inscrit $\gamma$(K,*r*). Un élève de Troisième de notre collègue Hugo Perez-Bercoff s'est enquis **d'une relation entre *r* et R**. Notre collègue en a proposé la recherche à toute la classe selon un problème dont voici la **trame**, *les calculs réclamés l'étant en fonction de* R *et des angles du triangle*.

Soit le diamètre BB′ de Γ.

La bissectrice de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ recoupe le cercle Γ en A′.




1. Étudier le triangle BB′A′ :
   – nature ;
   – expression de l'angle $\widehat{\text{BB}'\text{A}'}$ ;
   – calcul de BA′.
2. Étudier le triangle A′BK :
   – expression des angles … qui conduit à $\widehat{\text{KBA}'} = \widehat{\text{BKA}'} = \dfrac{\widehat{\text{A}} + \widehat{\text{B}}}{2}$ ;
   – nature ;
   – calcul de BK, avec I milieu de [BK].
3. Représenter *r*, par exemple par KH, H projeté orthogonal de K sur (AB).
   Le calcul de KH donne une (jolie) relation entre *r* et R.
   (Il s'agit de $r = 4\text{R}\sin\dfrac{\widehat{\text{A}}}{2}\sin\dfrac{\widehat{\text{B}}}{2}\sin\dfrac{\widehat{\text{C}}}{2}$).

## II. COMMENTAIRES

- Cette solution met en jeu des calculs trigonométriques simples dans le triangle rectangle, et éventuellement, au 2º, dans le triangle isocèle (partagé en deux triangles rectangles par son axe de symétrie). Elle utilise des théorèmes élémentaires classiques et le théorème des angles inscrits interceptant le même arc.
- Elle vaut que le triangle soit acutangle ou non.

- On retrouve, avec le cas particulier du triangle équilatéral, le $r = \frac{R}{2}$ directement calculable.
- Il apparaît, au 2°, que A′ est le centre du cercle BCK, cercle qui passe aussi par le centre J du cercle ex-inscrit dans l'angle A.
  En voici une autre démonstration : les triangles KBJ et KCJ sont rectangles, de même hypoténuse [KJ]. Donc K, B, J, C sont sur un même cercle de diamètre [KJ]. Son centre est sur la médiatrice de [BC], qui passe par A′. Quand AB ≠ AC, A′ est le seul point commun à cette médiatrice et [KJ], donc le centre du cercle, milieu de [KJ]. Le cas AB = AC relève d'un passage à la limite…
- La relation ci-dessus entre $r$ et R est peu classique et peu connue, mais répertoriée dans les traités de géométrie du triangle, ainsi celui de Trajan Lalesco (réédition Gabay).
  Celui-ci propose la démonstration suivante, qui met en jeu beaucoup plus de trigonométrie pour l'expression de $p$ (demi-périmètre du triangle) :
  - d'une part, $S = 2R^2 \sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}$.

    (déductible, par exemple de $S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$ et de $\frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R$) ;
  - d'autre part, $S = pr$.

    Or $p = R(\sin \widehat{A} + \sin \widehat{B} + \sin \widehat{C}) = 4R \cos \frac{\widehat{A}}{2} \cos \frac{\widehat{B}}{2} \cos \frac{\widehat{C}}{2}$.

    Comme $r = \frac{S}{p}$, en remplaçant $\sin \widehat{A}$, dans S, par $2 \sin \frac{\widehat{A}}{2} \cos \frac{\widehat{A}}{2}$, …

    on a : $r = 4R \sin \frac{\widehat{A}}{2} \sin \frac{\widehat{B}}{2} \sin \frac{\widehat{C}}{2}$.

## III. COMPLÉMENTS

### 1. AUTRE RELATION ENTRE R et $r$ (plutôt niveau Seconde) :

• On sait que

$$S = pr \qquad (1)$$

et que

$$a = 2R \sin \widehat{A},$$

d'où

$$abc = 2Rbc \sin \widehat{A},$$

c'est-à-dire

$$bc \sin \widehat{A} = \frac{abc}{2R} \qquad (2)$$

• D'autre part

$$S = \frac{1}{2}\, bc \sin \widehat{A} \qquad (3)$$

• D'où, en conjuguant (1) et (3) :

$$2\,pr = bc \sin \widehat{A} \qquad (4)$$

puis, en conjuguant (2) et (4) :

$$2\,pr = \frac{abc}{2R},$$

c'est-à-dire :

$$Rr = \frac{abc}{4p},$$

soit :

$$Rr = \frac{abc}{2(a+b+c)}.$$

*Remarque*. Cette formule est très proche d'une formule classique du triangle : $abc = 4RS$, directement issue de (2) et (3). Par $S = pr$, chacune des deux se déduit aussitôt de l'autre.

**2. RELATION D'EULER et généralisation aux coniques**

**Il s'agit de la relation :**

$$\boldsymbol{d^2 = R^2 - 2Rr}$$

(où, pour un triangle, R et $r$ sont les rayons respectifs des cercles circonscrit et inscrit, et $d$ la distance de leurs centres).

Classique, cette relation est proposée, au moins en exercice, dans de nombreux ouvrages de géométrie « traditionnelle ». Cf. aussi la brochure APMEP n° 145 « *Concours 2002* », Capes interne, pages 70-72, ou les « *Célèbres problèmes mathématiques* » d'Édouard Callandreau[(1)] (Albin Michel, 1949).

**En voici une démonstration, proposée par Bruno Alaplantive** à partir des questions 1 et 2 (les deux premières sous-questions) du travail d'Hugo Perez-Bercoff :

« On s'intéresse à la puissance $p$ de K par rapport au cercle $\Gamma$ :

– d'une part,

$$p = OK^2 - R^2,$$

– d'autre part,

$$p = \overline{KA} \times \overline{KA'} = -KA \times KA' = -KA \times BA' = -\frac{r}{\sin \frac{\widehat{A}}{2}} \times 2R \sin \frac{\widehat{A}}{2} = -2Rr.$$

D'où :

$$d^2 = R^2 - 2Rr \text{ ».}$$

(1) Tout ce qui concerne, ici, le Callandreau est un apport de Jean-Pierre Friedelmeyer.

• Le Callandreau, sus-mentionné, étend l'étude au cas où le triangle est remplacé par un **quadrilatère**, puis aux **configurations de Poncelet** lequel, dans son *Traité des propriétés projectives des figures* – 1822 – « *traite le cas général d'un polygone à la fois inscrit à une section conique et circonscrit à une autre* ».

**3. RÉCIPROQUE DE LA RELATION D'EULER**

**• Énonçons-la :**
**« Si l'on a, entre les rayons R, *r*, de deux cercles et la distance d de leurs centres, la relation**

$$d^2 = \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}r$$

**il existe une infinité de triangles inscrits dans le cercle de rayon R et circonscrits au cercle de rayon *r* ».**

Le Callandreau décompose ce théorème en deux (d'abord le cas d'un triangle – où, sans la donner, il déclare la démonstration « aisée » –, puis extension à une infinité).

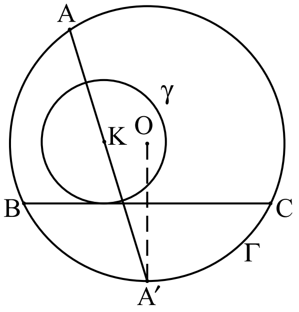
• Jean-Pierre Friedelmeyer en signale une **démonstration faisant appel à l'inversion**, donnée, par exemple, dans le Lespinard et Pernet de « Math-Élem » (1962, p. 407).

• **Bruno Alaplantive signale une autre démonstration, parue dans un manuel de Seconde** (P. Camman et A.G. Rebouis, *Géométrie plane*, Éd : Gigord, 1940. Programme de 1931) qui s'appuie sur un *théorème préliminaire* :
« La différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles est le double produit de la distance de leurs centres par la distance de ce point à leur axe radical » (démonstration : lycée).

*Cela étant*, soient les cercles Γ (O,R) et $\gamma$ (K,$r$) tels que

$$\mathrm{OK}^2 = \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}r \qquad (1)$$

*Étape 1* : En déduire que $\gamma$ est intérieur à Γ.
*Étape 2* : Soient (BC) tangente à $\gamma$ (cf. figure) et A′ milieu de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ du demi-plan de frontière (BC) qui ne contient pas $\gamma$.
Déduire de (1) que la puissance de K par rapport au cercle de centre A′ qui passe par B et C est nulle. D'où K sur ce cercle.
*Étape 3* : En conjuguant avec l'étude du début de l'article, en déduire que $\gamma$ est inscrit dans le triangle ABC (A étant le second point commun à Γ et (A′K)).




# IV. EN CONCLUSION DE L'ARTICLE

Merci aux divers intervenants : Jean-Pierre Friedelmeyer, Bruno Alaplantive, des auteurs de manuels, et, **surtout, Hugo Perez-Bercoff**, qui a si bien relayé une question d'élève… Puisse-t-il faire des émules !