

Numération entière à la charnière école-collège : comment diagnostiquer et combattre des difficultés résistantes.

Ghislaine Gueudet(*)

Nous présentons ici le travail d'un groupe de recherche⁽¹⁾ associant l'IUFM de Bretagne et l'IREM de Rennes. Ce travail a donné lieu à un atelier présenté lors des journées APM qui se sont tenues à Rennes en octobre 2002.

À l'entrée au collège, les difficultés liées à l'emploi de la numération décimale sont souvent évoquées par les enseignants ; elles ont donné lieu à de nombreux travaux de recherche en didactique. Cependant, pour certains élèves entrant en classe de sixième, les nombres entiers eux-mêmes posent encore problème. Comment alors repérer les élèves qui ont de telles difficultés, et quel travail mettre en place avec eux ? Ce sont les questions que notre groupe a étudiées, et pour lesquelles nous allons présenter ici des éléments de réponse.

1. Diagnostic

Ce texte ne suit pas le déroulement de l'atelier, pendant lequel nous avons proposé aux participants d'examiner des cahiers d'évaluation de CE2 et de sixième afin de repérer les items permettant d'évaluer des compétences liées à la numération entière. Nous dressons ensuite le bilan de ces compétences pour compléter en conséquence les évaluations afin de disposer d'un outil de diagnostic. Nous allons ici présenter directement les différentes compétences, mais également des biais que l'on rencontre dans l'enseignement habituellement pratiqué. Nous montrerons ensuite comment établir une évaluation suffisamment complète, et présenterons brièvement certaines productions d'élèves, qui nous serviront de point de repère pour la mise en place des situations présentées dans la partie 2.

1.1. L'enseignement de la numération entière

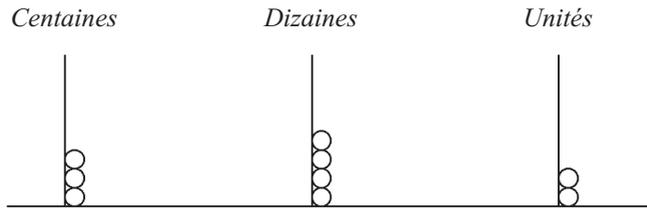
Dès 1984, Nadine Bednarz et Bernadette Janvier mènent au Québec une étude sur la numération entière. Elles relèvent dans l'enseignement habituellement pratiqué des caractéristiques, au nombre de sept, qui vont engendrer des difficultés pour les élèves. Ces caractéristiques sont également présentes dans l'enseignement pratiqué en France, encore de nos jours. En voici deux exemples – la liste complète des sept caractéristiques est donnée en annexe – :

(*) IUFM de Bretagne et DidmaR.

(1) Pour l'année 2001-2002, le groupe (Groupe Innovation Production 154) était composé de : Bettina Madec et Sylviane Guillot, toutes deux maîtres E et travaillant au RASED (Réseau d'Aides Spécialisées aux Élèves en Difficulté), Dominique Moutounet (Segpa), Brigitte Moulinet (collège), Daniel Nigaut (MGI), Gérard Pascual (EREA), Gabriel Le Poche et Ghislaine Gueudet, formateurs à l'IUFM de Bretagne.

– « Toute représentation d'un nombre apparaît selon un alignement reprenant l'ordre de l'écriture conventionnelle du nombre. »

Ainsi le matériel comportant des tiges sur lesquelles pourront être enfilées des billes est le plus souvent utilisé en respectant l'ordre de l'écriture du nombre :



Un élève qui voit ce matériel peut écrire que le nombre représenté est 3 4 2, sans faire le lien entre cette écriture mécanique et un nombre susceptible de représenter une quantité (de plus la hauteur des tiges, dans ce genre de matériel, est souvent limitée, de manière à ne pouvoir y placer que 9 billes !).

– « L'enseignement de la numération est détaché de celui des quatre opérations. »

Toutes les techniques opératoires que l'élève doit apprendre à l'école primaire requièrent une bonne maîtrise de la numération entière, et notamment la compréhension de la valeur représentée par un chiffre placé dans une position donnée. Donnons un exemple pour illustrer notre propos.

Lorsqu'on demande à des élèves de CE2 d'effectuer une addition qu'ils doivent poser eux-mêmes et qui porte sur des nombres n'ayant pas le même nombre de chiffres, apparaît une difficulté spécifique, fortement liée à la numération. Certains élèves ont en effet retenu une disposition en tableau, la première et la dernière colonne du tableau devant être remplies. Ils n'hésitent donc pas à « écarter » des chiffres, en laissant des trous qui seront traités comme des zéros dans l'addition. Ceci peut les conduire à écrire :

$$\begin{array}{r} 6 \quad 8 \\ + 5 \quad 4 \quad 7 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 5 \quad 5 \end{array}$$

Inversement, la connaissance de l'addition, de la multiplication, ... contribue aussi à conférer du sens aux écritures chiffrées.

Ainsi les choix d'enseignements eux-mêmes peuvent encore actuellement être source de difficultés pour les élèves (même si le travail de Bednarz et Janvier a contribué à des modifications positives de ces choix).

Par ailleurs les exemples cités montrent que la numération comporte des aspects très divers, dont il faudra tenir compte pour le diagnostic. Le tableau ci-dessous recense les principaux éléments qui devront être évalués.

| Numération : aspect outil | Numération : aspect objet | |
|--|--|---|
| | Algorithmique | Sémantique |
| <ul style="list-style-type: none"> – Techniques opératoires – Calcul mental – Ordres de grandeur – Classement de nombres | <ul style="list-style-type: none"> – Trouver le successeur, le prédécesseur – Compter ou décompter de 10 en 10 | <ul style="list-style-type: none"> – Passer des chiffres aux mots-nombres et inversement – Écrire en chiffres un nombre donné en unités, dizaines, centaines – Reconnaître un nombre donné par différentes écritures |

Une distinction fondamentale est celle qui existe entre les aspects objets et les aspects outils de la numération (Régine Douady 1992). Mais il faut également distinguer numération orale : mots-nombres, et numération écrite : chiffres, ce qui induit dans le tableau ci-dessus des distinctions qui n’y sont pas explicitement mentionnées.

1.2. Diagnostiquer les difficultés

Les évaluations nationales de CE2 et de Sixième constituent un premier outil de diagnostic.

Cependant elles doivent être complétées, tout d’abord parce qu’il est rare qu’elles couvrent les neuf aspects recensés dans le tableau ci-dessus, et également parce qu’elles sont conformes aux caractéristiques de l’enseignement mises à jour par Bednarz et Janvier, et doivent donc être enrichies en exercices atypiques. Nous donnons ci-dessous l’exemple d’un jeu d’items que nous avons proposés à des classes allant de la sixième à la troisième, dans les filières habituelles, mais également en SEGPA et à l’EREA.

Exercice 1

Consigne : Cet exercice est un exercice de calcul mental. Je vous lirai le calcul 2 fois, puis je vous laisserai 15 secondes pour répondre. « Écrivez le résultat de : Trente-trois plus vingt-sept ».

Exercice 2

- *Consigne : « Écrivez en chiffres le nombre qui suit quatre-vingt dix-huit. »*
- Écris en lettres le nombre qui précède 1100.

Exercice 3

Calcule en posant l’addition : $1\ 285 + 625$

Exercice 4

Calcule, en posant la soustraction, $937 - 46$

Exercice 5

Parmi les nombres proposés, entoure la réponse qui te semble la meilleure :

La somme $3\ 641 + 23\ 250$ est proche de

5 500

6 000

15 000

30 000

50 000

Exercice 6

Ecris en chiffres le nombre constitué de 12 dizaines, 43 unités et 1 centaine.

Exercice 7

On a placé deux nombres dans un tableau.

| | | | | | | | |
|--|--|-----|--|--|-----|--|--|
| | | 550 | | | 650 | | |
|--|--|-----|--|--|-----|--|--|

Place dans les cases les cinq nombres suivants, du plus petit au plus grand :

684 92 560 68 608

Exercice 8

Entoure les écritures qui désignent le nombre 4 872 :

$$40 + 80 + 72 \quad (48 \times 100) + 2 + (10 \times 7) \quad 4860 + 12$$

$$800 + 2 + 4070 \quad 4800 + 7 + 2$$

L'énoncé de l'exercice 6 est totalement différent des énoncés que l'on rencontre habituellement sur cet aspect (numération objet, aspect sémantique). Il a mis tous les élèves en difficulté (19 échecs sur 23 élèves dans une classe de cinquième !). L'erreur la plus fréquemment rencontrée est celle qui consiste à reprendre l'ordre donné et écrire ainsi « 12 431 » ; d'autres élèves remettent dans l'ordre centaines, dizaines, unités mais ne font pas de conversions et écrivent « 11 243 ».

L'exercice 8 a lui aussi posé problème à de nombreux élèves. En effet nous avons choisi de ne pas proposer la décomposition canonique du nombre 4 872, et certains élèves se sont attachés plus à l'ordre de l'écriture des chiffres qu'aux valeurs représentées.

L'échec à de tels exercices n'indique pas que l'élève est en difficulté ; il témoigne simplement des biais introduits par les choix d'enseignement.

2. Des situations pour donner du sens au nombre

Le diagnostic permet d'identifier deux types de difficultés. D'une part certains élèves, par ailleurs généralement faibles en mathématiques, rencontrent des difficultés presque systématiquement face à des tâches qui dépassent un simple aspect technique. C'est le cas lorsqu'il s'agit de trouver le prédécesseur de 1 100 : la technique qui consiste à remplacer le chiffre u des unités par $(u - 1)$ ne s'applique plus. Il faut modifier le chiffre des dizaines, et même celui des centaines ; cette tâche est donc beaucoup plus délicate que celle qui consisterait à trouver le prédécesseur de 1 123, par exemple.

Mais on a également observé des difficultés rencontrées par tous les élèves, qui sont dues aux choix faits habituellement pour l'enseignement de la numération. C'est pourquoi nous allons présenter deux situations radicalement différentes : l'une à l'intention d'élèves en grande difficulté pour lesquels l'écriture des nombres entiers semble tout simplement dénuée de sens. L'autre en revanche requiert d'emblée une certaine habileté en numération, mais elle oblige à sortir des schémas traditionnels de décomposition du nombre. Elle peut être pratiquée avec des élèves de collège ou même de lycée.

2.1. Le jeu du trésor : redonner du sens grâce au matériel

2.1.1. Description du jeu

Il s'agit ici de remédier à des difficultés portant sur l'aspect sémantique de la numération écrite usuelle, et de donner à l'élève l'occasion d'attribuer un sens à chaque chiffre constitutif de l'écriture d'un nombre. Un des choix qui nous semble particulièrement important est l'emploi de plusieurs types de matériels de numération.

LA SITUATION

C'est une situation de jeu de hasard entre trois équipes de joueurs (une équipe peut comporter elle-même de 1 à 3 joueurs).

L'enjeu est d'obtenir le plus de points après plusieurs tours de jeu (nombre de tours convenu à l'avance) constituant une partie.

Les points sont obtenus en jetant simultanément trois dés de couleurs différentes : ceux-ci rapportent respectivement unités, dizaines et centaines de points.

Les élèves récupèrent dans une banque, à chaque tour de jeu, le matériel qui correspond à leurs scores aux dés.

À la fin d'une partie les élèves comptabilisent le total de leurs points en s'appuyant dans un premier temps sur le matériel obtenu, puis sur un calcul effectué à partir des données chiffrées (scores aux dés, qui ont été notés sur une feuille de route). Chaque équipe doit calculer son propre score, mais aussi le score des autres équipes, afin de déterminer l'équipe gagnante. On peut ensuite opérer une vérification en comparant d'une part les décomptes des trois équipes, et d'autre part le score trouvé par le matériel et celui trouvé par le calcul.

Une description détaillée du jeu peut être trouvée dans (Le Poche 1997).

MATÉRIELS DE NUMÉRATION UTILISÉS POUR COMPTABILISER LES SCORES

Il existe différents types de matériel de numération employés dans l'enseignement, correspondant à différents niveaux d'abstraction. Nous décrivons ici brièvement le matériel qu'il nous a semblé intéressant d'utiliser pour des expérimentations. Pour une description plus complète des différents types de matériels, voir par exemple (Charnay et Mante 1995).

Matériels de type – les « uns » qui se regroupent en restant visibles – type 1.

Dans ce type de matériel, la dizaine est constituée par dix unités rassemblées d'une manière qui les laisse apparentes et qui permet de scinder la dizaine pour retrouver l'unité initiale.

Nous avons utilisé un matériel de ce type, constitué d'allumettes qui représentaient les unités et étaient rassemblées à l'aide d'élastiques pour former les dizaines. Les bûchettes de dix allumettes étaient ensuite elles-mêmes rassemblées avec des élastiques pour former les centaines, etc.

Matériels de type – les « uns » qui s'échangent mais restent visibles – type 1 bis. (utilisé dans une variante à la place du précédent).

Ici les unités sont comme ci-dessus rassemblées de manière visible pour former les dizaines, mais ces dernières ne peuvent plus être scindées. Le matériel correspondant

était pour nous constitué de petits cubes unités. Les dizaines étaient des barres sur lesquelles des encoches matérialisaient la présence de dix cubes ; les centaines étaient des plaques, et les milliers de gros cubes, toujours portant les encoches qui matérialisent les unités.

Matériels de type – les « uns » qui disparaissent mais laissent une trace symbolique – type 2.

Le choix est celui de billets identiques sur lesquels sont inscrits les symboles 1, 10, 100 et 1000. La présence de l'unité « dans » la dizaine est mise en évidence par le nombre 10 écrit sur le billet qui constitue la dizaine.

Matériels de type – les « uns » qui disparaissent et se transforment en un autre « un » en changeant de couleur – type 3.

Le choix est celui de jetons de différentes formes et tailles, mais ayant en commun une couleur identique qui en fixe la valeur. Par exemple, le jeton jaune constitue l'unité ; le vert sera la dizaine, le bleu la centaine et le rouge le millier. Ici le regroupement n'est pas visible, ni même symbolisé. La seule référence possible est la liste des codes de couleur. Ce matériel se révèle d'ailleurs à l'usage difficile d'emploi ; son apport pour la construction du sens des écritures chiffrées nous a semblé discutable.

LES ÉLÉMENTS VARIABLES

Le choix du dé multifaces : c'est le paramètre fondamental de la situation.

Le jeu est pratiqué successivement avec des dés « à trois faces » et des dés à vingt faces.

Les trois dés à six faces, avec les chiffres 1, 2 et 3 répétés deux fois, permettent la constitution d'un trésor individuel dont le nombre d'éléments de chaque espèce (unités, dizaines et centaines) sera à la fin de la partie compris entre 3 et 9 (ajout des trois scores de chaque dé obtenus après trois tours de jeu).

Cette configuration facilite l'exactitude du comptage : le passage de la valeur du matériel à l'écriture du nombre de points est direct. Il suffit de repérer l'ordre centaines, dizaines, unités car toutes les espèces sont représentées.

Les dés « à trois faces » servent à l'appropriation du jeu par les élèves : compréhension des consignes, premiers essais de comptage, ...

Le choix des trois dés à 20 faces numérotées de 1 à 20 augmente la probabilité d'avoir, en fin de partie, un nombre d'éléments, d'une espèce déterminée, supérieur à 10. Cette situation obligera l'élève à organiser les éléments de son trésor par paquets de dix – acte fondamental dans la compréhension de la numération – s'il veut dénombrer efficacement.

Notre hypothèse est que l'utilisation des dés à vingt faces, amenée par le maître une fois que le jeu a été bien compris provoquera, chez les élèves, les apprentissages recherchés.

Le choix du type de matériel.

Il n'est pas laissé à l'initiative de l'élève.

Il peut être judicieux d'attribuer le matériel de type 1 ou 1 bis à l'élève qui a le plus de difficultés, afin qu'il obtienne plus facilement un résultat exact dans le comptage de son propre trésor.

Le choix de la couleur des dés

Nous voulons éviter les couleurs traditionnelles de l'école : rouge pour les dizaines et vert pour les centaines.

2.1.2. Observations

La situation du jeu du trésor a été expérimentée en CE2, en sixième SEGPA et en cinquième à l'EREA. Nous ne mentionnons ici que les principales observations que nous avons réalisées.

- Pas de réticence à l'égard du matériel : même les élèves plus âgés (certains élèves de cinquième étaient âgés de 16 ans) ont volontiers accepté de manipuler le matériel. Quelquefois la manipulation a entraîné des conflits, en particulier dans les moments où il s'agissait de contrôler la bonne foi d'une équipe adverse. Cependant les groupes étaient globalement autonomes, la situation peut être réalisée avec une classe entière et un seul enseignant – mais il faut avoir prévu suffisamment de matériel – !
- Le recours spontané des élèves aux échanges pour dénombrer le trésor dépend fortement du type de matériel. Les échanges de dix objets contre un représentant un nombre dix fois plus grand ont été mis en œuvre très progressivement :
 - En premier, dans les groupes utilisant les allumettes ou les cubes et d'abord pour échanger dix centaines contre un gros « Mille ». Est-ce l'effet visuel de la taille de ces objets ou l'impossibilité de l'obtenir directement par tirage ? Puis, dans l'ordre, dix dizaines pour une centaine et dix unités pour une dizaine.
 - En second les échanges sont apparus dans les groupes utilisant les tickets et ce dans le même ordre que précédemment.
 - Par contre, les groupes utilisant les jetons n'ont jamais montré l'intention d'effectuer des échanges.
- Dans le calcul du trésor utilisant les résultats notés au fur et à mesure du lancer de dés, les élèves n'ont pas pris en compte dans un premier temps la valeur des dés. Les résultats étaient notés dans trois colonnes, et nous avons pris soin de ne pas faire correspondre l'ordre des colonnes avec l'ordre centaines, dizaines, unités. Les élèves ont tous spontanément conservé l'ordre de l'écriture et fait les additions correspondantes. C'est seulement lorsqu'ils observaient que le résultat obtenu était différent de celui issu du décompte du matériel qu'ils réalisaient leur erreur.

La situation s'est donc déroulée de manière satisfaisante ; elle a permis aux élèves, grâce au matériel, de donner du sens aux groupements. D'autre part la double procédure pour le comptage du trésor leur a montré l'importance de l'ordre de l'écriture d'un nombre : on ne peut pas simplement additionner les affichages des dés dans l'ordre où ceux-ci sont donnés. Dans la classe de SEGPA, aucun élève n'avait réussi en début d'année l'exercice 6 : « Écris en chiffres le nombre constitué de 12 dizaines, 43 unités et 1 centaine ». Même si cette observation est à prendre avec précautions, quelques semaines après l'organisation du jeu en classe, le même exercice a été réussi par 10 élèves sur 14.

2.2. Le jeu des étiquettes : sortir des décompositions traditionnelles

Aux caractéristiques de l'enseignement de la numération relevées par Bednarz et Janvier, nous pouvons ajouter celle-ci : « la décomposition additive d'un nombre la plus fréquemment rencontrée est sa décomposition canonique ». Dans le jeu des étiquettes, on choisit au contraire d'obliger les élèves à trouver d'autres décompositions du nombre en unités, dizaines, centaines, ...

2.2.1. Présentation du jeu

C'est une situation de **recherche de décompositions additives d'un nombre**.

Un nombre entier est écrit au tableau par l'enseignant. Il s'agit de reconstituer ce nombre de manière additive en utilisant un lot de nombres autorisés.

La recherche s'effectue en temps limité par des équipes de trois joueurs, les différentes équipes sont en compétition.

L'enjeu est de gagner en obtenant le plus de points après plusieurs tours de jeu (nombre de tours convenu à l'avance) constituant une partie.

Un point est attribué à chaque décomposition exacte ; un point est retiré par décomposition fautive. Une équipe qui est la seule à avoir trouvé une décomposition donnée marque 2 points.

2.2.2. Matériel

Des étiquettes :

Un jeu de trois séries de cartes (rouge, bleu et jaune) sur lesquelles figurent d'un côté une valeur de 1 à 26 et de l'autre côté la lettre de l'alphabet correspondante.

La série rouge représente les unités, la série bleue les dizaines et la série jaune les centaines.

2.2.3. Déroulement

Au début de chaque tour de jeu, le professeur attribue à chaque équipe un même lot restreint d'étiquettes choisies dans le stock initial et qui seront les seules permises.

Pour qu'une décomposition soit licite, il faut qu'elle soit réalisée à partir des étiquettes du lot restreint. Les parties se font en temps limité (à régler suivant le public ; environ 3 min pour une classe de sixième).

Exemple 1 :

| Nombre proposé | Tirages | Décompositions attendues |
|----------------|--|--|
| 102 | Étiquette bleue : A, I, J Étiquette Rouge : A, B Étiquette jaune : A | $1 c + 2 u$ $10 d + 2 u$ $9 d + 1 d + 2 u$ |

Dans cet exemple, la décomposition canonique n'est pas bloquée. Il peut servir à l'appropriation du jeu.

Exemple 2 :

| Nombre proposé | Tirages | Décompositions attendues |
|----------------|--|--|
| 112 | Étiquette bleue : I, K Étiquette Rouge : B, G, O, V | $9 d + 22 u$ $9 d + 15 u + 7 u$ $11 d + 2 u$ |

Dans cet exemple, le choix de cartes empêche la décomposition canonique. Cependant la décomposition : 11 dizaines et 2 unités reste simple.

Le jeu a rencontré un bon accueil auprès des élèves de sixième avec lesquels nous l'avons testé. Ceux-ci étaient motivés par l'enjeu du score. Ils ont rencontré des difficultés lorsque la décomposition canonique a été bloquée pour la première fois. Mais lorsque cet obstacle a été franchi, ils ont été capables de trouver de nombreuses décompositions (cependant il valait mieux que le nombre de cartes fournies reste inférieur à 6). La séance a été terminée par quelques parties sans matériel.

Il ne s'agit ici bien entendu que de deux exemples d'activités qui peuvent être pratiquées avec les élèves. Elles permettent selon nous de montrer qu'un travail sur le nombre entier positif, même au collège, peut être entrepris utilement et sans rebuter les élèves. Ces situations, selon les variables choisies, peuvent être utilisées à de nombreux niveaux scolaires.

Conclusion

Rappelons pour conclure les points importants de notre démarche. L'apprentissage de la numération entière est délicat, et requiert une véritable attention au-delà du cycle 2 de l'école primaire. Il existe en numération entière deux types de difficultés. Des difficultés que ne rencontrent que certains élèves, pour lesquels il sera nécessaire de prévoir une remédiation spécifique. Et des difficultés qui concernent tous les élèves, ou du moins une majorité d'entre eux, et qui sont, pour partie, des conséquences du mode d'enseignement de la numération.

Pour le premier type de difficulté, il est nécessaire de prévoir un outil de diagnostic afin d'identifier les élèves pour lesquels un travail spécifique doit être mis en place. Pour le second type, un travail en classe entière peut être prévu.

Nous avons proposé un exemple de situation correspondant à chacun des deux types de difficultés ; ces situations ont été bien reçues par les élèves dans différents types de classes.

Nous avons ici fait de plus le choix de situations utilisant un matériel pédagogique adapté à la notion en jeu, et autant que possible varié. L'emploi de matériel peut aider les élèves en grande difficulté à redonner du sens aux notions mathématiques. Cependant il est essentiel d'utiliser différents types de matériel pour permettre aux élèves de progresser dans l'abstraction.

ANNEXE

Les sept caractéristiques de l'enseignement de la numération au Québec qui peuvent entraîner des difficultés pour les élèves, telles qu'elles ont été relevées par Bednarz et Janvier (1984) :

C1 : Grande insistance mise sur le passage de l'écriture symbolique du nombre « chiffre position » à la symbolisation « unités, dizaines, centaines ».

C2 : Toute représentation d'un nombre apparaît selon un alignement reprenant l'ordre de l'écriture conventionnelle du nombre.

C3 : Les images du matériel et même le matériel utilisé dans l'enseignement le sont essentiellement à des fins de passage à l'écriture.

C4 : La manipulation du matériel est essentiellement conçue en fonction du travail sur l'écriture.

C5 : Une conception de la complexité du travail sur les nombres fondée exclusivement sur leur taille.

C6 : Le travail dans différentes bases se veut un support à la compréhension de notre système de numération.

C7 : L'enseignement de la numération est détaché de celui des quatre opérations.

BIBLIOGRAPHIE

Bednarz N. et Janvier B. (1984) *La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage*, Grand N n° 33.

Bednarz N. et Janvier B. (1984) *La numération : une stratégie didactique pour une meilleure compréhension*, Grand N n° 34.

Butlen D. et Pedzard M. (1992) *Situation d'aide aux élèves en difficulté et gestion de classe associée*, Grand N n° 50.

Charnay R., Mante M. (1995) *Concours de professeur des écoles, mathématiques*, tome 2, Hatier.

Douady, R. (1992) *Les apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement*, Repère IREM vol. 6.

Le Poche G. (1997) *Une remédiation en numération auprès d'élèves en difficulté*, document Copirelem.