Les problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.
Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes », … si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice. La rubrique s'efforce de rendre compte de la pluralité des méthodes proposées par les lecteurs, des généralisations des problèmes… Entre la publication d'un énoncé et la publication de sa solution, un bulletin intermédiaire fournira des pistes pour faciliter l'étude du problème et rendre la rubrique davantage accessible.
Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Solutions et énoncés sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,
9 quai de la Seine,
75019 Paris.

Indications sur des énoncés déjà publiés

Énoncé 300 (*si* $\Sigma\, a(d) = 2^n$, $a(n)$ *est divisible par* n) :
Soit p un facteur premier de n…

Énoncé 301 ($f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) = f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)$ *si* $\alpha + \beta + \gamma = \pi$) :
Utilisons la fonction tangente...

Énoncé 302 (101 *pièces … toutes de même masse ?*) :
Quel est le rang de la matrice ?

Nouveaux énoncés

Énoncé n° 303 (R. FERACHOGLOU et M. LAFOND, 21-Dijon)

Soit (Q) un quadrilatère plan convexe, dont les sommets distincts A, B, C, D sont dans cet ordre et dans le sens direct. On joint A au milieu de [BC], B au milieu de [CD], C au milieu de [DA] et D au milieu de [AB]. Ces quatre droites déterminent un nouveau quadrilatère (q).

Démontrer que : aire(Q) / aire(q) est compris entre 5 et 6 (6 exclu).

Énoncé n° 304 (Pierre SAMUEL, 92-Bourg la Reine)

Dans le cas particulier où $n-2$ est un nombre premier impair p, montrer que l'équation diophantienne : $2x^2+1=y^n$ $(n>2)$ n'admet, hormis la solution triviale $x=0$, $y=1$, que la solution $n=5$, $x=11$ et $y=3$.

Solutions

Énoncé n° 293 (Michel LAFOND, 21-Dijon)

Démontrer que le nombre de triangles inégaux de périmètre n à côtés entiers et non aplatis est égal au nombre de manières de payer $(n-3)$ euros avec des pièces de 2, 3 ou 4 euros.

SOLUTION

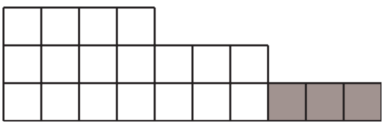
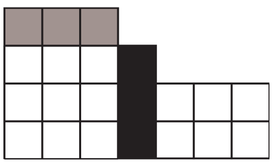
Le nombre de triangles inégaux non aplatis, de périmètre n, à côtés entiers est égal au nombre de triplets (a, b, c) tels que : $1 \leq a \leq b \leq c$, $a+b+c=n$ et (inégalité triangulaire) $c<a+b$. On peut donc poser : $a=1+t$, $b=a+x$, $c=b+z$, où t, x et z sont des entiers positifs ou nuls. Compte tenu de l'inégalité triangulaire $a+b>c=b+z$, soit $1+t>z$, on peut encore poser $t=z+y$, de sorte que x, y et z, entiers positifs ou nuls, vérifient : $2x+3y+4z=n-3$. À tout triangle non aplati, de périmètre n, à côtés entiers, on peut donc associer une manière de payer $(n-3)$ euros avec x pièces de 2 euros, y pièces de 3 euros et z pièces de 4 euros, en posant : $x=b-a$, $y=(a-1)-(c-b)$, $z=c-b$. Réciproquement, à toute manière de payer $(n-3)$ euros avec x pièces de 2 euros, y pièces de 3 euros et z pièces de 4 euros on peut associer le triangle non aplati, de périmètre n, à côtés entiers : $a=1+z+y$, $b=1+z+y+x$, $c=1+2z+y+x$.

Parmi les 17 réponses reçues, de Michel BATAILLE (76-Rouen), Richard BECZKOWSKI (71-Chalon s/Saône), Pierre BORNSZTEIN (78-Maisons Laffitte), E. BRUNETON (13-Aix en Provence), Jean-Claude CARREGA (69-Lyon), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Richard CHOULET (14-Avenay), Alain CORRE (03-Moulins), Jean-Christophe LAUGIER (17-Rochefort), Frédéric de LIGT (17-Montguyon), Georges LION (98-Wallis), René MANZONI (76-Le Havre), Jean-Louis NICOLAS (69-Villeurbanne), G. PRIGENT (93-Dugny), Pierre RENFER (67-Ostwald), Ivan RIOU (17-La Rochelle) et Eric TROTOUX (14-Caen), beaucoup s'intéressent au dénombrement explicite de ces triangles. Soit en étudiant la série génératrice : $\dfrac{x^3}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$ qui se décompose en éléments simples, soit en dénombrant explicitement à l'aide de parties entières, soit en remarquant plus simplement, comme le propose Michel Bataille, que le nombre t_n de ces triangles vérifie : $t_n = t_{n-3}$ si n est pair, $t_n = t_{n-3} + \left\lceil \dfrac{n+1}{4} \right\rceil$ si n est impair.

En effet, à tout triangle (a, b, c) vérifiant : $1 \leq a \leq b \leq c$ avec en outre $c < a + b - 1$ (donc $a > 1$ et $(c - 1) < (a - 1) + (b - 1)$), on peut faire correspondre un triangle $(a - 1, b - 1, c - 1)$. Seuls les triangles $\left(a, b, \frac{n-1}{2}\right)$ ne vérifient pas cette condition supplémentaire : il y en a $\left[\frac{n+1}{4}\right]$ si n est impair, 0 sinon. Donc pour $n = 2k$, $t_{2k} = t_{2k-6} + \left[\frac{k-1}{2}\right]$, et comme, pour tout entier k, $\left[\frac{k-1}{2}\right] + \left[\frac{k+2}{2}\right] = k$, $t_{2k+6} - \frac{(2k+6)^2}{48} = t_{2k-6} - \frac{(2k-6)^2}{48}$, ce qui permet d'affirmer, au vu des premières valeurs de t_{2k}, que t_n est toujours l'entier le plus voisin, pour n pair, de $\frac{n^2}{48}$, et pour n impair, de $\frac{(n+3)^2}{48}$ (donc également de $\frac{n^2+6n}{48}$, car un carré pair est congru à 0, 4, 16 ou 36 modulo 48).

Plusieurs lecteurs citent l'*Analyse combinatoire* de Louis Comtet (Presses Universitaires de France), tome 1, exercice 7, p. 88, mais également Moisotte, *1850 exercices de mathématiques pour l'oral du CAPES* (Dunod Université), chapitre 2, exercice 6.6, p. 10. Richard Choulet s'interroge sur l'expression « triangles inégaux » : scalènes ou distincts ? G. Prigent interprète ce nombre de triangles comme le nombre de points entiers intérieurs à un domaine triangulaire ABD, avec (AB) d'équation : $x + 2y = n$, (BD) : $x = y$ et (AD) : $x + y = \frac{n}{2}$, les côtés AB et BD étant inclus et AD exclu. L'aire de ce triangle est bien $\frac{n^2}{48}$.

Enfin, s'inspirant de la brochure APMEP n^o 129, *Arithmétique* de Mathieu Savin (p. 73 à 77), Alain CORRE signale une démonstration graphique : si l'on représente un triangle solution par trois lignes de a, b et c carreaux, l'inégalité triangulaire se traduit par le fait que les carrés de la plus longue ligne qui débordent celle d'avant sont moins nombreux que les carrés de la plus courte ligne. En déplaçant ces carrés au dessus de la ligne la plus courte, on obtient x colonnes de 4 carrés, y de 3 carrés et z de 2 carrés, pour au total le même nombre de carrés, mais avec $y \geq 1$.

Énoncé n° 296 (Raymond RAYNAUD, 04-Digne)

Les parallèles à une droite (*d*) menées par les sommets d'un triangle ABC recoupent respectivement son cercle circonscrit en A′, B′, C′. P étant un point quelconque du cercle, les droites (PA′), (PB′), (PC′) coupent respectivement les droites (BC), (CA), (AB) en A″, B″, C″. Démontrer que ces trois points sont alignés.

SOLUTION

Les 25 solutions reçues, de Michel BATAILLE (76-Rouen), Maurice BAUVAL (78-Versailles), Richard BECZKOWSKI (71-Chalon s/Saône), Gaston BOUEZ (75-Paris), Alain BOUGEARD (93-Les Lilas), Jacques BOUTELOUP (76-Rouen), E. BRUNETON (13-Aix en Provence), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Alain CORRE (03-Moulins), Philippe DELEHAM (Nouvelle Calédonie), Edgard Delplanche (94-Créteil), Christian DUFIS (87-Limoges), Christine FENOGLIO (69-Lyon), Michel HÉBRAUD (31-Toulouse), Géry HUVENT (59-Hem), Joël KIEFFER (54-Xivry Circourt), Frédéric de LIGT (17-Montguyon), Georges LION (98-Wallis), René MANZONI (76-Le Havre), A. MARCOUT (10-Ste Savine), A. MOLARD (67-Strasbourg), Pierre NOÉ (13-Marseille), Charles NOTARI (31-Montaut), G. PRIGENT (93-Dugny) et Pierre RENFER (67-Ostwald), attestent l'intérêt des lecteurs pour les beaux problèmes de géométrie, abordables sous divers angles et généralisables de plusieurs manières.

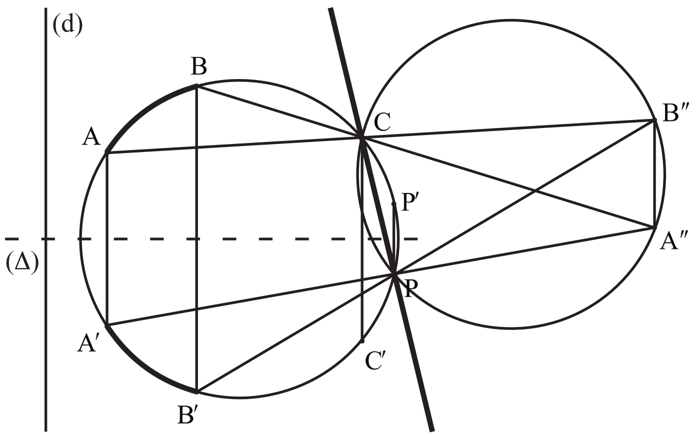
Majoritairement, à 40 %, vous avez fait appel aux angles inscrits pour prouver que P, C, A″ et B″ sont cocycliques : les cordes parallèles AA′, BB′ et CC′ ont même médiatrice (Δ), et la symétrie par rapport à (Δ) envoie P en P′ tel que :

$$(PA', PB') = -(P'A, P'B) = (CB, CA).$$

Il en résulte que

$$(A''P, A''B'') = (CP, CB'') = (A'P, A'A)$$

car P, C, A et A′ sont eux aussi cocycliques, et (CB″) = (CA). Comme (A″P) = (A′P), (A″B″) est parallèle à (A′A) donc à (d), et on peut en dire autant de (B″C″) et (C″A″) : les trois points sont sur une droite parallèle à (*d*).



Mais cette méthode est suivie de près par le théorème de Pascal : si 6 points – par exemple A, A′, P, B′, B et C – sont sur un même cercle, les trois intersections de côtés opposés de l’hexagone – en l’occurrence : (AA′) ∩ (B′B), (A′P) ∩ (BC) et (PB′) ∩ (CA) – sont alignées. Comme (AA′) // (BB′) // (d), on en déduit que (A″B″) est lui aussi parallèle à (d). À propos de ce théorème – que l’on peut démontrer, par exemple, en considérant les six points cocycliques comme l’intersection d’un cercle avec les côtés d’un triangle MNQ : en multipliant les relations de Ménélaüs vérifiées par les trois points d’intersection M′, N′ et Q′, les puissances de M, N et Q par rapport au cercle se simplifient et il reste une relation de Ménélaüs prouvant l’alignement de M′, N′, Q′ –, plusieurs ouvrages sont cités : Deltheil-Caire, p. 227 ; Marcel Berger : *Géométrie 2* (Nathan, 1990), p. 275 ; G. Papelier, *Exercices de géométrie moderne* (Vuibert, 1938), chapitre IX (géométrie projective), exercice 66 p. 40.

Même la géométrie analytique (Christine Fenoglio, G. Prigent), ou mieux, le plan complexe (Gaston Bouez, Géry Huvent), avec (d) verticale ou horizontale, permettent sans peine de résoudre notre problème. Sans parler des méthodes d’antan : l’homographie qui transforme A″ en B″ (Raymond Raynaud, Christian Dufis), ou bien le produit des involutions de centres A″ et B″ (Joël Kieffer). Voir par exemple les ouvrages de Samuel (PUF) ou Gramain (Hermann).

Déjà notre première méthode peut être étayée par des résultats plus ou moins classiques. Raymond Raynaud et Christian Dufis expriment que P, C, A″, B″ sont cocycliques en disant que (PC) et (A″B″) sont antiparallèles par rapport à (CA″) et (B″P) – les bissectrices ont même direction –. Michel Hébraud évoque le théorème de Miquel : si les quatre quadrilatères PAB″C″, PBC″A″, PCA″B″ et PABC sont inscriptibles, A″, B″, C″ sont alignés (P est le point de Miquel du quadrilatère complet ABCA″B″C″). Jacques Bouteloup s’appuie sur le théorème de Simson généralisé : P étant sur le cercle circonscrit à ABC, les pieds des droites (PA″), (PB″) et (PC″) faisant un même angle avec (BC), (CA) et (AB) sont alignés, et Charles Notari fait remarquer que c’est une similitude de centre P qui transforme la vraie droite de Simson de P en cette droite de Simson généralisée. A. Marcout remarque quant à lui que la similitude de centre P qui transforme B en C transforme le triangle PBC″ en un triangle semblable, PCB″, donc C″ en B″.

Les cas particuliers attirent l’attention de certains lecteurs : si P est en A, ou si (AB) // (d), mais aussi si (PA′) // (BC) auquel cas, vu la relation

(PA′, PB′) = (CB, CA),

(PB′) et (CA) sont eux aussi parallèles, et les trois points A″, B″ et C″ sont à l’infini. Quel est le point P correspondant ? Géry Huvent le construit ainsi : la perpendiculaire à (d) menée par A recoupe le cercle en J, la perpendiculaire à (BC) menée par J recoupe le cercle en P. Mais c’est aussi l’isogonal du point à l’infini de (d), car (AP, AC) = (BP, PA′).

Bon nombre de lecteurs s’intéressent aux généralisations. S’agissant d’un problème de géométrie projective, beaucoup remarquent que le résultat reste vrai en remplaçant « droites parallèles à (d) » par « droites concourantes en S », et « cercle » par « conique » – la projection qui transforme un cercle en une conique conserve les alignements – : les coordonnées barycentriques s'avèrent efficaces pour démontrer cette généralisation. Mais on peut aussi transformer cet énoncé par dualité ou par inversion, pour obtenir : « Soit un triangle ABC, Γ le cercle circonscrit à ABC, P un point quelconque de Γ et I un point quelconque du plan. Les droites AI, BI et CI recoupent Γ en A′, B′ et C′. On désigne par a, b, c, a', b', c' et p les tangentes à Γ en A, B, C, A′, B′, C′ et P. Enfin on désigne par AB le point d'intersection de a et b ; AC le point d'intersection de a et c, etc… Alors, les droites (BC, PA′) ; (AC, PB′) ; (AB, PC′) sont concourantes (ou parallèles) » (Michel Hébraud). « Deux cercles (α) et (β) sont tangents en P. Une droite Δ coupe (α) en A et A′, et coupe (β) en B et B′. Soit C un point de Δ. La droite PA′ recoupe le cercle (PCB) en A″ ; la droite PB′ recoupe le cercle (PCA) en B″. Montrer que le cercle (PA″B″) est tangent en P aux cercles (α) et (β) » (Gaston Bouez).