Le Bulletin précédent (n° 451) comporte un dossier maths-philo.
Un remarquable texte de Jean-Marie Nicolle n'a pu s'y trouver faute d'être prêt à temps. Nous en commençons aujourd'hui la diffusion, prévue sur trois numéros.
Pour les deux prochains, toujours sous le même titre général, il s'agira de :
– « De quoi parle-t-on ? »,
– « Y a-t-il un ordre dans ce monde ? ».
Pour aujourd'hui, bonne lecture de la première partie.

Ce que les philosophes ont appris des mathématiques (I) ou comment s'y prendre ?

Jean-Marie Nicolle

Mathématiques et philosophie sont deux disciplines sœurs, nées à peu près en même temps, pour lesquelles la finalité est le vrai. La question que nous voudrions traiter ici ne consiste pas à opposer ces deux disciplines, mais à relire ceux qui les ont aimées et pratiquées en même temps. Depuis la naissance de la philosophie au V^{e} siècle avant J.-C. jusqu'au XVIII^{e} s. y compris, les philosophes sont des mathématiciens ; citons pour mémoire Platon, Descartes, Pascal, Leibniz, … Les philosophes ont d'emblée considéré qu'ils avaient quelque chose à apprendre des mathématiques ; nous allons chercher quoi. Il ne sera pas question d'examiner les rapports généraux entre la philosophie et les mathématiques, ni de savoir si celles-ci sont utilisables ou non dans la réflexion philosophique. Nous voulons seulement discerner l'apprentissage que les philosophes ont pu faire auprès des mathématiques.

Dans un premier sens, apprendre, c'est acquérir des connaissances. Le philosophe peut apprendre des connaissances mathématiques, mais cela ne suffit pas à justifier son intérêt pour elles. Dans un second sens, apprendre, c'est s'exercer, se frotter aux difficultés d'une matière, c'est faire l'expérience d'une démarche. Le philosophe peut effectivement tirer des leçons de la pratique mathématique, mais, là encore, l'intérêt de cet apprentissage est réduit : le philosophe ne tirerait-il des mathématiques que des leçons de méthode ? Il faut aller plus loin. Sur le chemin de la vérité, au cours de leur propre questionnement, les philosophes ont pu trouver des éléments de réponse dans les mathématiques ; elles les ont éclairés dans leur compréhension du monde. Pour exposer ces découvertes philosophiques obtenues grâce aux mathématiques, nous allons suivre l'ordre chronologique, en commençant, bien entendu, par les Grecs.

a – Apprendre en montrant.

Les mathématiques grecques présentent une grande particularité par rapport aux pratiques antérieures des babyloniens ou des égyptiens : on n'y cherche pas des recettes ou des procédés de calcul permettant une application immédiate et pratique ;

on y fait des démonstrations. Les mathématiciens grecs ont appris à raisonner sur des objets idéaux, non-naturels.

Il semble que les plus anciennes démonstrations mathématiques consistaient, chez les Grecs, à donner une certitude appuyée sur le visible ; il fallait faire voir concrètement les solutions. Pythagore (560–480 av. J.-C.) a fondé une école organisée en secte qui a diffusé cette pratique. Ainsi les nombres étaient-ils représentés par des petits cailloux disposés en équerres (les gnomons). À partir de cette représentation figurée des nombres, l'apprentissage des mathématiques se faisait par la connaissance visuelle de tables, la répétition des mêmes opérations, et, bien sûr, l'exercice de la mémoire. Pour résoudre un problème, on procédait pas à pas, selon la technique par essais et erreurs.

Le texte du *Ménon* (81e-86b) de Platon est un témoignage de cette ancienne façon de faire. Ce passage se trouve au cœur d'une composition en abîme : Socrate veut démontrer à son ami Ménon que l'âme est immortelle ; pour cela, il a besoin d'une preuve : la réminiscence (la théorie de la réminiscence soutient que chacun possède en lui-même, mais à son insu, tout le savoir qui lui a été donné lors du séjour de son âme aux enfers ; grâce à des questions appropriées, il est possible de se ressouvenir de ce savoir). Mais pour démontrer la théorie de la réminiscence, Socrate a encore besoin d'une preuve ; il va donc montrer à Ménon comment on peut faire retrouver un théorème de géométrie à un jeune esclave, uniquement en lui posant des questions. Ménon observe Socrate ; Socrate observe l'esclave ; l'esclave observe la figure ; observons ce qui se passe…

Partant d'un carré de deux pieds de côté, il s'agit de découvrir comment construire un carré de surface double. Socrate montre le carré de la base de la démonstration en traçant la figure 1. L'esclave propose de doubler la longueur du côté et Socrate montre que c'est une erreur en traçant une nouvelle figure. Si l'on double le côté, on obtient une surface quadruplée (fig. 2).

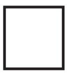
Fig. 1

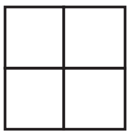
Fig. 2

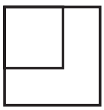
Fig. 3

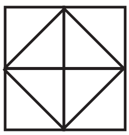
Fig. 4

Puisqu'il faut une longueur supérieure à deux pieds, mais inférieure à quatre pieds, l'esclave commet l'erreur classique de proposer un côté de trois pieds. Socrate montre par une troisième figure que la surface serait alors de neuf pieds. Il efface donc les trois figures, en construit une nouvelle (fig. 4) et trace une diagonale : *cette ligne tirée d'un angle à l'autre ne coupe-t-elle pas en deux chacun de ces quatre espaces ?*, demande-t-il. En faisant raisonner l'esclave sur les surfaces ainsi divisées, il lui permet de trouver la bonne réponse : le carré de surface double à un carré donné se construit sur sa diagonale.

Socrate fait appel au raisonnement de son interlocuteur, mais la mise en évidence visuelle joue un rôle déterminant dans la démonstration. La preuve en est que si Socrate n'avait pas tracé la fameuse diagonale (soufflant ainsi la bonne réponse à son élève, comme le font la plupart des enseignants par des interrogations négatives), le jeune esclave n'aurait probablement jamais trouvé la solution.

b – Apprendre en démontrant

Dans ses *Éléments*, Euclide (v. 300 av. J.-C.) nous donne l'exemple du traitement démonstratif en mathématiques. Sa démarche se caractérise par une mise en scène ritualisée. Ce rituel consiste en une suite d'étapes toujours identiques :

- L'énoncé ou la proposition : il s'agit d'énoncer la proposition à démontrer ou la construction à effectuer.
- L'exposition : il s'agit d'introduire une configuration avec des lettres désignant les différents points.
- La détermination : il s'agit de réitérer l'énoncé à propos de cette figure. Par exemple : « il faut construire sur la droite AB… ».
- La préparation ou construction : il s'agit, quand c'est nécessaire, de préparer la figure par des constructions auxiliaires.
- La démonstration proprement dite : il s'agit de déduire le résultat.
- La conclusion : il s'agit de reformuler la proposition comme étant le résultat de la démonstration, avec toute la généralité possible. On y ajoute les formules : « Ce qu'il fallait faire » (CQFF) pour un problème de construction, ou « Ce qu'il fallait démontrer » (CQFD) pour un théorème.

Avec Euclide, la mise en évidence visuelle ne se trouve plus au premier plan dans la démonstration. Elle est remplacée par l'enchaînement de raisonnements logiques, c'est-à-dire par la certitude purement rationnelle. Prenons par exemple la proposition 33 du Livre VII des *Éléments* :

LIVRE VII, PROPOSITION 31

Tout nombre composé est mesuré par un certain nombre premier.

A

B

C

Soit un nombre composé A. Je dis que A est mesuré par un certain nombre premier. En effet, puisque A est un nombre composé, un certain nombre le mesurera. Qu'il le mesure et que ce soit B. Et si B est premier, ce qui était prescrit aura été fait. S'il est composé, un certain nombre le mesurera. Qu'il le mesure et que ce soit C. Et puisque C mesure B, et que B mesure A, le nombre C mesure donc aussi A. Et, d'une part, si C est premier, ce qui était prescrit aura été fait, d'autre part, s'il est composé, un

certain nombre le mesurera. Alors l'investigation étant poursuivie de cette façon, un certain nombre premier sera trouvé qui mesurera A. Car s'il ne s'en trouvait pas, des nombres en quantité illimitée mesureraient le nombre A, dont chacun serait plus petit que le précédent ; ce qui est impossible dans les nombres. Donc un certain nombre premier sera trouvé qui mesurera le nombre précédent et qui mesurera aussi A.
Donc tout nombre composé est mesuré par un certain nombre premier. Ce qu'il fallait démontrer. (Euclide, *Les Éléments*, vol. 2, Paris, PUF, 1994, trad. B. Vitrac, p. 339-340)

Pour représenter trois nombres, Euclide trace des segments de plus en plus petits, mais sans repère ni proportion visible entre eux. En fait, ces trois segments ne servent à rien puisque la démonstration ne reposera pas sur leur contemplation, mais sur l'enchaînement des définitions de la notion de nombre. On voit par là que la représentation figurée des nombres n'est plus que la trace conventionnelle d'une vieille tradition, qu'elle n'a plus aucun sens, ici. D'ailleurs, les nombres choisis par Euclide sont complètement arbitraires ; il aurait très bien pu en donner d'autres. Sa démonstration suit un raisonnement par l'absurde : elle consiste à montrer que la régression à l'infini dans la décomposition d'un nombre est impossible, et qu'il y aura toujours un nombre premier au terme de la décomposition. On ne comprend aujourd'hui cette démonstration que si l'on prend pour nombres, comme le pensaient les Grecs, seulement les entiers naturels positifs à partir de un. On ne peut donc jamais descendre en dessous de un dans la division des nombres.

Nous voyons qu'Euclide travaillait sur des notions qui relèvent de la pensée pure. C'est l'essence même du nombre, énoncée dans ses définitions (L. VII, Déf. 2 : *un nombre est la multitude composée d'unités* ; L. VII, Déf. 14 : *un nombre composé est celui qui est mesuré par un certain nombre*. Euclide, *Les Éléments*, vol. 2, Paris, PUF, 1994, trad. B. Vitrac, p. 247 et 258), qui commande les relations entre les nombres ; ce n'est pas du tout leur réalité concrète. Euclide ne raisonne pas sur les figures des nombres (les nombres sensibles), mais sur le nombre en soi. Sa démonstration est un enchaînement d'évidences de la raison, et non une mise en scène d'évidences visuelles. Toute démonstration est une déduction rigoureuse qui montre qu'une proposition est vraie parce qu'elle est la conséquence nécessaire d'une proposition déjà admise.

L'invention de la démonstration ne s'est pas accomplie d'un seul coup. Il a fallu surmonter des idées préétablies. Il a fallu passer d'une connaissance *a posteriori* (tirée de l'expérience sensible) à une connaissance *a priori* (indépendante de l'observation sensible). Kant écrira à propos de Thalès : *Il trouva qu'il ne fallait pas s'attacher à ce qu'il voyait dans la figure (…) pour en tirer des propriétés, mais qu'il lui fallait engendrer par construction cette figure au moyen de ce qu'il pensait à ce sujet et se représentait « a priori » par concept*. (Préface à la seconde édition de *La Critique de la raison pure*). Il a fallu aussi renverser la hiérarchie entre la réalité et l'idée. Montrer, c'est suivre l'ordre que la réalité physique offre à notre regard. Démontrer, c'est détourner le regard de l'ordre sensible, pour y substituer l'ordre des idées. Il a fallu encore intérioriser la nécessité. Les Grecs ont d'abord décrit la nécessité dans le monde extérieur sous la forme du destin tragique, par exemple, dans le mythe d'Œdipe. Avec la démonstration mathématique, ils l'ont transformée en une contrainte intérieure, sous la forme de l'idéal de rigueur. Démontrer, c'est préférer la rigueur intérieure du raisonnement à l'exactitude d'une représentation spatiale. Enfin, passer de montrer à démontrer, c'est passer du particulier à l'universel. En effet, le triangle, c'est tout triangle. La démonstration mathématique déborde largement le cas particulier de telle ou telle figure. C'est pourquoi elle n'est pas seulement une déduction, mais aussi une induction. Grâce à l'universalité de ses conclusions, une démonstration mathématique établit une connaissance réellement scientifique.

c – Apprendre en dialoguant

Une des premières préoccupations des philosophes a été de distinguer leur démarche de celle des mathématiciens. Les philosophes ont une méthode qui leur est propre, la dialectique, fondée sur la discussion de thèses, qui s'efforce d'atteindre une connaissance vraie débarrassée des hypothèses. Platon (428–348 av. J.-C.) l'a nettement distinguée de la démarche mathématique. Aristote l'a remaniée et s'en est servi pour clarifier des concepts mathématiques comme le continu et l'infini.

La dialectique platonicienne se définit d'abord comme un art de la discussion. Elle consiste à opposer deux interlocuteurs afin d'obtenir une réponse vraie à une question donnée. Cependant, la progression vers la vérité ne s'effectue pas dans une opposition terme à terme de deux doctrines, comme dans un combat, jusqu'à ce que la plus forte l'emporte. Il s'agit plutôt d'un examen critique d'hypothèses fournies par un interlocuteur qui est ainsi poussé par le philosophe à reconnaître ses erreurs et à monter d'hypothèses en hypothèses jusqu'à la bonne réponse.

Dans un texte célèbre, le texte dit « de la ligne » (*La République*, L.VI, 509d-511c), Platon ordonne les différents degrés de la réalité en fonction des différents degrés de la connaissance. Disposés sur des segments de plus en plus longs et en rapports proportionnels, il énumère les copies des objets, les objets eux-mêmes, les notions mathématiques et, finalement, les idées. Les modes de connaissance qui leur correspondent sont respectivement l'imagination, la foi, la connaissance discursive et l'intelligence. Cette correspondance établit un lien indéfectible entre l'ontologique (les degrés de l'être) et la connaissance. Mais l'objectif de ce texte n'est pas d'exposer une division statique des genres de l'être ; il est de montrer le mouvement qui conduit d'une connaissance à une autre. L'opinion consiste à passer de la connaissance des copies (ou images) à celle des objets matériels dont les copies (ombres, reflets, images, etc.) sont des imitations ; c'est une démarche bien modeste et limitée. Ensuite, les mathématiques passent des objets matériels aux notions mathématiques qui permettent d'en rendre compte ; elles sont le prototype de la démarche scientifique. Enfin, la dialectique s'élève jusqu'aux idées, pour parvenir finalement à la saisie d'un principe absolu que Platon appelle l'Un-Bien. Mathématiques et dialectique ont pour point commun de travailler sur des idées universelles, saisies par une même intuition intellectuelle ; elles parviennent à des preuves universelles et nécessaires, mais elles empruntent des voies différentes.

En effet, les mathématiques ont pour objets des êtres relatifs ; par exemple, 5 = 3 + 2 et 3 = 5 − 2 ; chaque nombre n'est défini que par d'autres nombres. Pour se représenter leurs objets, les mathématiques usent d'images, de figures géométriques. Elles travaillent donc sur des êtres mixtes, à la fois sensibles et intelligibles. La dialectique, elle, use des idées seules en passant de l'une à l'autre jusqu'à l'Un-Bien. Elle travaille sur des êtres absolus auxquels on ne peut rien retrancher comme, par exemple, le Beau en soi, ce qui fait que les choses belles sont belles, ou le juste en soi, l'idée grâce à laquelle les hommes peuvent devenir justes. Les idées de la dialectique sont purement intelligibles et sont comme les modèles parfaits des notions mathématiques.

En conséquence de la différence de leurs objets, ces deux disciplines suivent des méthodes différentes. Les mathématiciens posent leurs objets sans remettre en question leur évidence, sans s'interroger sur leur existence, … *les maniant pour leur usage comme des hypothèses, ils n'estiment plus avoir à en rendre raison*… Les mathématiciens déduisent les conséquences nécessaires de leurs hypothèses (en entendant par hypothèse ce qui est posé, et non ce qui est supposé conditionnellement). Par exemple, après avoir posé la définition du triangle rectangle, ils en tirent les propriétés particulières. Les dialecticiens, eux, montent d'idée en idée pour parvenir au principe anhypothétique, l'Un-Bien, c'est-à-dire à la cause de tout ce qui existe, l'Un-Bien se trouvant au-dessus de tout. D'après Platon, la supériorité des dialecticiens sur les mathématiciens tient à ce qu'ils dépassent le niveau des hypothèses et rendent compte de l'existence de leurs objets.

Il résulte de cette comparaison entre la philosophie et les mathématiques une hiérarchie : les mathématiques restent dépendantes des hypothèses et n'engendrent seulement que des possibilités. Les mathématiques sont une science du possible, une science intermédiaire entre l'opinion et la philosophie. Les mathématiques, par les figures, les noms, les définitions qu'elles produisent, ne nous font connaître que les propriétés des choses et non leur être même… *Mais le plus important (…) entre ce qu'est une chose et le fait qu'elle est telle ou telle, ce n'est pas « le fait d'être tel ou tel », mais le « ce que c'est » que cherche à connaître l'âme*. (Platon, *Lettre VII*, 343b). Autrement dit, entre l'essence d'une chose et son apparence, c'est son essence qui compte le plus. Or, les mathématiques ne nous font pas connaître les essences. Seule la dialectique engendre des vérités certaines grâce au principe de l'Un-Bien ; la dialectique est une science du réel qui obtient l'intelligence pure des choses ; elle atteint l'être.

C'est pourquoi les mathématiques joueront un rôle de propédeutique à la philosophie dans la formation des jeunes, mais elles ne seront pas une fin par elles-mêmes. Les mathématiques sont les *anses de la philosophie*, dit Xénocrate, un disciple de Platon. Les mathématiques sont une excellente école pour apprendre à se méfier des sens par l'expérience de l'observation fine des figures, pour savoir définir un concept, pour acquérir le sens de l'abstraction, pour prendre l'habitude de s'élever jusqu'à l'universel, pour discipliner son raisonnement en respectant le principe de non-contradiction. *Nul n'entre ici s'il n'est géomètre*, avait écrit Platon à l'entrée de son

Académie. Mais les mathématiques n'offrent pas la science accomplie qu'on trouvera seulement dans la philosophie.

d – Apprendre en critiquant.

Disciple de Platon, Aristote (384–322 av. J.-C.) partage avec son maître l'amour du savoir, l'exigence d'universalité et de nécessité dans la connaissance. Mais il s'en sépare sur la question de la méthode et sur la théorie des idées. Le célèbre tableau de Raphaël, *L'école d'Athènes* (1510), présente bien la divergence de méthode entre Aristote et son maître : Platon montre le ciel de son index et Aristote désigne la terre de sa main. Platon recommande de se détourner des objets sensibles pour trouver leur vérité dans les idées. Aristote, au contraire, veut s'appuyer sur l'observation du sensible pour, progressivement, induire un savoir général sur les objets.

Il en résulte pour lui que les notions mathématiques sont dérivées par abstraction des objets sensibles (*Métaphysique*, M, 3) ; les figures et les nombres n'existent pas par eux-mêmes, séparément des objets physiques, et ne peuvent en être la cause. Cela ne signifie pas que les mathématiques soient seulement une science du sensible, mais cela veut dire qu'elles traitent des notions tirées d'objets sensibles ; elles étudient les objets physiques sous certains de leurs attributs comme le nombre, la grandeur, la surface, etc. Selon Aristote, les mathématiques n'étudient ni l'existence, ni l'essence de leurs objets, car ces questions relèvent de la métaphysique ; elles explorent seulement certaines de leurs propriétés.

La dialectique prend alors une nouvelle signification ; pour Platon, elle était un moyen de s'élever vers l'intelligible par rupture avec le sensible. Pour Aristote, l'intelligibilité est immanente au sensible : c'est dans le sensible qu'il faut chercher la forme des objets qui les explique. La dialectique est une discussion des idées admises sur toute question. C'est une démarche consistant à réclamer de l'adversaire une proposition (appelée prémisse) que l'on va discuter et critiquer pour obtenir un savoir nouveau. La dialectique est une mise à l'épreuve des concepts, une réflexion critique sur les jugements. Elle construit un problème qui met en jeu une alternative, une vérité ou une thèse qui est sujet à conflit. Elle peut être utilisée au coeur de la science en train de se faire, mais également dans l'après-coup, lorsqu'il s'agit de reconsidérer une découverte. À la différence de la dialectique platonicienne, la dialectique aristotélicienne n'est pas en elle-même une science puisque tout homme, même ignorant, peut la pratiquer, mais elle peut être un moteur de la science.

Pour Aristote, la dialectique est critique alors que la science mathématique est démonstrative. Les mathématiques ne demandent pas mais posent les propositions d'où partiront leurs démonstrations, ces propositions étant considérées comme des affirmations vraies et premières ; démontrer consiste alors à disposer des termes dans des syllogismes de telle sorte qu'on arrive à une conclusion vraie. Pour Aristote, une prémisse démonstrative *est vraie et obtenue au moyen des principes posés primitivement tandis que dans la prémisse dialectique, celui qui interroge demande à l'adversaire de choisir l'une des deux parties d'une contradiction, mais dès qu'il syllogise, il pose une assertion portant sur l'apparence et le probable* (*Analytiques*

Premiers, I, 1, 24a). Par exemple, le philosophe demandera de choisir l'une de ces deux thèses : le monde est fini ; le monde est infini. Une fois le choix posé, il faudra argumenter. On arrive donc à la hiérarchie inverse de celle de Platon : les mathématiques travaillent sur des vérités, alors que la dialectique ne travaille que sur du probable.

On voit très bien le travail dialectique à l'œuvre dans la *Physique*, (livres III et VI), lorsqu'il s'agit d'examiner le concept d'infini : Aristote énumère les définitions les plus répandues de l'infini (204a), les diverses raisons de croire à l'infini (203b), puis réfute ces raisons (208a). Par exemple, nous croyons à l'infini parce que notre esprit, dès qu'il s'agit de penser une limite, cherche à savoir ce qu'il y a derrière la limite, en sorte que toute limite nous pousse à postuler l'illimité. Ce à quoi Aristote répond que notre esprit confond la limite avec le contact : le contact est une idée relative entre deux termes, alors que la limite est une idée absolue qui ne concerne que le terme limité ; par exemple, le nombre (entier) est limité, mais n'est pas en contact avec un autre nombre.

Cependant, la dialectique ne se réduit pas qu'à un travail négatif ; pour avancer, le dialecticien doit savoir poser des prémisses, doit savoir dissocier les différents sens d'un terme, découvrir des différences et percevoir des similitudes. Dans la *Physique*, Aristote cherche à dégager une solution sur la question de l'infini grâce à ce qu'on peut appeler aujourd'hui des « opérateurs de discernement », c'est-à-dire des distinctions qui, en faisant éclater une notion, en réduisent la confusion et permettent de définir un véritable concept ; ainsi, il distingue l'acte de la puissance : l'infini ne peut exister en acte, effectivement ; mais il peut exister en puissance, comme possibilité dans la pensée, sans jamais atteindre la réalité effective (206a).

Avec les Grecs, les mathématiques et la philosophie semblent avoir connu une naissance fastueuse : les deux enfants sont beaux, appelés à un avenir radieux. Et, pourtant, pendant près de seize siècles, ils vont stagner, voire régresser en Occident. La philosophie va sombrer dans la scolastique ; les mathématiciens médiévaux latins ne sauront plus faire de démonstrations. Faut-il invoquer la décadence romaine ? Doit-on accuser la religion chrétienne ? Nous verrons que ces siècles dits obscurs sont en fait animés par une sourde inquiétude sur la nature des objets mathématiques.