Le calcul numérique en question

Rémi Jost

Cet article sur le calcul numérique

- *tient compte des orientations actuelles de l'enseignement du calcul en primaire et des objectifs des futurs programmes de collège préconisés par la commission Bach ;*
- *prend en compte des résultats des évaluations officielles et des erreurs de calcul de plus en plus fréquentes au collège et en seconde ;*
- *analyse l'usage des calculatrices en classe de mathématiques ;*
- *argumente pour une pratique renforcée des calculs mental et posé ;*
- *enfin ouvre, dans la conclusion, quelques pistes pour une compréhension progressive des nombres, des opérations et du calcul littéral.*

I. Constats et problématique

Programme 2004 du primaire

De nouveaux programmes entreront en vigueur dans la dernière année du cycle des approfondissement (ex-CM2). La résolution de problèmes y tient une place centrale. En calcul les contenus et les compétences visés sont bien motivés, en particulier ce qui concerne la proportionnalité, les nombres naturels, les fractions et les nombres décimaux. Les compétences sur le calcul mental, posé et automatisé sont explicitement exigibles. De plus, le calcul mental est justement décliné en *calcul mental automatisé* et en *calcul mental réfléchi*.
Un document d'accompagnement école-collège donne les nouvelles orientations des programmes de mathématiques de façon très claire.

Futurs programmes du collège

La commission Bach a été chargée de réécrire les programmes de collège en mathématiques.
L'organisation du futur programme (rentrée 2005) fait apparaître quatre rubriques au lieu de trois dans les précédents programmes :

I – Organisation et gestion de données – Fonction.
II – Nombres et calcul.
III – Géométrie.
IV – Grandeurs et mesure.

Le calcul intervient dans chacune de ces parties, évidemment de façon plus explicite et opérationnelle dans la partie II.
L'acquisition et l'approfondissement des notions liées au calcul sont proposés de façon progressive. Les conseils donnés et les objectif de formation en ce qui concerne les trois modes de calcul (calcul instrumenté, calcul mental, calcul posé) sont explicités de la même façon que dans les programmes actuels. Mais les

compétences à ce sujet sont devenues exigibles, comme à l'école primaire.
Un développement particulier est consacré à « grandeurs et mesures » et à la « statistique », parties où le calcul intervient dans des situations qui donnent du sens aux nombres et aux opérations dans les domaines numérique et littéral.

Analyse de quelques évaluations officielles

1. En 1995 lors de l'évaluation de fin de troisième, sur les exercices qui avaient déjà été proposés en 1990, il a été constaté qu'en calcul numérique élémentaire les élèves avaient progressé. En calcul algébrique il y avait stabilité, et sur les calculs avec radicaux une baisse sensible : il est vrai que sur ce dernier point les exigences des programmes avaient été réduites (référence : dossier de la Direction de l'évaluation et de la prospective (DEP) nº 86 de mai 1997).
2. En 1995 l'évaluation internationale de la troisième enquête internationale sur les mathématiques et les sciences (Third International Mathematics and Science Study : TIMSS) en cinquième et quatrième révèle des difficultés des élèves français, par rapport à l'ensemble des pays concernés, sur les calculs avec fractions décimales, les calculs sur les grandeurs (unités), les calculs de pourcentages, le calcul algébrique avec résolution d'équations (références : note d'information de la DEP 97-06 de février 1997, dossier de la DEP nº 99 de juin 1998).
3. En 1996, à l'entrée en sixième, 25% des élèves ne maîtrisent pas les compétences de base concernant les opérations élémentaires sur les nombres entiers et décimaux.
4. En 2000, l'évaluation du programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA) de l'OCDE révèle que les élèves français de 15 ans sont démunis lors de résolution de problèmes concrets avec des calculs raisonnés ou à expliquer (référence : dossier de la direction de la programmation et du développement (DPD) nº 137 de novembre 2002).
5. En 2001, lors de l'évaluation d'entrée en sixième, sur les exercices déjà proposés en 1998, les progrès ne sont pas significatifs, mais il n'y a pas de baisse constatée (référence : dossier de la DPD nº 128 de mars 2002).
6. En 2002, lors de l'évaluation d'entrée en sixième,
    a. dans le champ « *Numération et écriture des nombres* », les items ont été globalement réussis par environ deux tiers des élèves. Seuls ceux mettant en œuvre des compétences en cours d'acquisition et liées au sens de l'écriture à virgule ont présenté des difficultés.
    b. dans le champ « *Traitements opératoires* », les mécanismes de calcul des additions et soustractions posées semblent bien maîtrisés. Les erreurs qui apparaissent lors du calcul mental montrent que le sens de l'écriture à virgule n'est pas encore acquis.
7. En 2002, lors de l'évaluation d'entrée en cinquième (voir aussi le tableau récapitulatif en annexe),
    a. dans le champ « *Numération et écriture des nombres* », les items concernant les nombres relatifs (nouveauté pour les élèves en sixième) et les ordres de grandeur sont plutôt bien réussis. En revanche, les items

mettant en jeu des nombres en écriture fractionnaire donnent lieu à des scores relativement faibles. Ceci ne fait que traduire la difficulté qu'a la plupart des élèves à considérer le quotient de deux nombres entiers comme un nombre et pas seulement comme un opérateur.

b. dans le champ « *Traitements opératoires* », on observe des scores de réussite aux items de calcul mental allant de 11,1% à 57,9%. On constate un fort taux de non réponses dû soit à la difficulté de mémorisation et d'analyse du processus à mettre en œuvre, soit à la forme inhabituelle donnée à ces calculs. La technique opératoire de la multiplication de deux décimaux semble acquise, mais la connaissance imparfaite des tables de multiplication reste un obstacle à la réussite. Les élèves ont du mal à traiter les divisions. Les difficultés sont liées à l'opération elle-même et à la taille des nombres.

8. En 2003, lors de l'évaluation d'entrée en sixième, sur l'ensemble des items repris de 2002, il n'y a pas eu d'amélioration, plutôt une légère baisse (de l'ordre de 1 à 3%). Par exemple, les calculs 37 : 10 ou 3 × 0,5, en calcul mental ou posé, ne sont réussis qu'à 40%. La baisse s'accentue davantage en réseau d'éducation prioritaire (REP).

En analysant ces évaluations officielles, nationales ou internationales, les indicateurs montrent une baisse préoccupante à l'entrée en Sixième des savoir-faire relatifs au calcul, en particulier en calcul mental et en calcul posé.
De plus, en collège et en lycée, les erreurs en calcul fréquentes et les hésitations fortes dénotent une maîtrise insuffisante, même chez des élèves de bon niveau. Quels types d'erreurs ?

Des constats d'erreurs fréquentes

Des lacunes, des erreurs de calcul numérique ou littéral sont relevées en classe de collège, en seconde, même chez de « bons » élèves.

Voici quelques exemples significatifs :
• sur les nombres décimaux :
$45{,}3 \times 10 = 450{,}30$; $0{,}7 + 1{,}6 = 1{,}13$; $7{,}3 \times 4 = 28{,}12$
$7{,}4 \leq 7{,}16$; les nombres décimaux compris entre 7,13 et 7,16 sont 7,14 et 7,15.
• sur les nombres fractionnaires :
$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{6}{8}$ ou $\frac{6}{15}$.
• sur les puissances et les radicaux :
$16^2 = 136$; $2{,}3^2 = 4{,}9$
$5^3 = 5 \times 10^3$; $(-5)^3 = 5^{-3}$
$-\sqrt{2} = \sqrt{-2}$; $\sqrt{101} = 11$
• sur le calcul littéral :
$(1 + 2x)^2 = 1 + 4x$
$\frac{2+x}{2} = 1 + x$

$2x = 3 \Rightarrow x = 3 - 2$

En cours d'apprentissage ces erreurs sont exploitées de façon constructive par les enseignants. Mais, encore présentes en grand nombre à certains grands paliers de la scolarité, elles posent question. Qu'est-ce qui est en cause ? Les changements de programmes, les changements d'horaire ? La formation des enseignants incomplète ? Des pratiques pédagogiques inadaptées ? L'insuffisance de travail des élèves ? Comment y remédier ?

Les réponses ne sont pas simples Les questions sont aussi ouvertes à la réflexion et la pratique des lecteurs…

II. Le calcul numérique

On ne peut pas faire de mathématiques sans calcul. Une certaine familiarité avec les nombres et les opérations s'impose à tout niveau. Au collège trois modes de calcul numérique sont préconisés pour les calculs exacts ou approchés : le calcul instrumenté, le calcul mental et le calcul posé ou à la main. Ils figurent dans les bandeaux en tête des programmes, mais ne sont pas explicitement exigibles.

Le calcul instrumenté

La plupart des enseignants suit les instructions officielles concernant l'emploi de la calculatrice, par exemple, en tant qu'outil d'expérimentation ou de vérification. Mais cédant en partie à la « facilité », désirant éviter des calculs dits « techniques » et les « pertes de temps » en classe, ils laissent progressivement s'installer le « tout calculatrice » pour effectuer les calculs numériques.

Un certain usage des calculettes doit nous interroger :

1. Les élèves deviennent dépendants des calculatrices et finissent par les utiliser à mauvais escient et en abuser. Ils les utilisent pour calculer, par exemple : 3×7 ; 19×1 ; $22 + 55$; $257 : 10$. La possibilité de recours à une calculatrice ne devrait pas dispenser de connaître les tables de multiplication. Mais alors à partir de quel degré de savoir-faire de l'élève ou de degré de complexité du calcul demandé peut-on l'utiliser ?
2. La calculette est souvent utilisée comme une « machine à calculer » au premier sens du terme, c'est-à-dire comme une « machine à donner des résultats ». Un usage trop exclusif de la calculette favorise le « tout décimal », renforcé en sciences physiques ou dans la vie courante, par la lecture des nombres sur les montres analogiques, sur les instruments de mesure à écran digital, sur les balances numériques (poids-prix) des commerçants, … Les élèves ignorent très souvent la distinction entre valeur exacte et valeur approchée. Ils n'acquièrent qu'une notion très partielle des nombres, voire fausse : par exemple, $4/3 = 1,33$; $\cos 45° = 0,707$.
3. En seconde, les règles élémentaires opératoires sont souvent « oubliées », même par les bons élèves : par exemple les opérations sur les nombres relatifs avec parenthèses, sur les nombres fractionnaires, sur les puissances, sur les

radicaux, … La calculatrice est employée alors que ces règles opératoires sont en cours d'apprentissage et de mémorisation. Certains professeurs vont jusqu'à dire que les élèves « désapprennent » les règles élémentaires avec la calculatrice ! Est-ce bien fondé ?

4. Au collège, la calculette peut-elle réellement préparer au calcul littéral, en particulier à la transformation d'équations, au développement, à la factorisation, … ? Que dire alors de l'emploi des calculatrices avec possibilité de calcul formel ?

Les nombres, leurs propriétés et les techniques opératoires ont besoin d'être « manipulés », « fréquentés », pour être progressivement appropriés : la calculatrice employée comme « machine à calculer » peut priver l'élève de cette « fréquentation ».
Comment éviter que les élèves prennent les résultats tels quels, en lecture « passive » en faisant une confiance aveugle à la machine ?
En fait quels sont les objectifs et les domaines d'emploi de la calculatrice ?
Comment faire réfléchir les élèves avec les calculatrices ? sur les précisions de calcul, sur les erreurs de lecture possible ?

Le calcul mental : argumentaire

Actuellement le calcul mental n'est plus une priorité en classe de mathématiques au collège. Obligatoire à l'école primaire, sa pratique se maintient encore en sixième, puis occasionnellement en cinquième. Elle a malheureusement quasiment disparu en quatrième-troisième, sans parler de la seconde.

Pourtant il y a de bonnes raisons pour promouvoir le calcul mental, qu'il soit « automatisé » ou « réfléchi » :

1. Un élève habitué au calcul mental est en mesure de prévoir l'ordre de grandeur d'un résultat, peut contrôler *a posteriori* sa vraisemblance.
2. Le calcul mental permet à l'élève de se construire des représentations mentales des nombres. Par exemple, l'expression 1/2, selon l'élève et son niveau de compréhension des nombres, sera visualisée comme un gâteau partagé, le résultat de la division décimale de 1 par 2, une représentation de 0,5, une fraction, … Cette représentation pourra changer selon le calcul à effectuer et enrichir ainsi la vision des nombres. La pluralité de procédures mentales de calcul permet aussi de mettre en évidence un même concept sous des aspects différents : 20% de A, c'est 0,20 A, mais aussi un cinquième de A, …
3. Le calcul mental entretient des automatismes opératoires qui libèrent la pensée pour se consacrer à d'autres tâches, faciliter la découverte et la compréhension progressive des nombres, aborder les raisonnements sur les nombres, les opérations de plus en plus complexes. Les nombres deviennent « familiers ». Les règles élémentaires sont mémorisées, entretenues. L'organisation du calcul mental, l'analyse des procédures employées par divers élèves préparent l'explicitation et la mémorisation des règles : par exemple, pour calculer 57 + 109, considérer 57 comme 50 + 7 et 109 comme 100 + 9.

4. La pratique du calcul mental contribue à l'appropriation des propriétés calculatoires et participe ainsi à la maîtrise progressive du calcul littéral : $50^2 = 2\,500$ par application de $(ab)^2 = a^2b^2$. Autre exemple : pour calculer le produit 18×7 on peut considérer le facteur 18 comme $20 - 2$, de même, pour 19×7, 19 comme $20 - 1$, et ainsi de suite 19,5 comme $20 - 0{,}5$. Progressivement l'élève peut comprendre l'écriture $20 - a$, mais aussi le nombre indéterminé $20 - a$, la distributivité, …
5. La pratique du calcul mental peut se généraliser au « calcul mental littéral » par des exercices mentaux du type $x - 3x$, $x \times x$, $(1 - 3x)^2$, $(-3x)^2$, … Là encore cela permet de se familiariser avec les règles opératoires et d'alléger la charge mentale de travail de calculs plus complexes comprenant ces calculs élémentaires. Le calcul mental prépare ainsi au calcul algébrique, à l'étude des fonctions. Sans une certaine maîtrise du calcul élémentaire il est difficile d'aborder les questions suivantes :
   • le développement de $(x + 1)^2$ en se référant, par exemple, à l'organisation du calcul de 101^2 ;
   • la détermination du signe de $-x^2$, $(-x)^2$;
   • le comportement asymptotique de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0 : images de 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, …
6. Inversement l'analyse des erreurs commises en calcul mental permet de mettre facilement en évidence la fausseté de certaines « règles-élèves » utilisées lors du calcul mental mais aussi en calcul littéral : $102^2 = 10\,004$ par utilisation de $(a + b)^2 = a^2 + b^2$; $\sqrt{100+49} = 17$ par utilisation de $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Cela peut être l'occasion de noter avec les élèves que de nombreuses erreurs commises en calcul mental tiennent à un penchant abusif pour le « linéaire » : le résultat pour $a + b$ s'obtiendrait toujours par l'addition des deux résultats obtenus pour a et pour b, etc. On retrouve ce type d'erreur en terminale pour $\ln(a + b)$.
7. Le calcul mental met en œuvre l'anticipation, la délibération, la décision. À l'exception des réponses « réflexes » puisées dans les répertoires comme les « tables de multiplication », le calcul mental consiste à effectuer un calcul de la manière la plus opportune. C'est d'ailleurs ce qui en fait son attrait. Il suppose donc successivement : l'évocation mentale de procédures diverses, un jugement quant à leur pertinence relative, le choix de la procédure qui sera utilisée. Évocation, délibération, décision sont ainsi mises en œuvre. La formation que favorise le calcul mental dépasse ainsi le cadre du calcul : on mobilise des compétences fondamentales présentes dans la résolution des problèmes et dans la pratique scientifique.
   Exemple dès la sixième :
   $\dfrac{a}{b} \times c = (a \times b) : c$ pour calculer $\dfrac{2}{7} \times 3{,}5$
   $\dfrac{a}{b} \times c = (a : b) \times c$ pour calculer $\dfrac{12}{6} \times 17$

$\frac{a}{b} \times c = (c:b) \times a$ pour calculer $\frac{7}{3} \times 15$

Ce recours à la délibération, précédant le choix d'une méthode opportune, permet en outre de prendre en défaut l'idée que les élèves utilisent trop facilement « la méthode standard », quelle que soit la spécificité des nombres présents. L'aspect ludique du calcul mental « réfléchi » n'est pas à négliger et, de plus, il peut contribuer à donner aux jeunes le goût de la recherche, par exemple de la méthode la plus performante. Lorsque les élèves se prennent au jeu, ils sont amenés à créer leurs propres images mentales des nombres et ainsi à découvrir par eux-mêmes la diversité des approches : il y a donc lieu d'en profiter pour favoriser leur autonomie.

Le calcul mental se travaille, se réfléchit, se raisonne. Les tables de multiplication sont retenues, entretenues. Les procédures de calcul sont souvent multiples : leur usage répété un grand nombre de fois sur des exemples numériques ainsi que le choix de la plus opportune d'entre elles contribuent à préparer l'élève à des tâches de calcul plus complexes. Ainsi il apprend à gérer progressivement des situations de calcul littéral, puis algébrique.

Le calcul posé ou à la main : argumentaire

Comme le calcul mental, le calcul posé ou à la main disparaît des pratiques enseignantes au collège comme au lycée. Il est vrai que sa pratique n'est pas exigée au collège alors que, dans les nouveaux programmes du primaire et de seconde, elle y est explicitement attendue au même titre que le calcul instrumenté.
En sixième l'addition, la soustraction et la multiplication des nombres décimaux ne sont pas régulièrement mises en œuvre sous forme posée. L'enseignement de la division euclidienne, puis décimale pose des problèmes didactiques aux enseignants.

Quelques bonnes raisons pour promouvoir le calcul posé :

1. Le calcul posé donne de l'autonomie en l'absence de calculatrice, un sentiment de liberté : « rien dans les poches, tout dans la tête ».
2. Il entretient la pratique des opérations élémentaires d'addition et de multiplication.
3. Le calcul posé prépare l'organisation mentale de calculs qui seront traités à la calculatrice si leur complexité augmente.
4. Il permet d'accompagner de façon raisonnée les calculs à la calculette, par exemple : $\sqrt{10}$ n'est pas un nombre rationnel ; $\sqrt{2} \neq 1,414$.

La pratique fondamentale du calcul posé est indissociable de celle du calcul mental ou du calcul instrumenté. Le calcul posé entretient les automatismes, favorise le raisonnement sur les nombres et leurs opérations.

III. Pour conclure

Un usage réfléchi de la calculatrice est indispensable. Le calcul instrumenté est complémentaire du calcul mental et du calcul posé dans les domaines numérique et littéral, mais il ne peut les remplacer. Mais le temps nécessaire passé au calcul mental et posé ne doit en aucun cas être rogné par celui consacré à la calculette.
Le calcul mental ou posé, mis en œuvre régulièrement dans la résolution de problèmes, prépare et accompagne l'acquisition des compétences en calcul littéral.
La notion de nombre s'acquiert à travers les pratiques complémentaires des trois modes de calcul numérique, mais aussi en changeant d'écriture, en donnant du sens aux opérations et en entretenant les automatismes.
La découverte raisonnée des nombres passe aussi par d'autres parties de l'enseignement des mathématiques ou d'autre disciplines. La statistique, la géométrie offrent aussi des champs de problèmes qui contribuent à cette découverte, par exemple avec le calcul d'aires et de périmètres en utilisant les formules élémentaires, avec le calcul de longueurs en utilisant les propriétés de Pythagore ou de Thalès, … De même la technologie ou les sciences de la vie et de la terre présentent des situations où le calcul avec les nombres intervient de façon significative.
Le sens même des nombres, des opérations et l'apprentissage progressif du calcul littéral sont en jeu tout au long de la scolarité, en mathématiques, mais aussi dans d'autres disciplines.

En annexe page suivante :

Évaluation d'entrée en cinquième 2002 : tableau récapitulatif des taux de réussite par compétence.

Textes et sites de référence :

1. Le rapport d'étape sur le calcul de la commission Kahane (CREM) :
http://smf.emath.fr/Enseignememt/CommissionKahane/
2. Les programmes officiels du primaire et leurs documents d'accompagnement :
http://www.eduscol.education.fr/D0048/r_prim.htm
3. Les futurs programmes de collège :
http://www.eduscol.education.fr/D0082/
4. Les résultats nationaux de l'évaluation sixième 2003 :
http://evace26.education.gouv.fr
5. Brochures Jeux 2, 5 et 6 de l'APMEP.
6. « Pourquoi les mathématiques à l'école ? » de Roland Charnay. ESF.
7. « Apprentissage des mathématiques en cinquième ». ERMEL INRP.
8. « Calcul mental et automatismes ». IREM de Clermont-Ferrand 1994.
9. « Sur l'introduction au calcul littéral ». Bulletin de l'APMEP nº 445 page 197.
10. « Les débuts de l'algèbre au collège » de G. Combier, J-C. Guillaume et A. Pressiat. INRP.
11. « Pour une pratique régulière du calcul mental » de Valérie Larose. PLOT, nouvelle série, nº 2.

Annexe

Taux de réussite par compétence dans les exercices de l'évaluation d'entrée en cinquième 2002

COMPÉTENCES de BASE réussies à plus de 40%

Calcul mental (multiplier par 0,1)
Calcul mental (multiplier par 100)
Calcul mental (diviser par 100)
Calcul mental (addition)
Calcul mental (soustraction)
Calcul mental (10% de 2)
Calcul mental (0,13 /10)
Ranger des nombres décimaux positifs
Associer une expression à une situation concrète
Faire un calcul à la calculatrice
Ordre de grandeur d'un calcul mental
Division à la main avec virgule par un entier
Lire l'abscisse d'un point
Placer un point d'abscisse donnée

COMPÉTENCES de BASE réussies de 15 à 40%

Trouver les a/b d'une quantité
Placer un point d'abscisse décimale sur une droite
Division à la main avec virgule par un entier
Encadrer l'abscisse d'un point
Déterminer un arrondi
Appliquer un pourcentage
Donner différentes écritures d'une fraction
Faire une multiplication à la main

COMPÉTENCES peu réussies (moins de 15%)

Dans une situation problème complexe écrire un calcul avec parenthèses
Calcul mental (2/3 de 18)
Calcul mental (77 × 1/7)
Placer une fraction sur une droite graduée