Écriture figurée des théorèmes

Nicolas Patrois

A good notation has a subtlety and suggestiveness which at times make it almost seem like a live teacher (1).

Bertrand Russell

Résumé : On ne prête pas assez attention à la présentation des théorèmes tant à l'écrit qu'à l'oral ou en figures.

Diverses références(2) m'ont fait rêver d'une réécriture complète des Éléments d'Euclide avec des figures uniquement, sans texte mais seulement avec les codes symboliques usuels et des couleurs signifiant ce qui est su, ce qui est à démontrer, etc., dans le but de les rendre réellement universels, lisibles par tous quelle que soit la langue ou la culture, voire même par les illettrés. Ce beau rêve impossible(3) m'a cependant fait réfléchir sur les figures illustrant les théorèmes dans les manuels. Elles manquent généralement de clarté malgré les couleurs, on ne comprend pas facilement quelles sont les données ni les conclusions des théorèmes. Cette ambiguïté de représentation graphique des théorèmes géométriques est d'autant plus gênante que les énoncés écrits des théorèmes eux-mêmes manquent souvent de clarté, surtout pour des élèves de collège. Cela est d'autant plus vrai que, la logique courante(4) étant trop évacuée des manuels, les élèves ne sont pas bien armés pour le raisonnement qui la fonde. Ainsi la contraposée est difficile à faire comprendre en collège alors qu'elle est un élément important du raisonnement mathématique et donne une des premières approches du raisonnement logique. Dans ce but cet article présente une manière supplémentaire de représenter les théorèmes qui s'y prêtent.

Un exemple, le théorème des milieux

Il n'est pas simple de faire comprendre le théorème réciproque d'un théorème des milieux exprimé et illustré ainsi :

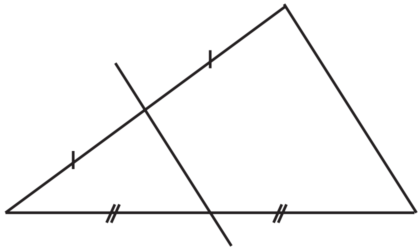
(1) Une bonne notation a une subtilité et suggestivité qui la feraient parfois presque ressembler à un professeur en chair et en os.

(2) L'Oulipo et l'Oubapo, Roger B. Nelsen, l'idéographie de G. Frege ou le texte d'un collègue publié dans le bulletin vert où il faisait des mathématiques purement orales pendant des randonnées et bien d'autres.

(3) Quoiqu'avec un wikiwikiweb comme celui de l'encyclopédie libre Wikipédia, ce serait peut-être faisable.

(4) La logique courante dont il s'agit ici est à mi-chemin de la logique formelle et du langage courant. Elle utilise un « si … alors … » causal et modal, dans le sens où cette implication est utilisée comme une relation de cause à effet nécessaire, mais pas dans le sens de « si je mens alors je veux bien être pendu » parce qu'il n'est pas sérieux ni dans celui de « si 2 + 2 = 5 alors je suis le pape » de Russell parce que celui-ci est trop abstrait. Cette manière de voir est constructive dans une mathématique non constructive.

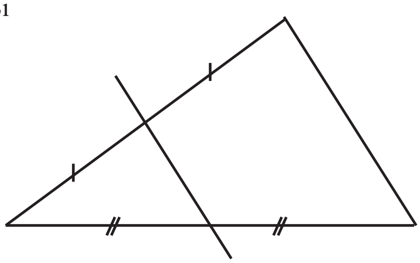
La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.



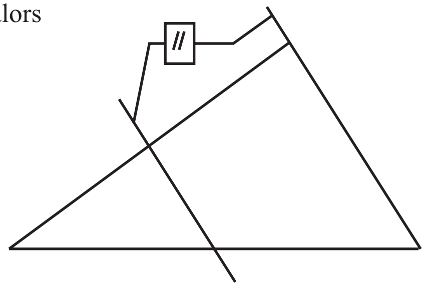
La figure mélange les données, ne mentionne pas le parallélisme dans la conclusion du théorème et pire encore, elle pourrait laisser croire qu'il s'agit du théorème réciproque puisqu'ainsi les deux ont la même figure.

Les programmes officiels de collège insistent depuis au moins 20 ans sur une présentation textuelle des théorèmes systématiquement sous la forme « si … alors … ». J'y ajoute une réécriture figurée empruntée à André Deledicq mais en remplaçant l'implication fléchée (⇒, peu claire en collège) par le « si … alors … » des programmes. Cette double manière montre bien les données et la conclusion du théorème, et la figure ajoute l'aspect visuel vital des mathématiques euclidiennes :
Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors elle est parallèle au troisième côté de ce triangle.

Si



alors



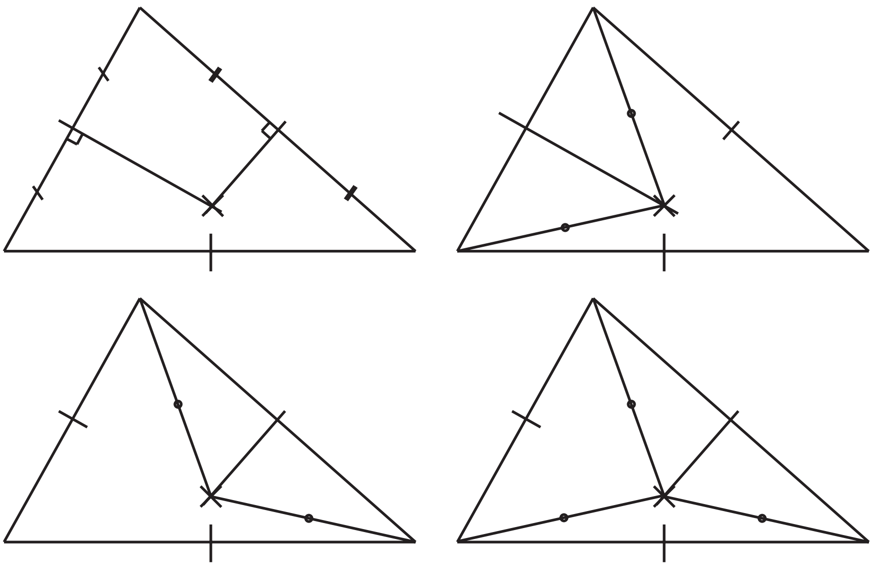
J'ai ajouté le codage peu fréquent du parallélisme que je présente ainsi en cours.
Plutôt que d'utiliser le tableau en trois colonnes cause-théorème-conséquence qui est très lourd et trop souvent inapplicable lors d'une démonstration, j'insiste plutôt sur le codage des figures, qui donne souvent la démarche. L'intérêt du codage est renforcé par cette présentation des théorèmes et au besoin par des couleurs pour faire ressortir ce qui doit être mis en valeur ou pour coder des égalités d'aires. Cette double manière de présenter rend le théorème certes plus long à retenir pour les élèves mais elle explicite et rend automatique la forme « si … alors … » (comme une poésie m'a dit un élève), ce qui les rassure. Elle explicite aussi la nécessité du théorème : le fait que la conclusion ne peut pas ne pas être si les données sont vraies.

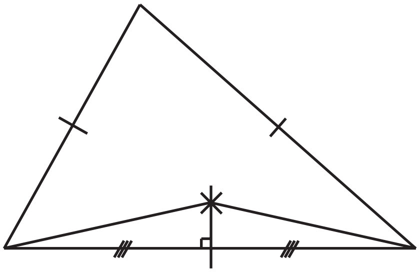
Mise en question de la définition

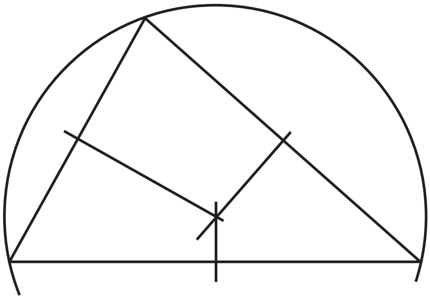
La représentation figurée des théorèmes permet en outre de poser le problème de ce qu'est une définition, par exemple de ce qu'est la définition du losange ou de la médiatrice et de distinguer la définition des théorèmes.
Ainsi, on peut aussi coder le parallélisme comme ci-avant, par des égalités d'angles ou une droite perpendiculaire commune, coder un triangle isocèle par des égalités de côtés, des égalités d'angles ou par un axe de symétrie. Les figures obligent à choisir une définition première (souvent celle qui vient de l'étymologie du mot), puis à considérer les autres codages comme des théorèmes ou des propriétés caractéristiques à démontrer dans le cadre du cours. Chaque nouveau théorème devient donc le moyen de réviser une vieille définition, ce qui ne fait jamais de mal. Trouver les bons codages et colorations en cours d'exercice oblige encore les élèves à les anticiper, à les choisir efficaces et non superflus, à réfléchir avant d'agir.

Application au point d'intersection des médiatrices

En cinquième (et en quatrième pour les bissectrices), je présente la démonstration de la propriété d'intersection à la manière du manuel Décimale 4°, p. 164 en 6 étapes mais sans texte aucun. Je commence par demander aux élèves de tracer les trois médiatrices des côtés d'un triangle sur leur cahier, s'ensuit un petit débat sur l'existence ou non du micro-triangle formé par les médiatrices. Pour trancher, je distribue ensuite une feuille comportant 6 triangles et les pieds des médiatrices ; je présente d'emblée la démonstration comme une preuve sans texte (mieux que le « sans mots » de Nelsen). J'explique oralement ce qui se passe mais exceptionnellement je ne fais écrire aucune démonstration en français : je me contente de reproduire et de compléter les figures au fur et à mesure de mon explication. Les théorèmes s'enchaînent tous seuls d'une figure à l'autre.



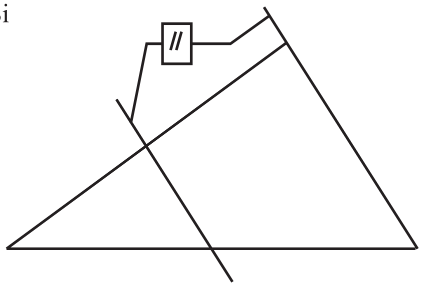




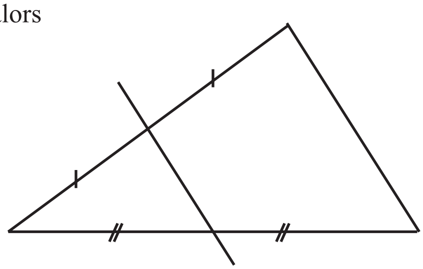
Réciproque et contraposée

La présentation en « si … alors … » impose aux élèves curieux de se poser le problème de la réciproque et il est surprenant de reprendre l'exemple du théorème des milieux. Quel est son théorème réciproque ? Il n'est pas celui-ci :
Si une droite est parallèle à un côté d'un triangle alors elle passe par les milieux des deux autres côtés.

Si

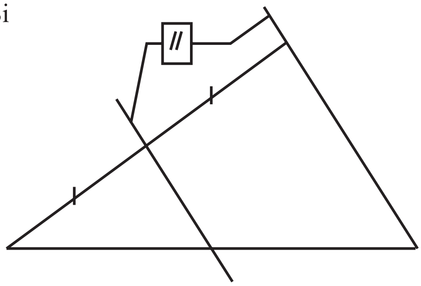


alors

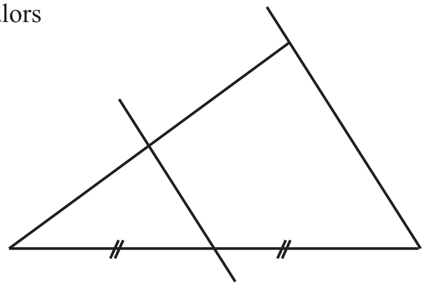


En fait, ici sont mises en scène trois propriétés : un parallélisme et deux milieux. Il est évident qu'une seule d'entre elles ne peut pas impliquer les deux autres, en revanche deux d'entres elles impliquent la dernière, d'où trois possibilités de théorèmes dont deux équivalentes. Pour faire apparaître la symétrie entre le théorème et sa réciproque on peut le présenter ainsi :
Soit une droite qui passe par le milieu d'un côté d'un triangle ; si elle passe par le milieu d'un autre côté alors elle est parallèle au troisième côté.
et sa réciproque :
Soit une droite qui passe par le milieu d'un côté d'un triangle ; si elle est parallèle à un autre côté alors elle passe par le milieu du dernier côté.

Si



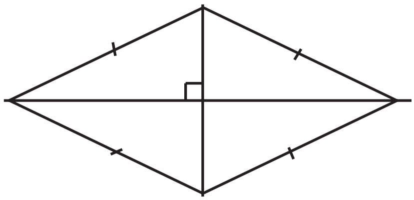
alors



Quelle est la contraposée du théorème des milieux ?
La mise en valeur du « et » et surtout les deux réécritures précédentes du théorème des milieux rendent alors les contraposées compréhensibles, pour le théorème direct :
Soit une droite qui passe par le milieu d'un côté d'un triangle ; si elle n'est pas parallèle au deuxième côté alors elle ne passe pas par le milieu du troisième côté.
et la contraposée de la réciproque :
Soit une droite qui passe par le milieu d'un côté d'un triangle ; si elle ne passe pas par le milieu du deuxième côté alors elle n'est pas parallèle au troisième côté.
Enfin, la fausse réciproque (si une droite est parallèle à un côté d'un triangle alors elle passe par les milieux des deux autres côtés) est un bon moyen d'introduire le théorème de Thalès (dont je n'ai pas trouvé d'écriture purement figurée).

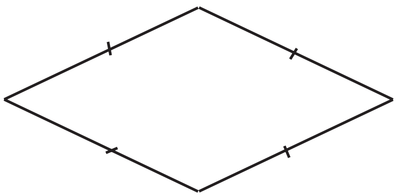
Le cas de la réciproque fausse

Il nous semble évident en tant que professeur que le théorème réciproque d'un théorème vrai n'est pas toujours vrai mais ce n'est pas forcément le cas de l'élève moyen et c'est attendu. La présentation figurée des théorèmes de cinquième concernant les quadrilatères est un moyen d'éviter cet écueil et c'est à mon avis l'intérêt majeur de cette partie du programme, loin devant la préparation à la translation : la supprimer serait une erreur grave.
Comparer les deux écritures du même théorème :
Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

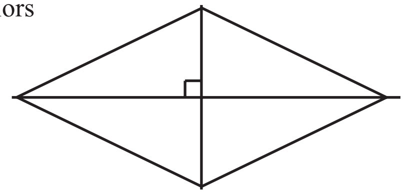


Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont perpendiculaires.

Si

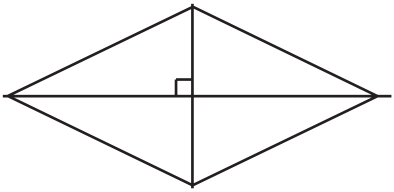


alors

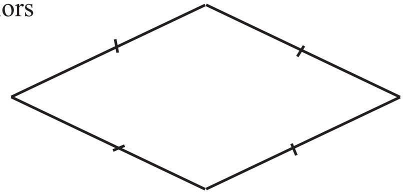


On peut faire comprendre aux élèves que dans ce cas le théorème réciproque est faux parce qu'il est possible que la conclusion soit fausse alors que la donnée est vraie :
Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires alors il est un losange.

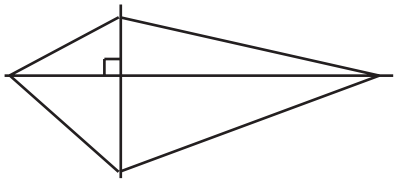
Si



alors



Nous pouvons avoir un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et qui n'est pourtant pas losange alors que le théorème réciproque dit que justement, si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires, alors obligatoirement, sans exception possible, il doit être un losange.
En voici un contre-exemple :



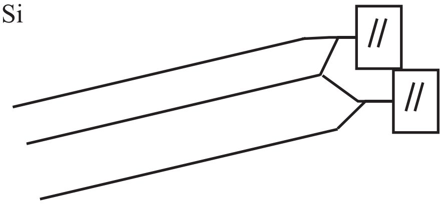
Présenté de cette manière, un élève peut en écrire la contraposée :
Si un quadrilatère n'a pas ses diagonales perpendiculaires, alors il n'est pas un losange.
Parce que s'il était un losange tout en ayant ses diagonales non perpendiculaires, il contredirait le théorème direct.
Et avec un peu de chance et de persévérance un élève comprendra que le théorème de logique suivant est vrai :
Si un théorème est vrai alors sa contraposée est vraie.
alors que le suivant est faux :
Si un théorème est vrai alors sa réciproque est vraie.

Antidotes

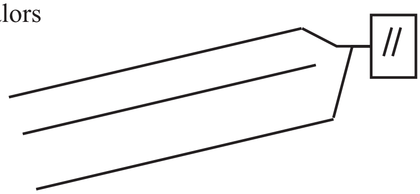
Pour développer une certaine distance vis-à-vis des figures comme de la présentation stéréotypée (mais utile !) des théorèmes, il faut présenter aux élèves de légers antidotes.
En cinquième on peut faire traduire des théorèmes écrits à la manière usuelle (ou celle d'Euclide dans ses Éléments) dans la manière « si … alors … » et inversement, tout en leur demandant de représenter les théorèmes à l'aide de figures. C'est un bon moyen de réviser les théorèmes et même d'introduire des théorèmes de classes supérieures.
La série devra présenter un théorème et sa réciproque (que les élèves reconnaîtront comme tels) et pourquoi pas le théorème de Pythagore, dont j'ai trouvé une figuration avec des carrés hachurés construits sur ses côtés mais un symbole d'égalité entre des hachures (je n'en ai pas trouvé de représentation purement figurée). Un autre théorème devra aussi être volontairement flou (bien qu'on se doute bien de sa signification précise), la représentation figurée venant combler l'imprécision, par

exemple avec le théorème « si un triangle est isocèle, alors il a deux angles égaux » qui est simple mais dont la formulation ne précise pas quels sont les angles égaux. Enfin, il faut mettre en garde sur une figuration du théorème de transitivité du parallélisme : il ne faudrait pas faire croire qu'il n'est applicable que si les deux droites extérieures sont parallèles à la droite intermédiaire, il est aussi applicable si les deux droites supérieures sont parallèles à la droite inférieure.
Voici une première figuration :

Si

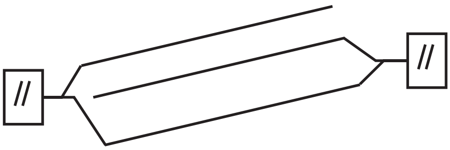


alors

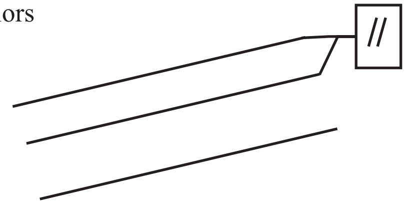


En voici une autre :

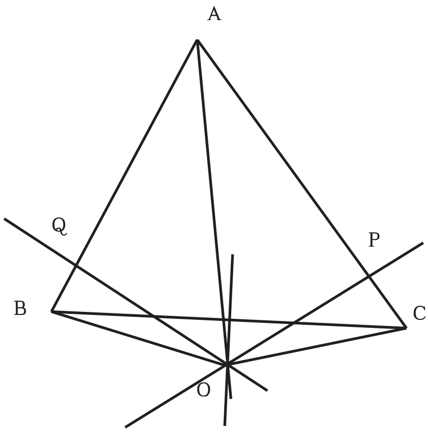
Si



alors



Et dans l'autre sens on peut demander aux élèves de gommer au maximum la structure « si … alors … » tout en gardant l'équivalence de contenu et une certaine clarté. On devra présenter des théorèmes simples à traduire (on pourra accepter une fois une écriture comme « un triangle est rectangle si... »), par exemple le théorème des milieux ou des plus difficiles comme « si une droite coupe perpendiculairement l'une de deux droites parallèles, alors elle est perpendiculaire à l'autre ».
Pour éveiller un certain esprit critique sur les figures on peut en proposer au lycée une volontairement fausse pour démontrer une propriété néanmoins vraie, la fausseté évite d'induire la conclusion et de l'utiliser pour démontrer que les trois symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport à ses côtés sont sur son cercle circonscrit.
On peut aussi proposer une figure fausse qui implique une contradiction comme en quatrième en devoir à la maison dans un grand classique qui démontre que tous les triangles sont isocèles :
Soit un triangle ABC quelconque Soit O le point d'intersection de la bissectrice de l'angle BAC avec la médiatrice du segment [BC]. Soit P le pied de la perpendiculaire à (AC) issue de O et Q celui de la perpendiculaire à (AB) issue de O.



On montre dans une preuve en français (la preuve figurée serait longue et fastidieuse) que ABC est isocèle en A à l'aide du théorème de Pythagore, appliqué à OPC et OQB, puis OPA et OQA.
Le problème n'est pas la position de O qui est bien en dehors du triangle mais que si P est sur [AC] alors Q n'est pas sur [AB] et réciproquement (sauf si ABC est isocèle en A, mais dans ce cas O n'existe pas).

Conclusion

Le codage d'une figure lors d'une démonstration est un outil précieux qui donne souvent une piste tant dans le codage des données que dans le codage de ce qui est à démontrer (et en faisant attention à ne pas les prendre l'un pour l'autre). On montre les différents moments du codage d'une figure :
* le codage est déjà présent sur la figure ;
* il est écrit dans la consigne mais pas sur la figure ;
* il est démontré en cours d'exercice par l'usage d'un théorème dans une question intermédiaire ;
* ce qu'il faut démontrer peut se coder en traits fins au crayon de bois.
Il ne faudrait pas présenter les théorèmes uniquement figurés, ce serait perdre la richesse des autres (orales et en français) d'autant plus que certains ne sont pas figurables comme les théorèmes d'arithmétique ou même le théorème de Thalès. Toutes les manières ont leur valeur ainsi que leurs défauts, la figuration par exemple peut induire, si on n'y prend pas garde, une standardisation des figures (comme dans le cas de la transitivité du parallélisme). Elle a son intérêt cependant en cours de démonstration comme résumé de théorème et parce que la démonstration pas à pas, étape par étape, est mise en valeur : la structure de la preuve apparaît, la figuration des théorèmes rend ce travail plus facile pour certains élèves et, de plus, ils apprennent aussi par ce moyen à lire une image. Le va-et-vient entre les trois approches enrichit la recherche du bon théorème à appliquer, la pratique mathématique et la compréhension que les élèves en ont.

Je voudrais remercier les divers relecteurs de cet article (en particulier Henri Bareil) pour leurs conseils plus qu'avisés, et René Guitart pour m'avoir introduit aux mathématiques figurées.

Bibliographie, ouèbographie

* Oulipo, La littérature potentielle et Atlas de littérature potentielle, 1973 et 1981, rééditions Folio essais, 1988 et 1995.
* Oupus 1 et 3, Oubapo, L'association, 1997 et 2000.
* Roger B. Nelsen, Proofs without words I et II, Mathematical association of America, 1993 et 2000.
* Gottlob Frege, Idéographie, trad. Corinne Besson, Vrin, 1999.
* Wikipédia en français : http://fr.wikipedia.org/
* Nicolas Bouleau, Géométrie mentale, Bulletin APMEP n° 423, 1999, p. 456-464.
* Richard Blavy, Composée d'homothéties et théorème de Ménélaüs : « présentation sans mots », Bulletin APMEP n° 420, 1999, p. 23-24.
* André Deledicq, Maths collège, Éditions de la Cité, 1998.
* Les Éléments d'Euclide, trad. François Peyrard, Blanchard, 1993.
* Nicole Pène & Philippe Depresle, Décimale 4°, Belin, 1998.