Grand minimum, petit maximum(*)

François Drouin(**)

Résumé : *description d'activités numériques en classe de sixième, suggérées par un problème paru dans un bulletin régional APMEP (voir son énoncé en annexe), et introduites sous forme de défis pour les élèves.*

1. Remplir une grille de 9 cellules connaissant les produits marginaux

En classe de sixième, cinq ou dix minutes avant la fin de l'heure, je place les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 dans une grille 3 × 3. En bout de ligne, j'indique les produits des nombres de chaque colonne et de chaque ligne. Je m'assure que tous les élèves ont parfaitement compris comment mes calculs ont été faits.

Je leur propose ensuite une grille telle celle ci-dessous en leur précisant que je ne leur dis pas où sont les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Je leur demande de rechercher pour la fois suivante où étaient mis ces nombres. L'usage de la calculatrice est autorisé et même conseillé (comment l'interdire pour une recherche à la maison ?). De plus, je leur précise que nous verrons ensemble les méthodes explorées par chacun.

			6
			160
			378
72	56	90	

La fois suivante, peu d'élèves ont réussi la grille. L'examen des méthodes essayées est alors d'un grand intérêt. Dans la plupart des cas, les élèves ont fait leurs essais au hasard, certains montrent des solutions fausses présentant plusieurs fois le même nombre, d'autres, enfin, présentent une solution correcte, mais ne peuvent expliciter leur démarche (aide extérieure qui s'est limitée à chercher et à trouver à la place de l'élève ?).

Si aucune solution correcte n'est proposée, je relance la recherche sur la grille proposée la fois précédente. Sinon je propose une nouvelle grille…

Grande question : en observant les 6 produits proposés, peut-on à coup sûr trouver la place de certains de ces nombres ? Selon les souvenirs de choses vues dans les classes précédentes, la place du nombre 5 est souvent trouvée. Il est temps de voir ou

(*) Cet article reprend un article déjà publié dans « LE PETIT VERT », Bulletin de la régionale Lorraine, n° 77 de mars 2004.

(**) Professeur au collège « Les Avrils » à Saint-Mihiel (Meuse), formateur à l'IUFM de Lorraine, et responsable du groupe « Jeux » de la régionale Lorraine. Contact :
François.Drouin@ac-nancy-metz.fr

revoir les classiques critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9. Il est aussi intéressant de faire comprendre que pour qu'un nombre soit divisible par 6, il faut qu'il soit divisible par 2 et par 3 et que si le nombre est pair et divisible par 9, il est divisible par 2 × 9, c'est-à-dire par 18 donc par 6 et par 3.
Après ces précisions, le placement du nombre 5 est immédiat. Pour le nombre 9, les placements possibles sont notés (sur la grille proposée ci-dessus deux placements sont possibles pour le nombre 9 dans la ligne inférieure…). Par la suite la grille se complète assez vite.

			6
		5	160
(9)		(9)	378
72	56	90	

L'examen de la troisième colonne nous fait aborder l'opération à trous … × 5 × 9 = 90 et le sens de la division.
Le nombre 7 peut être assez rapidement placé grâce à la table de multiplication par 7 et à des décompositions de nombres en calcul mental : 160 = 140 + 20, 378 = 350 + 28. D'où…

Les élèves ayant compris qu'avec l'étude des placements des nombres 5 et 9, la recherche était facilitée, je leur propose une nouvelle grille. Celle-ci est résolue sans trop de problème par un grand nombre d'élèves. Ceux-ci vont à la rescousse des élèves encore en difficulté.

Je leur propose ensuite de créer une nouvelle grille et de la proposer comme nouvelle recherche à leur voisin de table. Cette activité les motive beaucoup : ils ont peut-être peiné pour résoudre la grille que je leur avais proposée, mais ils réussissent tous à en concevoir une nouvelle. Je suis bien conscient que, dans ces deux phases, le niveau de difficulté est différent, mais cette mise en situation de réussite des élèves ayant dû être aidés leur permet d'accepter d'aller plus loin dans l'exploitation de ce « jeu ».

2. Le plus grand minimum et le plus petit maximum

Les nouvelles grilles créées précédemment par les élèves vont me permettre d'introduire un défi à l'intérieur de la classe.

Chaque élève a devant lui la grille qu'il a construite. Je lui précise qu'il a obtenu six produits. Parmi ces six nombres, l'un est le plus grand et sera entouré en rouge. L'autre est le plus petit et sera entouré en vert. Parmi les grilles construites, j'aimerais connaître le nombre entouré en rouge le plus petit possible et le nombre entouré en vert le plus grand possible. Cela revient à chercher le plus petit des maximums et le plus grand des minimums (formulation perturbant quelque peu les élèves…). Nous affichons au tableau les différents records pour le nombre « rouge » et pour le nombre « vert ». En fin d'heure, ces résultats sont affichés dans la salle de classe et constituent les records actuels de la classe.

Il est à noter que les records évoluent petit à petit et sont améliorés les fois suivantes. Cette activité proposée régulièrement en classe et lors de stages de formation nous laissait apparaître 90 comme « petit maximum » et 56 comme « grand minimum ». La question s'est évidemment posée de savoir si ces records sont les bons et si nous pouvons le prouver… D'autres questions annexes pouvaient surgir : les deux records font-ils nécessairement partie de la même grille (lors de l'évolution en classe des records partiels, cela n'est pas le cas…).

La solution au problème proposé dans le Petit Vert (voir en annexe) nous apporte une preuve qu'empiriquement nous étions sur la bonne voie. André Stef nous montre que le plus petit maximum ne peut pas dépasser 92. Nous avons trouvé 90 ; or 91 et 92 ne peuvent pas être obtenus comme produits de trois entiers inférieurs à 10. 90 est donc le nombre cherché. Comme l'écart minimum entre les nombres est 36, le travail d'André Stef valide également les conjectures faites par les élèves.

Je pense vous avoir convaincu de l'intérêt de proposer ces grilles et le défi annexe en classe de sixième. J'aimerais que nos collègues enseignant en classe de seconde n'hésitent pas à les utiliser eux aussi : l'apport supplémentaire des nombres premiers et la décomposition en produit de facteurs premiers des produits proposés peuvent faciliter les placements.

3. Pour aller plus loin…

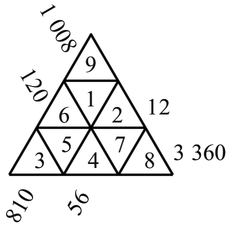
Des prolongements de cette activité sont possibles. Nous avons multiplié, nous pourrions additionner. Les nombres indiqués seront les sommes des trois nombres de chaque ligne ou de chaque colonne.

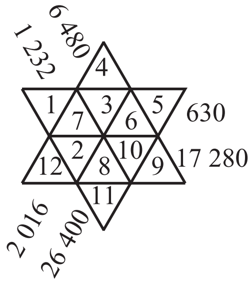
			16
			17
			12
6	21	18	

Les élèves pensent que ces grilles seront plus faciles à remplir. Ils se trompent, il n'y a plus de nombre pouvant se placer rapidement…
Le défi de l'écart minimal entre le maximum et le minimum peut aussi être proposé. Nous connaissons tous cependant le carré magique formé des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 et nous savons que grâce à la caractérisation de ces carrés magiques, nous obtiendrons six sommes égales à 15. Parvenir à ces sommes égales est à chaque fois un étonnement pour les élèves.

Ces grilles utilisant les produits et les sommes sont présentées dans la brochure « JEUX 2 » de l'APMEP. Les deux grilles présentées dans cet article en sont d'ailleurs extraites.

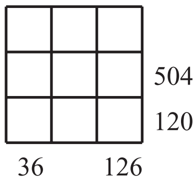
Quelque temps auparavant, la revue « Le Petit Archimède », éditée par l'A.D.C.S avait également évoqué ces grilles. Les triangles équilatéraux utilisaient également les entiers de 1 à 9 et les hexagones réguliers les entiers de 1 à 12.





Les thèmes de recherche proposés avec les carrés restent valables. Cependant les produits de cinq nombres qui apparaissent m'incitent à ne pas proposer ces configurations à mes élèves de sixième. Les collègues enseignant en classe de seconde auront sans doute un autre regard que moi…

Dans le cas des grilles multiplicatives carrées, le produit des nombres écrits horizontalement est égal au produit des nombres écrits verticalement et est égal à 9!. La résolution de grilles incomplètes telles ci-dessous est alors possible.



Dans le cas d'une grille multiplicatrice triangulaire, les nombres formant les « pointes » peuvent être trouvés rapidement en divisant 9! par le produit des deux nombres formant les lignes sous la pointe (dans l'exemple ci-dessus, 9 est égal à 9! divisé par 12 × 3 360). Une grille ayant les nombres 5 et 7 dans ses pointes est donc plus facile qu'une grille ayant ces nombres dans sa zone centrale.
La même méthode appliquée aux grilles multiplicatives hexagonales ne fait pas connaître aussi rapidement les nombres contenus dans les pointes.

J'ai voulu dans ces quelques lignes montrer l'intérêt de l'introduction de ces grilles (et des défis associés) dans nos classes, de la sixième aux différentes classes de lycée. J'ai voulu aussi montrer que ce jeu d'apparence simple peut révéler quelques contenus mathématiques moins immédiats (la solution proposée en annexe par André Stef me conforte dans cette idée).

ANNEXE

Le problème[1]

On considère une grille constituée par un tableau de 3 × 3 cases dont les cases sont occupées par les nombres 1, 2, 3, …, 9.
Par exemple :

1	6	3
5	8	2
4	7	9

Calculons ensuite les produits des trois nombres pour chaque ligne et chaque colonne :

1	6	3	18
5	8	2	80
4	7	9	252
20	336	54	

Nous obtenons six nombres. Considérons enfin la différence D entre le plus grand et le plus petit de ces six produits (ici D = 336 − 18 = 318).

Déterminer les grilles qui permettent d'obtenir une valeur minimale pour D.

Les solutions de ce problème[2]

Deux contributions à la solution sont arrivées : celles de Renaud Dehaye et d'André Stef.
Renaud Dehaye procède « à la manière des quatre couleurs », il ramène le cas à un nombre réduit de configurations (on peut décider que 9 est en haut à gauche, il y a deux cas pour le 8, …) puis il confie à Maple[3] le soin d'explorer. Il aboutit à la solution D = 36 obtenue pour la grille :

9	2	4
1	8	7
6	5	3

(1) Paru dans le bulletin de la régionale de Lorraine, « LE PETIT VERT », n° 75, septembre 2003, rubrique « Le problème du trimestre ».
(2) Parues dans le bulletin de la régionale de Lorraine, « LE PETIT VERT », n° 76, décembre 2003.
(3) Nous ne reproduisons pas ici le programme fourni à la machine.

André Stef découvre également cette solution par tâtonnements puis il établit que l'on ne peut pas faire mieux :

« Supposons rempli un carré optimal et intéressons-nous à la ligne et la colonne comportant le chiffre 1. Les produits p_1 et p_2 obtenus sont plus petits que la racine cubique de 9! (qui vaut environ 72). Si la répartition n'est pas 1-6-9 et 1-7-8 alors on se retrouve avec p_1 ou p_2 inférieur ou égal à 48. Dès lors, un autre produit sera supérieur ou égal à 87 (racine carrée de (9!/48) arrondi supérieurement), donc D sera supérieur ou égal à 39. Il reste à étudier le cas (plus équilibré) 1-6-9 et 1-7-8 en espérant obtenir au moins un cas où D sera strictement inférieur à 39…

On établit la première ligne et la première colonne à 1-6-9 et 1-7-8 (toute configuration peut s'y ramener à permutation près des lignes ou des colonnes, ou à symétrie diagonale près). La position du 5 (4 possibilités) est imposée pour ne pas dépasser la valeur produit 92 (= 54 + 38). On trouve donc une solution, et une seule (à permutations et symétrie près), avec D = 36 qui est bien inférieur strictement à 39 ».

André ajoute :

« À noter qu'il existe des solutions prenant également en compte le produit sur la diagonale descendante. Par exemple :

6	1	9
3	7	4
5	8	2

Les autres solutions sont toutes obtenues par permutations et symétries telles que la diagonale descendante soit composée des chiffres 6, 7 et 2. Il n'y a pas de solutions prenant en compte les produits des deux diagonales. »