

Les problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes », ... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice. La rubrique s'efforce de rendre compte de la pluralité des méthodes proposées par les lecteurs, des généralisations des problèmes...

Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Solutions et énoncés sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,
9 quai de la Seine,
75019 Paris.

Afin que les problèmes soient davantage accessibles à un plus grand nombre de lecteurs, le Comité de Rédaction suggère de donner, dès le bulletin suivant la publication de l'énoncé, une piste de solution, puis d'abrégier la solution elle-même quitte à la développer sur le serveur de l'APMEP. De fait, certains énoncés – par exemple, le 290 sur les quintangles – semblaient réservés à une poignée de géomètres, et quel que soit l'intérêt de cette discipline, il serait dommage qu'une majorité de lecteurs se sentent exclus. Certes, cette nouvelle procédure fausse un élément important, la pluralité des approches possibles : s'il existe une solution particulièrement élégante, soit celle-ci est prise en compte dans la piste de solution et elle devient banale, soit elle n'est pas prise en compte et les lecteurs sont détournés de cette solution optimale. Néanmoins, cela mérite d'être expérimenté : tous les commentaires seront les bienvenus.

Pour commencer, voici donc quelques idées pour vous aider à aborder les énoncés 297, 298 et 299 publiés dans les bulletins 449 (janvier 2004) et 450 (février 2004) :

Énoncé 297 (*relations liant les affixes des centres et les rayons de quatre cercles deux à deux tangents*) : Que devient la figure par inversion ? Que deviennent les formules par changement de repère ?

Énoncé 298 (*n points d'un plan tels que parmi cinq quelconques, quatre soient cocycliques*) : Suffit-il de prouver le résultat pour $n = 7$? Que peut-on dire pour $n = 6$? Peut-on se passer de l'inversion ? Les points jouent-ils un rôle symétrique ?

Énoncé 299 (*n points sur une sphère, intersection de plans perpendiculaires aux cordes...*) : Que devient le résultat lorsque $n = 3$? Le problème serait-il différent sur un cercle ?

Nouveaux énoncés

Énoncé n° 301 (Michel BATAILLE, 76-Rouen)

Soient α , β et γ les angles d'un triangle. Quelles sont les fonctions continues $f :]0, \pi[\rightarrow]0, +\infty[$ vérifiant pour tout triangle :

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(\gamma) = f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) ?$$

Énoncé n° 302 (Ivan RIOU, 17-La Rochelle)

On dispose de 101 pièces d'or, toutes de masses strictement positives (non nécessairement rationnelles entre elles). On suppose que : à chaque fois que l'on enlève une pièce au tas, on peut diviser le tas obtenu en deux sous-tas de 50 pièces tels qu'ils aient la même masse.

Prouver que toutes les pièces ont la même masse.

Solutions

Énoncé n° 293 (Pierre BORNSZTEIN, actuellement : 78 - Maisons-Laffitte)

Initialement, n oiseaux se trouvent chacun à un sommet d'un polygone régulier à n côtés. Lorsqu'ils sont apeurés, ces oiseaux s'envolent. Puis, après quelque temps, ils reviennent se poser sur chaque sommet du polygone, mais pas nécessairement sur leurs positions initiales. Trouver tous les $n > 0$ pour lesquels il existe nécessairement trois oiseaux qui, avant et après l'envol, forment deux triangles tous deux acutangles, tous deux rectangles ou tous deux obtusangles.

SOLUTION

Les solutions de Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), Ivan RIOU (17 - La Rochelle) et l'auteur sont très proches et distinguent les cas : n pair et n impair.

Si n est pair, considérons deux sommets diamétralement opposés A et B du polygone : quel que soit le troisième sommet C, le triangle ABC est rectangle. Si les oiseaux issus de A et B se reposent en A' et B',

- soit A' et B' sont diamétralement opposés, et quel que soit le troisième oiseau, qui va de C en C', les triangles ABC et A'B'C' sont tous deux rectangles (en C et C' respectivement),
- soit la position C' diamétralement opposée à A' est distincte de B', l'oiseau qui se repose en C' vient de C et les triangles ABC et A'B'C' sont tous deux rectangles (en C et B' respectivement).

Si maintenant n est impair, pour $n = 3$ il existe un seul triangle, acutangle (équilatéral). La valeur $n = 5$ fait exception, et pour $n \geq 7$, il existe plus de triangles obtusangles que de triangles acutangles : comme l'application qui à un triangle de départ ABC associe un triangle d'arrivée A'B'C' est manifestement bijective, elle ne

peut transformer tout triangle obtusangle en un triangle acutangle, donc il existe nécessairement trois oiseaux qui, avant et après l'envol, forment deux triangles tous deux obtusangles.

Il reste donc à dénombrer les triangles acutangles et les triangles obtusangles, compte tenu que, n étant impair, il n'existe pas de triangles rectangles. Pour

$n = 2k + 1$, il existe en tout : $\frac{(2k+1) \cdot 2k \cdot (2k-1)}{6}$ triangles. Si l'on oriente le cercle,

à tout triangle obtusangle ABC on peut associer, de manière unique, le sommet A qui précède le sommet B de l'angle obtus. Il existe $2k + 1$ points A, et pour chacun d'eux, les triangles obtusangles s'obtiennent en plaçant deux points B et C de manière quelconque sur les k positions qui suivent le point A, ce qui donne :

$\frac{(2k+1) \cdot k \cdot (k-1)}{2}$ triangles obtusangles. Pour qu'un triangle ABC soit acutangle, il

faut au contraire que B soit dans les k positions qui suivent A, C dans les k positions qui suivent B, et A dans les k positions qui suivent C (donc C n'est pas dans les k positions qui suivent A), ce qui revient à placer B et C en positions i et $n + j$ telles que: $1 \leq j \leq i \leq k$. Le nombre de possibilités pour un point A donné est donc :

$\frac{k(k+1)}{2}$, ce qui donne : $\frac{(2k+1) \cdot k \cdot (k+1)}{6}$ triangles acutangles, compte tenu que

chaque triangle acutangle est ainsi compté trois fois (à la différence des triangles obtusangles). On vérifie aisément que :

$$\frac{(2k+1) \cdot k \cdot (k-1)}{2} + \frac{(2k+1) \cdot k \cdot (k+1)}{6} = \frac{(2k+1) \cdot 2k \cdot (2k-1)}{6},$$

mais surtout que, lorsque $k \geq 3$ (donc $n \geq 7$),

$$\frac{(2k+1) \cdot k \cdot (k-1)}{2} > \frac{(2k+1) \cdot k \cdot (k+1)}{6},$$

ce qui achève la démonstration dans ce cas.

Par contre, lorsque $k = 2$ donc $n = 5$, il existe exactement cinq triangles acutangles et cinq triangles obtusangles (tous isocèles), et, de fait, il existe une permutation qui transforme deux sommets voisins en deux sommets non voisins (donc le polygone régulier en l'étoile à cinq branches), et tout triangle acutangle en un triangle obtusangle (et inversement). En définitive, pour toute valeur de $n \geq 3$ hormis $n = 5$, il existe nécessairement trois oiseaux qui, avant et après l'envol, forment deux triangles tous deux acutangles, tous deux rectangles ou tous deux obtusangles.

Une remarque de Jean Moreau de Saint-Martin suggère un problème différent de celui posé, mais fort intéressant et autrement plus difficile, vraisemblablement non résolu. Pour quelles valeurs de $n > 0$ existe-t-il nécessairement trois oiseaux qui, avant et après l'envol, forment deux triangles tous deux acutangles ? Ce n'est pas le cas pour $n = 4, 5$ ou même 6 (en permutant deux positions voisines, on transforme les deux seuls triangles acutangles en triangles rectangles). Mais c'est le cas pour $n = 7$, et il est vraisemblable que c'est vrai pour une infinité d'autres valeurs de n ,

peut-être pour tout $n \geq 7$. Limitons-nous à $n = 7$: convenons abusivement que $AB = p$ si A et B sont distants de p positions – donc si, en réalité,

$$AB = 2R \sin\left(\frac{p\pi}{7}\right),$$

et supposons que tout triangle acutangle soit transformé en un

triangle obtusangle. Si deux oiseaux issus de A et B se reposent en A' et B', on ne peut pas avoir simultanément $AB = 3$ et $A'B' = 3$: en effet, si $AB = 3$, il existe trois positions C telles que ABC soit acutangle, alors qu'il n'existe que deux positions C' telles que A'B'C' soit obtusangle. Si tout triangle de côtés (3, 3, 1) était transformé en un triangle (1, 1, 2), alors de proche en proche l'étoile de côté 3 serait transformée en le polygone, et donc tout triangle acutangle (2, 2, 3) en un triangle acutangle (3, 3, 1). Il existe donc au moins un triangle ABC, $AB = AC = 3$, $BC = 1$, transformé en A'B'C', $A'B' = 1$, $A'C' = 2$ et $B'C' = 3$. Soit D' le point situé entre A' et C'. Si D' provenait d'un voisin D de A, alors quelle que soit l'image E' de l'autre voisin E de A, l'un des triangles B'D'E' ou C'D'E' serait acutangle, or les triangles BDE et CDE sont tous deux acutangles. D' provient donc d'un point D non voisin de A, et il existe deux points E parmi les trois restants tels que $DE = 3$. Or il existe une seule position E' parmi les trois restantes telles que $D'E' \neq 3$, ce qui achève la démonstration.

Énoncé n° 294 (Pierre SAMUEL, 92- Bourg la Reine)

Étant donné un entier p non nul, peut-on déterminer tous les couples d'entiers positifs

(x, y) tels que $xy + p$ divise $x^2 + y^2$? Que peut-on dire du quotient $\frac{x^2 + y^2}{xy + p}$?

SOLUTION

Cet énoncé généralise un problème célèbre d'Olympiade Internationale de Mathématiques (énoncé 6 de l'Olympiade 1988 à Canberra, Australie, un des plus difficiles de l'époque...) : « Soient a et b deux entiers strictement positifs, tels que

$ab + 1$ divise $a^2 + b^2$. Montrer que : $\frac{a^2 + b^2}{1 + ab}$ est un carré parfait. »

Pierre Samuel avait limité son énoncé au cas où p est premier, mais ce n'est manifestement pas nécessaire. J'ai reçu des solutions de René MANZONI (76-Le Havre) et Jean MOREAU de SAINT-MARTIN (75-Paris).

L'idée essentielle est qu'à partir d'une solution quelconque, on peut construire une suite infinie de solutions : quels que soient p et q , si $\frac{x^2 + y^2}{xy + p} = q$, alors

$$\frac{y^2 + (qy - x)^2}{y(qy - x) + p} = q.$$

Donc si (x, y) est solution associée à $q = \frac{x^2 + y^2}{xy + p}$, alors

$(y, qy - x)$ est également associée à q , de sorte que la suite : $x_{n+1} = qx_n - x_{n-1}$, qui peut être parcourue dans les deux sens ($x_{n-1} = qx_n - x_{n+1}$), permet dans un sens de construire une « solution minimale » (x_n, x_{n+1}) à partir d'une solution quelconque

(x, y) , dans l'autre de retrouver toutes les solutions à partir des solutions minimales, lesquelles peuvent être recensées exhaustivement par un nombre fini de tentatives.

Jean Moreau de Saint-Martin donne l'interprétation géométrique de cette suite, ensemble des points entiers de la conique : $x^2 - qxy + y^2 = pq$. En particulier, pour $q = \pm 1$, la conique est une ellipse : $x^2 + xy + y^2 = p$ s'écrit : $(x + y)^2 + 3(x - y)^2 = 4p$, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de solutions, non nul si tous les facteurs premiers de p (d'exposant impair) sont 3 ou congrus à 1 modulo 3. Pour $q = \pm 2$, la conique est décomposée en deux droites : $(x - y)^2 = 2p$ ou $(x + y)^2 = 2p$: si $p = 2k^2$, les solutions sont $(x, x + 2k)$ ou $(x, 2k - x)$. C'est pour $|q| \geq 3$ que la conique devient une hyperbole.

Si p est positif, q est obligatoirement positif : en posant $t = \frac{q + \sqrt{q^2 - 4}}{2}$, on a :

$$t + \frac{1}{t} = q, \text{ donc : } x^2 - qxy + y^2 = (x - ty) \left(x - \frac{y}{t} \right). \text{ Si } x \geq y, x^2 - qxy + y^2 = pq > 0$$

entraîne : $x > ty$, donc $qy - x < \frac{y}{t} < y$, la suite ainsi construite est monotone. À un certain rang, elle change de signe, en s'annulant éventuellement au passage. En d'autres termes, toute solution du problème se déduit d'une solution $(a, -b)$ avec $-b \leq 0 < a$ telle que : $p - ab > 0$ divise $a^2 + b^2$. Et pour tout (x, y) de cette suite,

$$\frac{x^2 + y^2}{xy + p} = q = \frac{a^2 + b^2}{p - ab}.$$

Si $p = 1$, on a obligatoirement $ab = 0$, donc pour toute solution (x, y) ,

$$\frac{x^2 + y^2}{xy + 1} = q = a^2 \text{ est un carré parfait : c'était le problème d'Olympiade. Mais pour}$$

p quelconque, il faut explorer tous les $b < \sqrt{p}$, et pour chacun d'eux tous les a tels que $ab < p$, pour vérifier si $p - ab$ divise $a^2 + b^2$. Cela nous fournit deux suites d'entiers positifs, l'une construite à partir de $(a, -b)$, l'autre à partir de $(b, -a)$. Et pour tout p , il existe au moins une solution minimale : $b = 1, a = p - 1$, donnant

naissance à deux suites infinies de solutions de : $\frac{x^2 + y^2}{xy + p} = p^2 - 2p + 2$, mais il peut

y en avoir beaucoup d'autres ! Pour $p = 2\,003$, René Manzoni détermine dix valeurs possibles de $p - ab$, soit 28 valeurs de q , donc 56 suites infinies de solutions. Pour $p = 7$, Pierre Samuel trouve : $(a, b, q) = (1, 6, 37), (2, 3, 13), (1, 5, 13)$, mais aussi $q = 1$ avec seulement deux solutions positives : $(x, y) = (1, 3)$ ou $(3, 2)$.

Si maintenant p est négatif, q peut être négatif ou positif. q négatif impose : $xy + p < 0$, ce qui conduit à un nombre fini de solutions. Mais si $q > 0$,

$$(x - ty) \left(x - \frac{y}{t} \right) = pq < 0 \text{ entraîne : } \frac{y}{t} < x < ty, \text{ donc } ty > qy - x > \frac{y}{t}, \text{ ce qui montre}$$

que tous les termes de la suite sont strictement positifs, le quotient de deux termes consécutifs étant compris entre t et $\frac{1}{t}$. La suite passe par un minimum avant de recroître vers l'infini : pour être sûr de trouver toutes les solutions, il faut donc majorer, pour un q donné, les deux plus petits termes de la suite associée. Or :

$$x^2 - qxy + y^2 = \left(\frac{qy}{2} - x\right)^2 + \left(1 - \frac{q^2}{4}\right)y^2 = pq.$$

Si y et x sont les deux plus petits termes de la suite, $y \leq x \leq qy - x$, donc

$$0 \leq \frac{qy}{2} - x \leq \left(\frac{q}{2} - 1\right)y,$$

ce qui donne : $pq \leq (2 - q)y^2$, soit (comme $2 - q \leq -1$) : $y^2 \leq \left(\frac{q}{2 - q}\right)p \leq 3|p|$. Eu

outre, l'équation $\frac{x^2 + y^2}{xy + p} = q$ entraîne : $(xy + p)((qy - x)y + p) = p^2 + y^4$. Si

$x \leq qy - x$, $(xy + p)^2 \leq p^2 + y^4 \leq 10p^2$, donc $xy < \left(\sqrt{10} + 1\right)|p|$. Il faut donc explorer

tous les $y < \sqrt{3|p|}$, et pour chacun d'eux tous les x tels que $xy < \left(\sqrt{10} + 1\right)|p|$,

pour déterminer toutes les solutions minimales : cela fournit un peu plus de cas que pour $p > 0$, mais c'est du même ordre. Pour $p = -2\,003$, René Manzoni trouve 18 valeurs possibles du produit xy , conduisant à 32 valeurs de q , donc 32 suites de solutions. Et pour tout $p < 0$, il existe au moins une suite de solutions, construite à partir de $y = 1$, $x = 1 - p$.