

## Les problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes », ... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice. La rubrique s'efforce de rendre compte de la pluralité des méthodes proposées par les lecteurs, des généralisations des problèmes...

Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Solutions et énoncés sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,  
9 quai de la Seine,  
75019 Paris.

### Nouveaux énoncés

#### Énoncé n° 299 (Abderrahim OUARDINI, 33-Talence)

Étant donnés  $n$  points sur une sphère (S) de rayon  $R$ ,  $n \geq 3$ , on en choisit deux, et l'on construit le plan perpendiculaire à leur segment et passant par l'isobarycentre des  $(n - 2)$  restants.

Montrer que tous les plans ainsi construits ont un point commun, et que la puissance de ce point par rapport à (S) vaut :

$$\frac{4(n-1)R^2 - K}{(n-2)^2}$$

où  $K$  est la somme des carrés des distances mutuelles des  $n$  points.

#### Énoncé n° 300 (Moubinool OMARJEE, 75-Paris)

Soit  $a_n$ , pour  $n \geq 1$ , une suite d'entiers naturels tels que :

$$\sum_{d|n} a_d = 2^n.$$

Montrer que pour tout  $n$ ,  $n$  divise  $a_n$ .

## Solutions

### Énoncé n° 291 (François LO JACOMO, 75-Paris)

Soit ABC un triangle, O et R le centre et le rayon du cercle circonscrit, H l'orthocentre et H' le symétrique de H par rapport à O. Montrer que le cercle inscrit et les trois cercles exinscrits sont intérieurs au cercle de centre H' et de rayon 4R. Peut-on améliorer ce résultat ?

### SOLUTION

Ce problème s'inscrit naturellement dans la théorie que j'ai baptisée « la complexité des triangles », amorcée il y a plusieurs années avec l'énoncé 245 de la présente rubrique (problème d'Euler), mais qui a sensiblement progressé depuis : il s'agit d'une étude purement algébrique des triangles dans le repère complexe où O et H ont pour affixes 0 et 1 respectivement.

Si  $\alpha, \beta, \gamma$  sont les affixes de A, B, C avec  $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = R$ , et si l'on pose  $w = \frac{\alpha\beta\gamma}{R^2}$ , on a  $|w| = R$ ,  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  et  $w\bar{\alpha} = \beta\gamma$  donc

$$w = w(\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}) = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta.$$

Le fait que les centres I des cercles inscrits (algébriquement, il n'y a pas lieu de distinguer cercle inscrit et cercles exinscrits) aient leurs milieux sur  $\Gamma$ , cercle circonscrit à ABC et cercle d'Euler du quadrangle formé par les points I, au milieu des arcs BC, CA et AB, revient à dire que l'affixe  $u$  de l'un quelconque de ces quatre points I peut s'écrire :  $u = \alpha' + \beta' + \gamma'$ , avec  $\alpha'^2 = \beta\gamma$ ,  $\beta'^2 = \gamma\alpha$ ,  $\gamma'^2 = \alpha\beta$  et  $\alpha'\beta'\gamma' = -wR^2$ . Par ailleurs, le centre de gravité G étant intérieur à  $\Gamma$ ,  $R > \frac{1}{3}$ , et compte tenu de la formule d'Euler (qu'on peut retrouver algébriquement) :

$$u\bar{u} = R^2 - 2Rr$$

( $r$  est négatif pour les cercles exinscrits),  $|u| < R - r$ , donc  $|1 + u| < 4R - r$ .

Or  $1 + u$  est l'affixe de H'I : si  $r > 0$ , ce premier résultat prouve que le cercle de centre I et de rayon  $r$  est intérieur au cercle  $\Gamma'$ , de centre H' et de rayon  $4R$ . D'ailleurs, par le même raisonnement, le cercle circonscrit  $\Gamma$  est lui aussi intérieur à  $\Gamma'$ . Mais pour résoudre notre problème dans le cas des cercles exinscrits ( $r < 0$ ), il faut encore prouver que :  $|1 + u| < 4R + r$ . Et par cette méthode, c'est immédiat, car :

$$1 + u = 1 + \alpha' + \beta' + \gamma' ;$$

comme  $w = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$  et  $\overline{w\alpha'} = -\beta'\gamma'$ , ..., on a :

$$\begin{aligned}
 2R \cdot H'I &= \left| 2w(1 + \overline{\alpha'} + \overline{\beta'} + \overline{\gamma'}) \right| \\
 &= \left| (\beta' - \gamma')^2 + (\gamma' - \alpha')^2 + (\alpha' - \beta')^2 \right| \\
 &\leq |\beta' - \gamma'|^2 + |\gamma' - \alpha'|^2 + |\alpha' - \beta'|^2 \\
 &= 9R^2 - |\alpha' + \beta' + \gamma'|^2 = 8R^2 + 2Rr.
 \end{aligned}$$

Il en résulte bien que  $H'I \leq 4R + r$ , l'égalité n'étant vérifiée que si les cordes  $(\beta' - \gamma')$ ,  $(\gamma' - \alpha')$  et  $(\alpha' - \beta')$  sont colinéaires, donc si le triangle est dégénéré.

Bien évidemment, ce problème pouvait aussi être abordé par des méthodes traditionnelles. J'ai reçu des réponses de Jacques BOROWCZYK (37-Tours), Jacques BOUTELOUP (76-Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Philippe DELEHAM (en 2001 : 24-Périgueux), Edgard DELPLANCHE (94-Créteil), Georges LION (98-Nouméa) et René MANZONI (76-Le Havre).

Que ce soit par la formule d'Al Kashi ou par les relations :

$$\begin{aligned}
 I_A H^2 + I_A O^2 &= 2I_A O^2 + 2OH^2, \\
 I_A H^2 + I_A O^2 &= 2I_A O'^2 + 2O'H^2,
 \end{aligned}$$

( $O'$  milieu de  $OH$  et centre du cercle d'Euler de  $ABC$ ), on obtient facilement :

$$H'I_A^2 = 3OI_A^2 - 2O'I_A^2 + \frac{3}{2}OH^2.$$

Or

$$OI_A^2 = R^2 + 2Rr_A,$$

$$O'I_A = \frac{R}{2} + r_A$$

et

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

mais l'astuce d'Edgard Delplanche est d'utiliser en outre :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(p - a)^2 + 8Rr_A - 2r_A^2,$$

– qui provient de :  $R - r_A = R(\cos \hat{A} - \cos \hat{B} - \cos \hat{C})$ , donc

$$(p - a)^2 - (R - r_A)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 3R^2 + 2R(R - r_A) \quad \text{--}$$

ce qui donne :

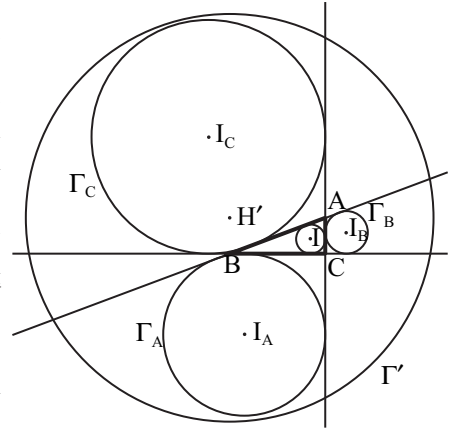
$$H'I_A^2 = (4R - r_A)^2 - 3(p - a)^2.$$

René Manzoni, quant à lui, choisit de fixer les cercles  $\Gamma(O, R)$ , et  $\Gamma_A(I_A, r_A)$  : si  $O'I_A^2 = R^2 + 2Rr_A$ , il existe une infinité de triangles inscrits dans  $\Gamma$  et exinscrits à  $\Gamma_A$ .  $H'$  parcourt alors un arc de cercle, et il reste à calculer  $\sup(H'I_A)$  sur cet arc de cercle.

La question « Peut-on améliorer ce résultat ? » peut s'interpréter diversement. Jacques Bouteloup montre, en faisant tendre le triangle vers un triangle dégénéré ( $R$  étant fixé), que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe des triangles tels que le cercle de centre  $H'$  et de rayon  $4R - \varepsilon$  ne contienne pas tous les cercles exinscrits. Mais quand  $\varepsilon$  tend vers 0, le rayon  $r$  du cercle inscrit tend lui aussi vers 0, donc cela ne prouve pas que

les cercles exinscrits ne sont pas intérieurs au cercle de centre  $H'$  et de rayon  $4R - r$  (comme c'est le cas si le triangle est équilatéral), ou  $4R - kr$  pour une constante  $k$  donnée, ce qui serait une amélioration du résultat. En outre, rien ne prouve que  $H'$  soit le meilleur centre, le plus petit cercle contenant les trois cercles exinscrits pourrait avoir un rayon  $4R - kr$  et un centre autre que  $H'$ .

Prenons l'exemple d'un triangle rectangle, en donnant à  $A, B, C$  les coordonnées :  $(0, 2t), (1 - t^2, 0)$  et  $(0, 0)$  pour  $t$  infiniment grand. Les cercles exinscrits  $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$  étant tangents aux axes de coordonnées, et la distance d'un sommet aux points de contact étant le demi-périmètre du triangle :  $p = t^2 + t$ , il est facile de déterminer les trois centres  $I_A(t - t^2, t - t^2), I_B(t + 1, t + 1)$  et  $I_C(-t - t^2, t + t^2)$  et les trois rayons :  $r_A = t^2 - t, r_B = t + 1$  et  $r_C = t^2 + t$ . Tout cercle contenant  $\Gamma_A$  et  $\Gamma_C$  a un rayon



$$R' \geq \frac{r_A + r_C + I_A I_C}{2}, \text{ car si } \Omega \text{ est son}$$

centre,  $R' \geq \Omega I_A + r_A$  et  $R' \geq \Omega I_C + r_C$ , donc  $R' \geq \frac{r_A + r_C + \Omega I_A + \Omega I_C}{2}$ , l'inégalité

triangulaire permettant de conclure. Or  $\frac{r_A + r_C + I_A I_C}{2} > 2t^2 = 4R - 2$ , alors que

$r = t - 1$  tend vers l'infini. Donc, quel que soit le centre, il est impossible, dans le cas général, de majorer le rayon du plus petit cercle contenant tous les cercles exinscrits par un terme du type  $4R - kr$ ,  $k$  étant une constante aussi petite soit elle. Par contre, comme le montre Marie-Laure Chaillout, le plus petit cercle de centre  $H'$  contenant

les trois cercles exinscrits a un rayon inférieur ou égal à  $\sqrt{16R^2 - 3r^2}$ , ce qui est déjà une amélioration.

Jacques Borowczyk s'intéresse essentiellement au cercle  $\Gamma''$ , tangent intérieurement à  $\Gamma_A, \Gamma_B$  et  $\Gamma_C$ . Il existe un point  $S$ , le point de Spieker, de

coordonnées barycentriques  $(b + c, c + a, a + b)$ , ayant même puissance :  $\frac{r^2 + p^2}{4}$

par rapport à ces trois cercles. L'inversion de centre  $S$  laissant  $\Gamma_A, \Gamma_B$  et  $\Gamma_C$  invariants

transforme donc le cercle d'Euler de  $ABC$  en  $\Gamma''$ , de rayon  $\frac{r^2 + p^2}{4r}$ . Le problème est

que, comme le montre l'exemple ci-dessus du triangle rectangle, ce rayon peut être infiniment supérieur à  $4R$ , le plus petit cercle contenant les trois cercles exinscrits ne leur étant pas obligatoirement tangent. D'où la question : dans quel cas  $\Gamma''$  est-il le cercle cherché ? Marie-Laure Chaillout détermine une condition nécessaire et suffisante : que le centre de  $\Gamma''$  soit intérieur au triangle  $I_A I_B I_C$ .

**Énoncé n° 292 (Jean FARGEAS, 17-La Rochelle et Hassan TARFAOUI, 86-Poitiers)**

Soit trois réels  $a, b, c$  strictement positifs tels que  $a + b + c = 1$ . Démontrer que :

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

Comment peut-on généraliser cet exercice ?

**SOLUTION**

Cet exercice assez classique de DEUG a suscité 25 réponses, de Aziz BARBACHE (El Hajeb, Maroc), Michel BATAILLE (76-Rouen), Richard BECZKOWSKI (71-Chalon s/Saône), François BONOMI (59-Lambersart), Pierre BORNSZTEIN (95-Pontoise), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Alain CORRE (03-Moulins), Jacques DAUTREVAUX (06-St André), Edgard DELPLANCHE (94-Créteil), Christine FENOGLIO (69-Lyon), Jean-Pierre FRIEDELMEYER (68-Osenbach), Michel HEBRAUD (31-Toulouse), Guy HUVENT (59-Hem), Georges LION (98-Nouméa), René MANZONI (76-Le Havre), Charles NOTARI (31-Montaut), Moubinool OMARJEE (75-Paris), Abderrahim OUARDINI (06-Nice), Denis PEPIN (55-Verdun), Maurice PERROT (75-Paris), Raymond RAYNAUD (04-Digne), Pierre RENFER (67-Ostwald), Philippe ROGEON (86-Buxerolles), Pierre SAMUEL (40-Hossegor) et VIDIANI (71-St Jean de Trézy).

C'est en fait une application immédiate de la notion de convexité. La fonction

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \text{ étant convexe (de dérivée}$$

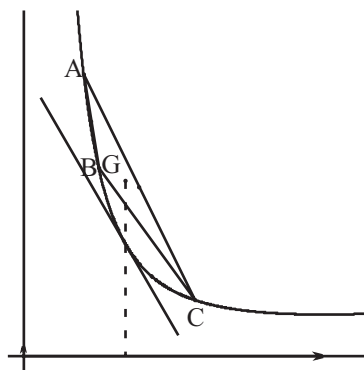
seconde positive) sur  $]0, 1]$  (et même au delà), l'inégalité de Jensen permet d'écrire, quels que soient  $a, b, c$  appartenant à  $]0, 1]$  :

$$\frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3} \geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right),$$

soit  $\frac{100}{9}$  si  $a + b + c = 1$ . Michel Hébraud nous renvoie à l'ouvrage *Inequalities* de Hardy, Littlewood et Polya (Cambridge), mais le fait que si  $f'(x)$  est croissante, la courbe est au dessus de sa tangente :

$$f(x) \geq f\left(\frac{1}{3}\right) + \left(x - \frac{1}{3}\right)f'\left(\frac{1}{3}\right)$$

est amplement suffisant. Le résultat est donc facilement généralisable à une somme de  $n$  termes (et même pour  $n = 1$ , précisent plusieurs lecteurs) :



La notion de convexité :

La courbe est au-dessus de ses tangentes, donc le centre de gravité G est au-dessus de la courbe.

$$\sum_{i=1}^n \left( a_i + \frac{1}{a_i} \right)^2 \geq n \left( \frac{1}{n} + n \right)^2 = \frac{(n^2 + 1)^2}{n}.$$

Si l'on ne veut pas faire appel à la convexité – « en pleine deshérence » selon Georges Lion, mais quand-même utilisée par plus du tiers des lecteurs – et qu'on souhaite éviter les développements trop calculatoires, on peut se contenter de la relation :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

qui se démontre par exemple ainsi :

$$(a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Elle entraîne :

$$\left( \frac{1}{a} \right)^2 + \left( \frac{1}{b} \right)^2 + \left( \frac{1}{c} \right)^2 \geq \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right]^2$$

or

$$(a+b+c) \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right] = 9 + \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} \geq 9.$$

On peut aussi minorer la moyenne arithmétique par la moyenne géométrique :

$$\frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{a} \right)^2 + \left( \frac{1}{b} \right)^2 + \left( \frac{1}{c} \right)^2 \right] \geq \frac{1}{\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}} \geq 9$$

vu que :

$$\frac{1}{3}(a+b+c) = \frac{1}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Plusieurs lecteurs se servent de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, voire de l'inégalité du réordonnement (fort utile dans les compétitions mathématiques) : toutes deux permettent d'écrire :

$$\left( \frac{1}{a} \right)^2 + \left( \frac{1}{b} \right)^2 + \left( \frac{1}{c} \right)^2 \geq \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = \frac{a+b+c}{abc}.$$

On peut également rechercher le minimum d'une fonction. Si l'on fixe l'un des termes, on montre que la somme des deux autres est minimale lorsque ceux-ci sont

égaux – il suffit de dériver :  $\left( x + \frac{1}{x} \right)^2 + \left( k-x + \frac{1}{k-x} \right)^2$  -. Cette méthode

s'applique au cas de  $n$  nombres : si deux d'entre eux sont distincts, la somme ne peut pas être minimale ; donc tous sont égaux. Près d'un quart des lecteurs utilisent les fonctions de plusieurs variables : en posant  $c = 1 - a - b$ ,

$$f(a,b) = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(1 - a - b + \frac{1}{1 - a - b}\right)^2$$

atteint son minimum au point où les dérivées partielles sont nulles.

La généralisation peut également porter sur l'exposant. Marie-Laure Chaillout prouve que si la somme de  $p$  réels strictement positifs est fixe, égale à  $\varepsilon$ , pour tout

réel  $t \geq 1$ , la somme des  $\left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^t$  est minimale lorsque ces réels sont égaux. Si

$0 < t < 1$ , ce résultat reste vrai pour  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Et Pierre Bornsztein obtient le même

résultat pour la somme des  $\left(a_i^\alpha + \frac{1}{a_i^\beta}\right)^t$  pour  $\alpha, \beta$  et  $t$  réels,  $\alpha \geq 1, \beta > 0$  et  $t \geq 1$ , la

somme des  $a_i$  étant égale à 1.

Signalons, pour l'anecdote, qu'en juin 1995, c'est un coup de téléphone d'Hassan Tarfaoui, alors professeur d'Emmanuel Breuillard, qui m'a incité à me préoccuper des Olympiades Internationales de Mathématiques et, par la suite, à participer à la fondation d'Animath. Emmanuel Breuillard, médaille d'or aux Olympiades Internationales 1995, vient de soutenir sa thèse en décembre 2003.