La dérivée, l'intégrale, la primitive un univers de sens

Nicolas Rouche(*)

> Ce que le quotient différentiel et l'intégrale d'une fonction veulent dire dépend de ce que la fonction veut dire, et cela peut être bien des choses.
>
> H. FREUDENTHAL

Le théorème fondamental de l'analyse[1] est celui qui affirme la réciprocité entre la dérivée et l'intégrale. Il est difficile à enseigner, car il s'appuie sur un rapprochement inattendu des notions de pente et d'aire, qui n'ont entre elles aucune parenté visible. On cherche ci-dessous à présenter dans un ordre suggestif les questions de sens principales qui éclairent ce théorème fulgurant.

1. Réinventer un théorème? Un peu

Tout au long de l'histoire, les théories mathématiques ont été élaborées pour répondre à des questions, ce qui correspond au mouvement naturel de la pensée. On s'efforce aujourd'hui d'organiser l'apprentissage des mathématiques pour qu'il en aille de même dans les classes : c'est ce que l'on appelle *enseigner par situations-problèmes*. En d'autres termes, on aimerait que les théories enseignées répondent à des questions que les élèves se posent, ou au moins qu'on les a amenés à se poser. Dans cette perspective, on essaie de créer les conditions pour qu'ils reconstruisent eux-mêmes la théorie autant que possible : c'est la *méthode de la réinvention*[2]. Elle ferait sourire si on la pensait de façon radicale, si on croyait les élèves capables de reconstruire notre héritage mathématique par leurs propres forces. Mais il ne s'agit pas de cela. L'idée est que, chaque fois qu'ils peuvent en un temps raisonnable avancer par eux-mêmes en sondant chaque difficulté, cela vaut mieux que de leur donner des solutions toutes faites. C'est un peu comme d'une part découvrir à pied un paysage accidenté, et d'autre part se faire conduire au but en taxi, voire, s'il s'agit d'une classe entière, en autocar.

(*) CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), 5 rue Émile Vandervelde, B-1400 Nivelles, Belgique; [rouche©math.ucl.ac.be].

(1) Cette dénomination, plus souvent utilisée en anglais qu'en français, semble tout à fait appropriée à son objet.

(2) Voir à ce sujet H. Freudenthal, [1973], chapitre VI et (N.D.L.R.) autre dénomination, en France vers 1930-1950 : méthode de redécouverte, due à Ch. Brunold.

Considérons maintenant la méthode de réinvention appliquée au théorème fondamental de l'analyse. Celui-ci est précisément de ceux dont on ne peut guère espérer que les élèves vont le retrouver tout seuls. Et donc, après ce constat, il faut se demander quelles sont les questions susceptibles de les *amener au bord de ce théorème*, et qu'est-ce qui, dans leur cheminement, demeurera de l'initiative du professeur.

Pour élaborer de telles questions, nous évoquerons deux contextes : d'abord un profil de terrain, et ensuite le mouvement d'un mobile ponctuel. Nous ne ferons appel qu'à trois fonctions très simples, à savoir

$$f(x) = 1 - x, \tag{1}$$

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2}, \tag{2}$$

$$h(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}. \tag{3}$$

On voit que g est une primitive de f et que h est une primitive de g.

Les tableaux 1, 2 et 3 donnent un échantillonnage numérique de ces fonctions. Les figures 1, 2 et 3 en donnent une expression graphique.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$f(x)$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0

Tabl. 1

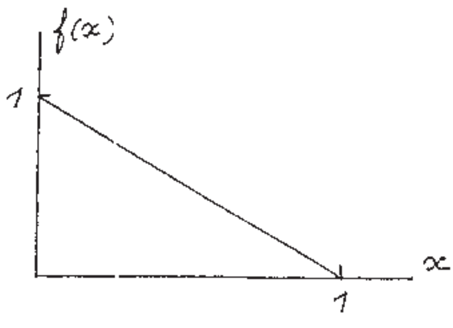

Fig. 1

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$g(x)$	0,0	0,095	0,18	0,255	0,32	0,375	0,42	0,455	0,48	0,495	0,5

Tabl. 2

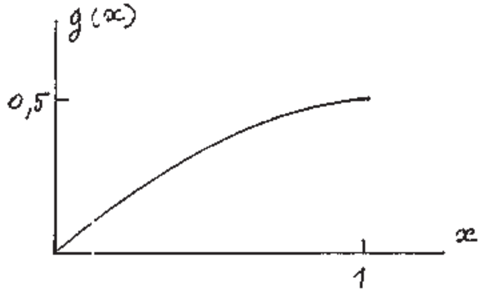

Fig. 2

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
h (x)	0,000	0,005	0,019	0,041	0,069	0,099	0,144	0,188	0,235	0,284	0,333

Tabl. 3

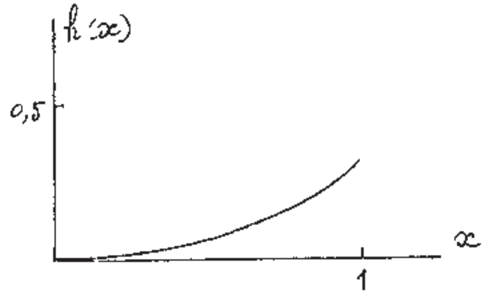

Fig. 3

2. Un profil de terrain

Supposons que la figure 2 représente à l'échelle le profil d'un terrain. Les abscisses x sont des distances mesurées à partir de l'origine, et les ordonnées $g(x)$ donnent la hauteur du terrain à chaque abscisse x. Disons que l'unité choisie sur chacun des axes représente 1 km. Le tableau 2 décrit numériquement le même profil.

Un profil de terrain est une donnée concrète, et la figure 2, interprétée comme nous venons de le faire, est très réaliste. En effet, le profil représenté sur la figure est semblable, au sens géométrique du terme, au profil réel et les pentes mesurées sur la figure sont les mêmes que sur le terrain. L'intuition y trouve d'emblée son compte.

Voici trois questions qu'on peut raisonnablement se poser à propos du profil :

- Quelle est sa pente en chaque point ?
- Si on connaît la pente en chaque point, comment retrouver le profil ?
- Si on veut niveler le terrain, à quelle hauteur faut-il situer le terrain nivelé pour que les remblais équilibrent les déblais ?

Examinons successivement chacune de ces trois questions. Nous supposons que les élèves à qui on les soumet ne connaissent ni la dérivée, ni l'intégrale, mais qu'ils savent toutefois ce qu'est la pente d'une droite.

2.1. Du profil à la pente

On demande de déterminer la pente en chaque point du profil donné par la figure 2.

Il y a une chance pour que les élèves cherchent la pente en un point en positionnant à l'estime une règle selon la tangente en ce point, comme le suggère la figure 4. Il leur reste ensuite à déterminer la pente de la règle par des mesures. Ils auront ainsi fait un pas vers la dérivée.

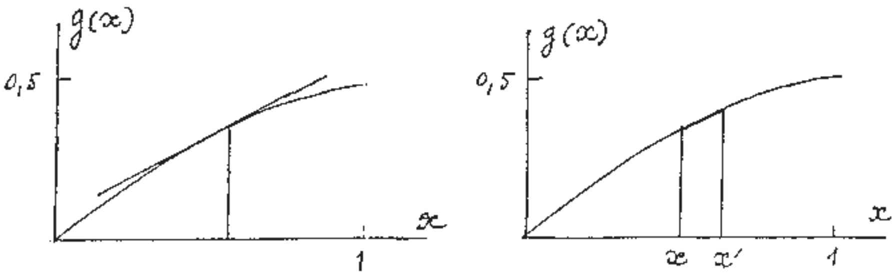

Fig. 4 et 5

Si par ailleurs on leur donne aussi le tableau 2, il y a une chance pour qu'ils approximent la pente en un point x par le quotient différentiel

$$\frac{g(x')-g(x)}{x'-x},$$

dans lequel x et x' sont deux valeurs voisines du tableau. La figure 5 donne une interprétation graphique de cette démarche.

Des élèves qui ne connaissent pas encore la dérivée et auxquels on fournirait la formule (2) n'auraient pas d'autre recours que de mettre cette formule en graphique ou en tableau.

Une fois la pente évaluée en un certain nombre de points, on peut rassembler ces résultats en un tableau. Celui-ci sera une approximation du tableau 1. Et on peut, à partir de là, dresser un graphique des pentes. Ce graphique sera une approximation de celui de la figure 1.

2.2. De la pente au profil

Posons maintenant le problème inverse. Supposons que la figure 1 et le tableau 1 donnent les pentes d'un terrain en chaque point sur une distance de 1 km. On demande de trouver le profil du terrain.

Première difficulté : alors que sur le profil *on voit les pentes*, sur le graphique des pentes, *on ne voit pas celles-ci*. Pour arriver à ce dernier graphique, il a fallu d'abord exprimer les pentes numériquement, et ensuite les représenter par des ordonnées après avoir choisi une unité arbitraire. Le graphique des pentes donne de celles-ci une *expression symbolisée*. *A priori*, on ne peut l'exploiter qu'en revenant à l'expression numérique des pentes, c'est-à-dire en fait au tableau 1.

Ceci dit, la méthode la plus à portée des élèves pour trouver le profil est sans doute celle-ci : partir de la pente à l'origine, et en supposant qu'elle demeure constante sur une petite distance, dessiner, *dans les axes* (*distance*, *hauteur*), un petit bout de droite ayant cette pente. Ensuite, au point suivant où la pente est donnée, raccorder ce petit bout de droite à un autre ayant la nouvelle pente, et ainsi de suite. C'est ce que montre la figure 6. Il s'agit de la *méthode d'intégration d'Euler*. On ne peut pas dire qu'elle va de soi, mais elle n'est pas non plus inaccessible à l'imagination. Qui plus est, elle peut aussi induire l'idée que l'on trouve les hauteurs en accumulant des accroissements de hauteur, c'est-à-dire en faisant une somme.

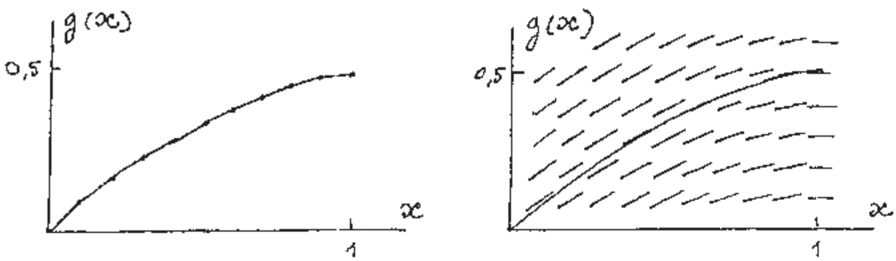

Fig. 6 et 7

Un observation est ici opportune. À la figure 6, on a fait partir le profil de l'origine des coordonnées. Or rien n'obligeait à faire ce choix : la hauteur au point de départ ne nous était pas imposée, car le tableau 1 nous donnait seulement les pentes. Si nous étions partis d'un point différent, nous aurions construit un profil translaté de celui qui part de l'origine.

Cette remarque suggère une autre façon de déterminer le profil. Tout ce qu'on connaît dans le système d'axes (distance, hauteur), c'est, en tout point, la pente de la courbe qui pourrait passer en ce point. La figure 7 montre ces pentes en une multitude de points elle représente ce que l'on appelle un *champ d'éléments de contact*. Pour tracer sur cette figure un des profils possibles, on part d'un point sur l'axe des hauteurs, puis on dessine à vue une courbe qui *épouse* au mieux les éléments de contact dessinés. Sur la figure 7, nous sommes partis à nouveau de l'origine.

Terminons par une remarque importante. Celui qui connaît le théorème fondamental de l'analyse sait que l'on peut trouver le profil autrement. En effet, la hauteur à chaque distance x est, à une constante près, égale à l'aire sous la courbe des pentes depuis 0 jusqu'à x. On peut donc calculer les *hauteurs* en calculant des aires, ce qui se fait en travaillant sur le graphique des *pentes*. Mais il est plus naturel, pour reconstituer le profil, de travailler directement, comme ci-dessus, sur le graphique du profil. *Les élèves n'ont aucune chance d'arriver spontanément au profil en estimant des aires sous la courbe des pentes.*

Remarquons en outre que les aires en question sont en quelque sorte des aires fausses, puisque les axes de coordonnées sont certes munis d'une unité, mais celle des ordonnées n'est pas une unité de longueur : les aires perçues sur le graphique ne renvoient pas à des aires dans la réalité.

2.3. Niveler le terrain

Revenons maintenant à la figure 2 et au tableau 2 et posons une question toute nouvelle. Si on veut niveler le terrain, à quelle hauteur faut-il situer le terrain nivelé pour que les remblais équilibrent les déblais ?

Le problème revient, comme le montre la figure 8, à situer sur le graphique du profil une droite horizontale telle que l'aire sous cette droite soit égale à l'aire sous le profil. Une première façon de procéder consiste à situer une telle droite à l'estime, de sorte que l'aire de la surface A soit égale à celle de la surface B. Mais on peut souhaiter plus de précision, ce qui amène à rechercher l'aire sous le profil.

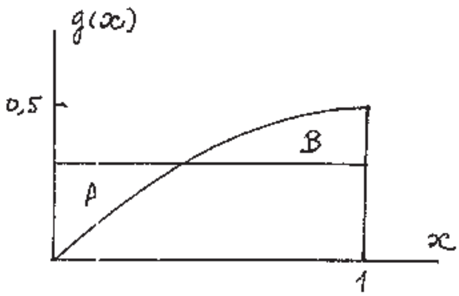

Fig. 8

Des élèves qui entreprennent de déterminer cette aire ont souvent pour première réaction de remplir au mieux la surface avec des polygones simples (triangles, rectangles, trapèzes) dont ils savent calculer les aires(3). Et ensuite ils additionnent celles-ci. C'est ce que la figure 9 suggère.

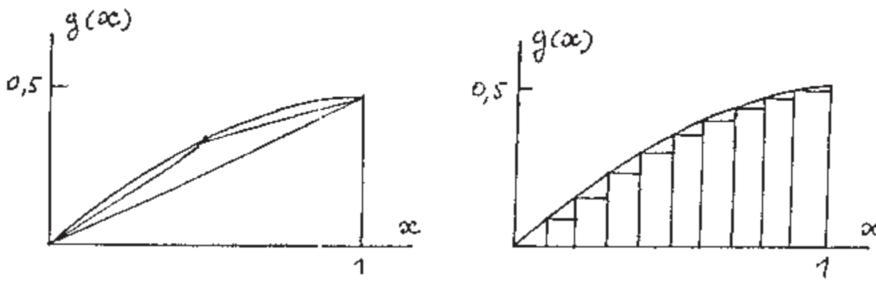

Fig. 9 et 10

(3) Un tel remplissage par des polygones était le procédé utilisé dans la méthode d'exhaustion, en usage dans l'antiquité. Sur cette méthode, voir par exemple A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer, [1986].

Si on leur demande de partir non plus du profil mais du tableau 2, il y a une chance pour qu'ils évaluent l'aire en supposant que les hauteurs qui leur sont données demeurent constantes chacune sur une petite distance, égale à l'intervalle tabulaire. Ce qu'ils font ainsi numériquement est représenté graphiquement à la figure 10. Ils additionnent les aires de tous les rectangles. Ainsi, en partant du tableau, ils ont une chance de se rapprocher des *sommes de Riemann*. Une variante fréquemment observée de ce procédé consiste à approximer l'aire non plus par des rectangles, mais par des trapèzes, ce qui permet de serrer la courbe de plus près.

S'ils construisaient la somme pas à pas, ils dresseraient une approximation du tableau 3. De cette façon, ils s'approcheraient de la *fonction-aire* (l'aire sous la courbe depuis l'origine jusqu'à une abscisse courante). Mais ils n'ont guère de raison d'agir ainsi, car vu la question posée, ils ne s'intéressent qu'à la somme totale. Ainsi, dans le problème posé, la fonction-aire est en quelque sorte présente en arrière-plan, mais elle n'est ni nécessaire, ni naturelle.

Ici aussi, une remarque s'impose. Celui qui connaît le théorème fondamental de l'analyse sait qu'on peut trouver l'aire autrement. En effet, la hauteur donnée en chaque abscisse x par la courbe du profil est aussi la pente de la fonction-aire. C'est une pente symbolisée par une ordonnée. Il est donc possible de construire approximativement la fonction-aire dans le système d'axes (distance, aire) en articulant bout à bout des petits segments de pente constante, c'est-à-dire en appliquant la méthode d'Euler. *Mais le contexte du problème est tel que les élèves n'ont aucune chance d'interpréter ainsi des hauteurs comme des symboles de pentes*.

Dernière remarque : nous avons posé un problème de nivellement qui conduit plus généralement à l'idée de valeur moyenne. Nous aurions pu induire plus directement l'idée de quadrature en demandant de cuber les terres délimitées par le profil et considérées sur une certaine largeur constante.

3. Un mouvement

Venons-en maintenant à un tout autre contexte, à savoir celui d'un mouvement rectiligne d'un mobile ponctuel.

Alors qu'un profil de terrain est une chose immobile et que l'on peut considérer à loisir, un mouvement est un phénomène fugitif, beaucoup plus difficile à saisir. Pour l'étudier en détail, il est quasi indispensable de le figer d'abord en un graphique qui, par ailleurs, ne lui ressemble guère. Supposons donc que la figure 3 donne la position $h(x)$ d'un mobile à l'instant x. Pour fixer les idées, disons que l'unité de temps est la seconde, et que l'unité sur l'axe des ordonnées est le mètre. Sur un tel graphique, les temps sont symbolisés géométriquement par des longueurs. L'axe des $h(x)$ représente fidèlement, à l'échelle, la droite du mouvement réel (rappelons que nous avons supposé le mouvement rectiligne). Toutefois, pour beaucoup d'élèves, il est perturbant d'avoir à considérer le mouvement sur une « verticale ». Qui plus est, le fait de désigner le temps par x peut aussi être troublant pour certains. Nous avons cependant écrit x et $h(x)$ plutôt que t et $h(t)$ pour mieux souligner l'analogie formelle de nos deux contextes – celui du terrain et celui du mouvement – par delà leurs différences concrètes.

Ceci dit, des questions qu'on peut raisonnablement se poser à propos d'un mouvement sont

- Étant donné le mouvement décrit graphiquement ou numériquement, quelle est sa vitesse à chaque instant ? Et son accélération ?
- Si on connaît la vitesse à chaque instant, peut-on retrouver les positions en fonction du temps ?
- Si on connaît la masse du mobile et la force qui lui est appliquée à chaque instant, peut-on déterminer son mouvement?

Examinons successivement chacune de ces trois questions. Nous supposons ici aussi que les élèves à qui on les soumet ne connaissent ni la dérivée, ni l'intégrale, mais qu'ils sont familiers des mouvements rectilignes et uniformes et de leur représentation graphique.

3.1. Des positions aux vitesses et aux accélérations

On demande de déterminer la vitesse et l'accélération à chaque instant pour le mouvement décrit par la figure 3 et le tableau 3.

Occupons-nous d'abord des vitesses. Les élèves partiront vraisemblablement du tableau et approximeront la vitesse à un instant x par le quotient différentiel

$$\frac{h(x') - h(x)}{x' - x},$$

où x et x' sont deux valeurs voisines du tableau.

S'ils considèrent d'abord le graphique, il y une chance qu'ils adoptent la même démarche, mais en partant des valeurs lues sur les axes.

Supposons par ailleurs que, lors de leur étude des mouvements rectilignes et uniformes, ils aient bien compris que l'on peut assimiler la vitesse à la pente du graphique. Alors, ils penseront peut-être à déterminer la vitesse à un instant donné du mouvement non uniforme en positionnant à l'estime une règle selon la tangente au graphique. Ils s'approcheront ainsi de la notion de *mouvement uniforme tangent*. Il leur restera alors à déterminer par des mesures la vitesse de celui-ci.

Une fois la vitesse déterminée en un certain nombre d'instants, on peut rassembler ces résultats en un tableau. Celui-ci sera une approximation du tableau 2. Et on peut également mettre les vitesses en graphique, ce qui conduit à une approximation du graphique de la figure 2.

Venons-en maintenant aux accélérations. Des élèves qui en seraient restés aux mouvements rectilignes et uniformes n'ont aucune raison d'avoir acquis une idée intuitive de cette notion. Il leur faudra donc apprendre que l'accélération est le taux de variation de la vitesse, ou si on veut, la vitesse de la vitesse. Mais le champ de leur réflexion technique sera le graphique de la figure 2, ou le tableau 2. Dans les deux cas, les données en cause sont soit chiffrées – ce sont des mesures – soit symbolisées géométriquement dans un système d'axes. Impossible de repasser de là à une réalité tangible, sensible, sans des opérations délicates de décodage. L'intuition devient plus malaisée, moins immédiate. Nous ne nous étendrons pas ici sur les travaux d'approche, dans ce contexte, de la dérivée seconde et de son sens.

Si les élèves arrivent à une familiarité suffisante avec l'accélération, il est intéressant de leur parler de la loi fondamentale de la mécanique, et après leur avoir proposé une masse pour le mobile, de leur faire évaluer en fonction du temps, la force requise pour provoquer le mouvement donné(4).

3.2. De la vitesse à la position

On demande de déterminer la position du mobile à chaque instant, sachant que sa vitesse est donnée en fonction du temps x par le graphique de la figure 2 et par le tableau 2.

Un tel problème pouvait se poser autrefois pratiquement à un navigateur par temps de brouillard. Dans l'impossibilité de faire le point, mais capable de mesurer sa vitesse par rapport à la mer, il pouvait estimer de combien il avançait.

Il y a bien des chances que les élèves attaquent la question à partir du tableau et qu'ils travaillent sur le graphique du mouvement $(x, h(x))$ (celui où on peut avoir une idée intuitive des positions), en enchaînant des petits mouvements à vitesse constante, c'est-à-dire en utilisant la méthode d'Euler.

S'ils l'ont déjà vu dans une autre circonstance, peut-être utiliseront-ils un champ d'éléments de contact.

Quoiqu'il en soit, *il y a peu chance pour qu'ils pensent à la fonction-aire sous le graphique des vitesses comme donnant la position en fonction du temps*, à moins qu'ils ne soient déjà familiers de cette interprétation dans le cas des mouvements uniformes.

Et au cas où on leur aurait demandé non pas la position à chaque instant, mais seulement l'espace parcouru par le mobile au terme du mouvement, *il y a peu de chance également pour qu'ils évaluent cet espace en cherchant l'aire sous la courbe des vitesses à l'aide d'un pavage par des trapèzes, triangles, …*

D'ailleurs, ces aires sous la courbe des vitesses sont des aires fausses, puisqu'aucun des deux axes n'est muni d'une unité de longueur.

3.3. De la force à la position

On demande de déterminer la position du mobile à chaque instant, sachant que sa masse égale 1 kg et que la force à laquelle il est soumis est donnée en fonction du temps par le graphique de la figure 1 ou par le tableau 1.

Pour répondre à la question, les élèves doivent connaître la loi fondamentale de la mécanique (c'est un peu plus que ce que nous avons supposé jusqu'ici). Si tel est le cas, ils calculeront sans peine le tableau donnant l'accélération du mobile en fonction du temps. Mais il leur faudra ensuite remonter de l'accélération à la vitesse, puis de cette dernière à la position, faisant ainsi deux intégrations en chaîne(5).

Mais la première de ces intégrations, partant du contexte très abstrait des accélérations, n'est sans doute pas à la portée des élèves s'ils sont inexpérimentés.

---

(4) Exemple de question de ce genre : quelle force constante est capable d'amener un auto de 800 kg à 80 km/h en 30 secondes ?

(5) Remonter de l'accélération à l'espace parcouru peut être intéressant pour un navigateur interplanétaire. En effet, faute d'une système de référence, il ne peut pas mesurer sa vitesse, mais par contre il peut mesurer son accélération à l'aide d'un dynamomètre lesté d'une masse.

Mieux vaut, si tel est le cas, attendre, pour leur proposer de passer de la force au mouvement, qu'ils aient assimilé le calcul des primitives. Ils résoudront alors la question à partir de données analytiques et par primitivation.

4. Synthèse et commentaires

4.1. Un chemin parfois facile, parfois bouché

Résumons nos démarches, en essayant de les situer. Comme annoncé, nous avons posé quelques questions susceptibles de rapprocher les élèves du *théorème fondamental*. Ces questions avaient trait à deux contextes classiques d'application de l'analyse : un profil de terrain et un mouvement. Dans les deux cas, nous avons étudié trois étages sur l'échelle ascendante – pour ainsi dire – des intégrations (ou descendante des dérivations).

En ce qui concerne le premier contexte, l'étage le plus accessible à l'intuition était celui du milieu, à savoir le profil du terrain. C'est donc de là que nous sommes partis. Nous sommes passés d'abord du profil aux pentes par deux procédés qui ne bousculent pas trop le sens commun : l'ajustement à vue d'une tangente et le quotient différentiel.

Nous sommes ensuite remontés des pentes au profil en appliquant la méthode d'Euler ou celle des éléments de contact, qui nous permettaient de travailler avec de vraies pentes sur le graphique le plus évident, celui du profil. Nous avons remarqué à quel point était inaccessible, à ce stade, l'idée de retrouver le profil en calculant des aires sous la courbe des pentes.

Nous sommes ensuite passés du profil à l'aire sous le profil (cubage des terres) soit par pavage de l'aire en question avec des polygones, soit par une somme de Riemann. Nous avons remarqué à quel point était inaccessible, à ce stade, l'idée de passer du profil à l'aire par la méthode d'Euler, c'est-à-dire en interprétant les hauteurs du terrain comme des pentes sur le graphique de la fonction-aire. Ceci est d'autant plus vrai que la fonction-aire elle-même, dans ce contexte, ne joue aucun rôle, si ce n'est comme voie d'accès à l'aire totale.

En ce qui concerne le mouvement, les trois étages étaient, en descendant, les positions, les vitesses et les accélérations. Nous sommes partis de l'étage du dessus, le plus accessible à l'intuition, même si, comme nous l'avons vu, il n'est pas aussi évident qu'un profil de terrain. Partir de l'étage supérieur nous a donné l'occasion de dériver deux fois, la deuxième fois dans un contexte plus abstrait que la première.

Nous avons ensuite exécuté le retour des vitesses vers les positions. La méthode d'Euler et celle des éléments de contact étaient seules compatibles avec l'intuition à ce stade : en particulier, elles nous amenaient à travailler sur le graphique des positions, le plus facile des trois à interpréter. Et nous avons noté à quel point il était, à ce stade, peu naturel d'interpréter les aires sous la courbe des vitesses comme des distances parcourues par le mobile.

Enfin, revenant à l'étage inférieur, c'est-à-dire celui des accélérations (ou des forces), nous sommes remontés aux positions par deux intégrations successives.

Une remarque d'ensemble : le fait d'avoir proposé chaque fois les données sous la double forme graphique et numérique a joué un rôle dans l'émergence des méthodes. D'abord, l'expression graphique nous a conduits au pavage par des polygones et à l'ajustement d'une tangente, ce qu'un tableau n'aurait pas permis. Et ensuite, l'expression numérique dans un tableau a facilité l'apparition du quotient différentiel et des sommes de Riemann.

4.2. Un dénouement difficile

Au terme de ce parcours, il reste un pas essentiel à accomplir, celui, pour le dire rapidement, qui consiste à voir la parenté entre le calcul d'une aire et la reconstruction d'un profil dont on connaît les pentes, ou encore entre le calcul d'une aire (fictive) et la reconstruction d'un mouvement. Cette parenté apparaît dans *l'identité des processus numériques* utilisés dans les deux cas, on somme des produits de la forme

$$f(x_i)\Delta x_i.$$

Dans le calcul de l'aire, f est la fonction sous laquelle on calcule l'aire ; dans la reconstruction du profil, $f(x_i)$ est la pente au point x_i du profil cherché. Dans les deux cas, Δx_i est l'intervalle tabulaire.

Cette identité des deux processus est d'autant plus difficile à percevoir que les questions auxquelles ils répondent semblent parfaitement étrangères l'une à l'autre. Mais lorsqu'on y est arrivé, on peut voir la hauteur d'une courbe (sous laquelle on recherche une aire) comme symbole de la pente d'une fonction-aire à laquelle on ne pense pas spontanément ; et on peut interpréter le profil que l'on cherche comme la fonction-aire sous la courbe qui donne sa pente (son taux de variation), ce qui ne s'impose pas davantage à l'intuition.

L'avantage décisif de cette identification ne pourra bien entendu être aperçu que par des élèves qui, devenus familiers avec la dérivation, réaliseront combien il est plus pratique de primitiver que d'intégrer.

4.3. La symbolisation des grandeurs

Analysons davantage ce qui, dans le contexte qui nous occupe, fait obstacle à la pensée créative. Pour tenter une explication, remontons aux grandeurs et aux façons de les représenter. De tout temps, on a représenté les grandeurs (les choses mesurables) par des segments. La raison en est simple : les segments sont les objets doués de grandeur (de longueur en l'occurrence) les plus faciles à comparer, à additionner, à multiplier par un nombre. Que l'on songe par contraste à la difficulté de ces opérations lorsqu'on les applique aux surfaces, aux volumes, aux masses, … Lorsque Euclide évoque des grandeurs en général, comme au Livre V, il les représente par des segments. Les segments sont tellement parlants qu'il s'en sert même – dans les livres arithmétiques –, pour représenter les nombres naturels(6).

Or qu'arrive-t-il à l'époque de Leibniz et de Newton, au moment de la découverte du théorème fondamental ? Par la force de la théorie, le mode de représentation des grandeurs *se détriple*. Pour saisir le théorème, il faut apprendre à circuler entre les

(6) Du moins est-ce là ce que l'on constate dans les éditions modernes des Éléments (voir par exemple Euclide, trad. [1994]). On peut supposer que cette pratique remonte à une tradition très ancienne.

longueurs, les aires et les pentes, qui deviennent les trois modes privilégiés de représentation des grandeurs de toutes sortes[7]. Or symboliser une grandeur par une autre impose un effort de décodage. Recourir dans un même problème à trois modes de symbolisation est plus difficile que de recourir à un seul, et ce d'autant plus que les deux nouveaux modes, à savoir les aires et les pentes, sont loin d'avoir la même évidence, la même facilité de manipulation que les longueurs (les segments).

4.4. Où sont les limites, le calcul et le reste ?

Les questions que nous avons posées et les méthodes auxquelles nous avons recouru convergent vers le théorème fondamental de l'analyse. Elles montrent que le calcul différentiel et le calcul intégral ne sont pas deux théories distinctes qui auraient vocation de se rencontrer un jour (vers la fin des études), mais au contraire que la dérivée, l'intégrale et la primitive sont trois facettes d'une même structure théorique.

Nous n'avons pas mené la construction théorique à son terme, cela va de soi. Tout au plus avons-nous ouvert un chantier. Celui-ci demeure jonché de pièces diverses, dont nous voyons toutefois clairement comment elles s'organisent. En fait, cette esquisse d'une organisation globale a davantage mobilisé notre attention que les difficultés de mettre au point chacune des pièces de l'ensemble. Il reste beaucoup à faire. Montrons cela.

Un premier aspect du théorème fondamental que nous n'avons pas abordé, est que nos méthodes graphiques et numériques sont toutes approximatives. Que pour les rendre plus exactes, il faut affiner les techniques : essentiellement augmenter la précision des mesures et resserrer l'intervalle tabulaire. Mais si on fait cela, on provoque deux effets pervers : d'une part le numérateur et le dénominateur des quotients différentiels deviennent plus petits, ils comportent moins de chiffres significatifs et la précision de la division diminue, et de l'autre le nombre des termes des sommes de Riemann augmente et les erreurs d'arrondi s'accumulent.

On résout ces difficultés en représentant les données analytiquement au lieu de graphiquement ou numériquement, et en passant aux limites. Il s'agit là d'un développement important, majeur même, porteur d'un grand avenir, mais qui est seulement, *au départ*, un outil pour faire fonctionner plus exactement une méthode déjà élaborée de calcul des aires et de passage des fonctions à leur taux de croissance et réciproquement.

Le deuxième aspect du théorème fondamental que nous n'avons pas abordé ne peut venir qu'après le concept de limite. En effet, calculer des limites, des dérivées et des intégrales en appliquant les définitions est le plus souvent une opération lourde, appuyée sur un jeu délicat de quantificateurs logiques. Or on peut dans de nombreux cas réduire ces calculs à des manipulations purement algébriques. Il s'agit donc, ici aussi, de remplacer un outil déjà découvert, mais d'usage malaisé, par des outils plus performants, pour remplir les mêmes fonctions.

(7) Notons qu'Oresme, au XIVe siècle, représentait (ou était tout près de représenter, la chose est controversée) déjà par l'aire d'un triangle, l'espace parcouru dans un mouvement uniforme (voir à ce sujet A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer, [1986]).

Si, dans cette étude, nous n'avons ainsi développé ni les représentations analytiques des fonctions, ni le recours aux limites, ni le calcul algébrique de celles-ci, c'est simplement que notre objectif était – répétons-le –, de montrer une façon d'arriver *au bord du théorème fondamental*.

Par delà les aspects de ce théorème que nous venons d'évoquer, on saisit d'autant mieux la portée de celui-ci qu'on trouve à l'appliquer dans des contextes nouveaux et divers : les valeurs moyennes et les indices de dispersion et d'asymétrie en probabilité, les centres et moments d'inertie en mécanique, les charges, courants et différences de potentiel en électricité, etc. La théorie de la poutre en résistance des matériaux possède cette propriété intéressante qu'on y découvre *cinq* étages significatifs sur l'échelle des intégrations successives : à partir de la charge de la poutre, on calcule l'effort tranchant, puis le moment fléchissant, et enfin, par deux intégrations successives, on arrive à la forme de la poutre, qu'on appelle *l'élastique*. On trouve cette théorie dans tous les cours quelque peu approfondis de résistance des matériaux.

Enfin, pour faire voir aux élèves la puissance du théorème fondamental, il est intéressant aussi de leur montrer – fut-ce rapidement –, la méthode d'exhaustion et la méthode des indivisibles de Cavalieri(8), et de leur expliquer comment ces deux méthodes ont proprement disparu des mathématiques enseignées – elles ont sombré –, à la suite de la découverte du théorème fondamental. Il s'agit là d'un accident historique majeur.

5. Retour sur la méthode de réinvention

5.1. La part du professeur, la part de l'élève

Au début de cette étude, nous avons parlé de la méthode de réinvention appliquée à l'apprentissage des mathématiques. Cherchons maintenant à dégager, dans les questions posées ci-dessus, les parts d'initiative du professeur et des élèves.

Tout d'abord, c'est évidemment le professeur qui décide de donner à étudier des questions aussi hétéroclites *a priori* que des pentes, des aires, des vitesses, … Lui seul a choisi de faire explorer ces notions, pour la double raison qu'elles sont porteuses d'intuitions dans l'univers familier et qu'elles permettent de s'approcher d'un théorème inattendu.

C'est aussi le professeur qui décide de fournir les données dans les deux versions géométrique (des courbes) et numérique (des tableaux). Il sait en effet que ces deux modalités induisent des méthodes de résolution distinctes et complémentaires, porteuses d'un avenir théorique : celles-ci préfigurent successivement la dérivée, la tangente, la primitive, l'intégrale, la méthode d'Euler dans sa version rigoureuse, etc.

Les élèves peuvent alors s'attaquer aux questions posées et y faire montre d'initiative avec de bonnes chances de succès, car elles sont à portée de leur expérience et de leurs intuitions. Ils accumulent au passage des observations variées.

(8) Sur la méthode de Cavalieri, voir entre autres A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer, [1986]. Cette méthode consiste, pour l'essentiel, à ramener la comparaison des aires de deux surfaces à celle des intersections de ces deux surfaces avec des droites toutes parallèles à une droite donnée.

Ils constatent peu à peu des parentés cachées entre pentes et vitesses, même si le lien entre ces deux concepts et les aires ne leur apparaît pas encore.

Il faut ensuite à peu près sûrement une intervention du professeur pour provoquer le aha ! décisif, le constat de réciprocité entre les recherches de pentes et d'aires.

Qu'on nous permette une métaphore. Les choses se passent un peu comme s'il s'agissait de gravir la montagne du théorème fondamental. Le professeur (ou plutôt le programme) impose d'en faire l'ascension. À quelque endroit qu'ils se trouvent au pied de la montagne, les élèves sont le nez dessus et n'en aperçoivent que les premières pentes.

Le professeur leur propose de faire deux fois l'ascension, par deux vallées qu'il a sélectionnées pour leur facilité, la vallée du terrain et celle du mouvement. D'une vallée on ne voit pas l'autre et réciproquement. Les élèves font les deux expéditions. Et lorsqu'ils arrivent au sommet la deuxième fois, le guide (le professeur) les amène à voir les deux vallées en même temps et l'analogie de leurs configurations.

Ceci fait, il reste encore, nous l'avons dit, à mettre l'ordre de la logique dans le paysage conquis à tâtons, et ce n'est pas peu de chose. Mais c'est la condition pour aller plus loin.

On accède à cet ordre logique en éliminant les contextes, c'est-à-dire les référents de la théorie. C'est une mise entre parenthèses du sens, provisoire et inévitable. Si on nous permet une deuxième métaphore : pour voir le squelette, il faut enlever la chair. Heureusement que cette métaphore est infidèle à la réalité physiologique sur un point important : en mathématiques, on ne perd pas la chair, on peut la remettre en place, puis la faire prospérer, d'autant mieux qu'on la sait soutenue par un squelette solide et équilibré.

5.2. Des questions trop stylisées ?

Pour nous approcher du théorème fondamental, nous avons imaginé un profil de terrain et un mouvement modélisés par des polynômes simples. C'était peu réaliste. Les services des ponts et chaussées n'ont pas besoin d'un polynôme pour représenter les accidents de terrain. Et nous n'avons rattaché notre équation de mouvement à aucune observation d'un mobile réel. Ne vaudrait-il pas mieux, dans les classes, éviter de telles fictions et parler plutôt de la réalité ? Ne serait-ce que pour éviter l'interrogation légitime : à quoi ça sert ?

Mais il se fait que la plupart des situations réelles sont compliquées par des effets secondaires qui risquent de détourner l'attention des élèves du cœur de la question à étudier. Par exemple, dans les problèmes de terrassement, la terre remuée a plus de volume que la terre tassée : c'est le phénomène de foisonnement. Ou encore, dans la chute des corps, les lois en t^2 sont perturbées par les frottements.

Il en résulte que des situations idéalement simples se prêtent mieux à la réflexion sur les phénomènes mathématiques fondamentaux, car ceux-ci sont par eux-mêmes assez subtils pour absorber *toute* l'attention des débutants.

Et donc, dans ce genre de circonstances, au lieu de chercher à motiver les élèves par une fidélité scrupuleuse à la réalité, mieux vaut les tenter par l'aventure intellectuelle profonde, par la joie de comprendre un phénomène surprenant. Il est vrai que cela ne va pas toujours de soi, c'est le moins que l'on puisse dire. Pourtant, les petits enfants montrent plus souvent que leurs aînés la jubilation d'avoir saisi une chose difficile. N'est-ce pas un objectif de l'école d'entretenir jusqu'à l'âge adulte cette joie de la découverte ?

5.3. Réinvention ou épistémologie ?

Terminons par une remarque. Dans cet exposé, nous avons évoqué le professeur et les élèves, et tenté de discerner leurs rôles respectifs. Mais là n'était peut-être pas l'essentiel. Ce que nous avons fait surtout, c'est éclairer le passage de certaines questions et connaissances de sens commun vers le théorème fondamental. La préhistoire et l'histoire de ce théorème sont certes essentielles, mais longues et tortueuses. Nous avons cherché à montrer – modestement –, qu'il pouvait être éclairant aussi de faire naître *directement* – sans passer *explicitement* par l'histoire –, ce morceau de mathématiques des connaissances communes qui le préfigurent.

Pour une analyse épistémologique approfondie du théorème fondamental, on consultera utilement M. Schneider [1988]. La présente étude est l'aboutissement de réflexions qui ont mûri au fil des années, d'abord au sein du Groupe AHA (voir la bibliographie), et ensuite à l'occasion des discussions sur l'analyse au G.E.P.S. (voir également la bibliographie) et d'un exposé lors d'une journée académique à Paris le 7 mars 2002. Un amical merci à tous les collègues de ces deux groupes pour leurs critiques constructives. E. Barbin, J.-Y. Gantois, Th. Gilbert et M. Krysinska ont très utilement commenté la dernière rédaction : bien merci à eux également.

Bibliographie

A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer, *Une histoire des mathématiques, routes et dédales*, Seuil, Paris, 1986.

Euclide, *Les éléments*, vol. 2, trad. B. Vitrac, 1994.

H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*, Reidel, Dordrecht, 1973.

M. Schneider, *Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul des primitives*, thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve, 1988.

G.E.P.S. (Groupe d'Experts pour les Programmes Scolaires de mathématiques), *Accompagnement des programmes, classes terminales de la série scientifique et de la série économique et sociale*, Centre National de Documentation Pédagogique, Paris, 2002.

Groupe AHA, *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse*, De Boeck-Wesmael, Bruxelles, 1999.