Résolution numérique d'équations différentielles en série S : la méthode d'Euler

Rémy Coste(*)

Cet article est une suite du précédent. D'ambition modeste, il évoque ce qu'il est utile de savoir lorsque l'on enseigne les mathématiques ou la physique en série S, sans être un expert en analyse numérique.

Dans le programme de première S

À l'occasion du cours sur la dérivation, le programme propose de construire des « courbes intégrales » en utilisant l'approximation $\Delta f \approx f'(a)\,\Delta t$.
En d'autres termes, il s'agit de résoudre les équations différentielles

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

par la méthode numérique d'Euler sur un intervalle $[t_0\ ;\ t_0 + \mathrm{T}]$.

Principe

On partage l'intervalle $[t_0\ ;\ t_0 + \mathrm{T}]$ en n intervalles, tous de largeur $h = \dfrac{\mathrm{T}}{n}$.

On définit successivement une suite de points définis par :
• Premier point : $\mathrm{A}_0(t_0, y_0)$. C'est le seul point (*a priori*) qui sera un point exact.
• Deuxième point : $\mathrm{A}_1(t_1, y_1)$ avec $t_1 = t_0 + h$ et $y_1 = y_0 + h \times y'(t_0)$.
L'équation différentielle nous permet de remplacer $y'(t_0)$ par $f(t_0)$, d'où :

$$y_1 = y_0 + h \times f(t_0).$$

Sur l'intervalle $[t_0\ ;\ t_1]$, on approche la courbe solution (inconnue) par le segment $[\mathrm{A}_0\ ;\ \mathrm{A}_1]$ de coefficient directeur $y'(t_0)$, c'est-à-dire par la tangente à la courbe solution au point A_0.
• Troisième point : $\mathrm{A}_2(t_2, y_2)$ avec $t_2 = t_1 + h$ et $y_2 = y_1 + h \times y'(t_1)$, c'est-à-dire

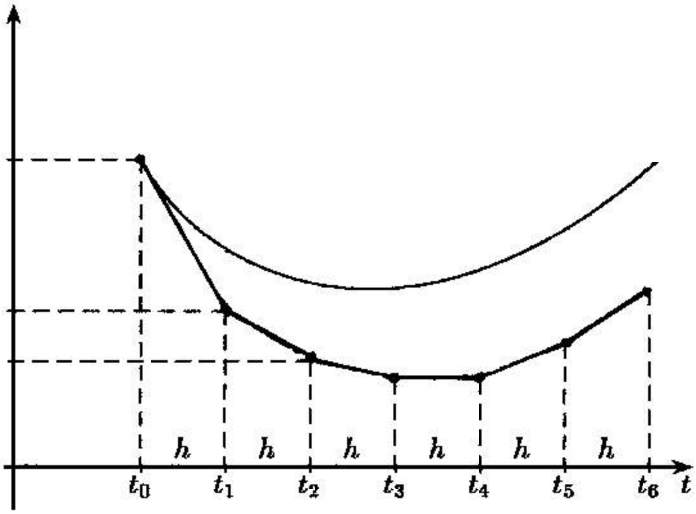
$$y_2 = y_1 + h \times f(t_1)$$

Cette fois, sur l'intervalle $[t_1\ ;\ t_2]$, on approche la courbe solution par le segment $[\mathrm{A}_1\ ;\ \mathrm{A}_2]$ qui est **parallèle** à la tangente à la courbe solution au point d'abscisse t_1.

On continue jusqu'au dernier point :
$\mathrm{A}_n(t_n, y_n)$ avec $t_n = t_{n-1} + h$ et $y_n = y_{n-1} + h \times y'(t_{n-1})$, c'est-à-dire

$$y_n = y_{n-1} + h \times f(t_{n-1}).$$

(*) professeur de mathématiques au lycée Edmond Michelet à Arpajon.



Remarque

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + h \times f(t_{n-1}) \\ &= y_{n-2} + h \times f(t_{n-2}) + h \times f(t_{n-1}) \\ &= \cdots \\ &= y_0 + h \times f(t_0) + h \times f(t_1) + h \times f(t_2) + \cdots + h \times f(t_n) \end{aligned}$$

D'où : $y_n - y_0 = \sum_{i=0}^{n} h \times f(t_i)$

Dans le cas où tous les y_i sont positifs, $y_n - y_0$ est donc la somme des aires des rectangles de largeur h et de hauteurs $f(t_0), f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_{n-1})$.
En terminale, cela permet de faire le lien avec l'intégrale considérée comme **aire sous la courbe de la fonction f**. Autrement dit, la méthode d'Euler est tout simplement **l'approximation de l'intégrale de f sur $[t_0\ ;\ t_0 + T]$ par la méthode des rectangles** (sur chacun des intervalles $[t_i\ ;\ t_{i+1}]$: la fonction f, dérivée de la fonction que l'on cherche, est supposée constante, la hauteur des rectangles est l'image par f de la borne inférieure des intervalles).

Programmation sur une calculatrice(2)

Voici un exemple de programme sur une calculatrice numérique du commerce (TI83) qui calcule la suite de points approchant la courbe intégrale (équation $y' = f(x)$) par la méthode d'Euler. Avant de lancer le programme, il faut rentrer l'expression de $f(x)$ dans l'éditeur de fonction en Y1. À l'exécution du programme, on doit saisir les valeurs initiales, la borne supérieure et le pas de résolution. Le programme calcule les coordonnées des points dans deux listes, X dans la liste L1 et Y dans la liste L2.

(2) Pour obtenir les programmes afin de les transférer dans une calculatrice à l'aide du câble Graph-Link, les demander à : remy.coste@ac-versailles.fr.

EULER1	
Efface l'écran	ClrHome
Saisie des valeurs initiales, de la borne supérieure du pas.	Input "X INIT :",U Input "Y INIT :",Z Input "X MAX :",V Input "PAS :",H
Initialisation des valeurs de X et de Y	U→X Z→Y
Initialisation des listes L1 et L2	{X}→L1 {Y}→L2
Tant que X est inférieure à la borne supérieure :	While X<V
Calcul de la valeur suivante de X	**X+H→X**
Calcul de la valeur suivante de Y	**Y+Y1*H→Y**
Augmentation des listes L1 et L2 des nouvelles valeurs de X et de Y	augment(L1,{X})→L1 augment(L2,{Y})L2
Fin de la boucle Tant que	End

On peut obtenir le tracé du nuage de points manuellement ou automatiquement :

<u>Manuellement</u> : désactiver la fonction Y1, choisir les options voulues dans **STAT PLOT / PLOT 1**, puis dans **WINDOW**, et taper sur **GRAPH**.

<u>Automatiquement</u> : ajouter les lignes suivantes dans le programme :

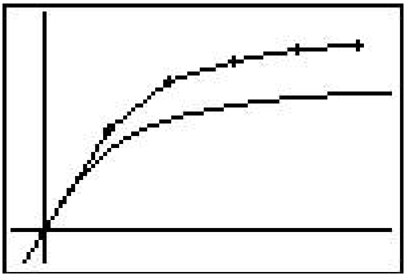
Activation du tracé du premier nuage de points défini par L1 et L2	Plot1(xyLine,L1,L2,+)
Calcul automatique des échelles sur les axes et tracé des points	ZoomStat

N.B. Avant exécution du programme, on prendra soin d'effacer ou désactiver les fonctions et les nuages de points qui n'ont rien à voir avec ce que l'on veut obtenir.
Dans les cas où l'on connaît la solution exacte de l'équation différentielle (ou qu'on la conjecture), on peut écrire son expression dans l'éditeur de courbe, en Y2 par exemple. En appuyant sur **GRAPH**, on peut comparer les points obtenus par la méthode d'Euler et la courbe exacte écrite dans Y2.
Cela permet ainsi de visualiser les progrès de l'approximation lorsque l'on réduit le pas (et donc lorsque l'on augmente le nombre de points). On peut évidemment utiliser l'éditeur de listes comme un tableur, pour calculer les erreurs, les erreurs relatives, la somme des erreurs, ou rechercher une relation entre celle-ci et le nombre de pas.

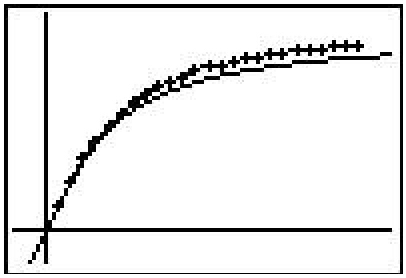
Exemples

• $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[0\ ;\ 5]$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Les points obtenus par Euler sont reliés, la courbe est la solution exacte (arc tangente).



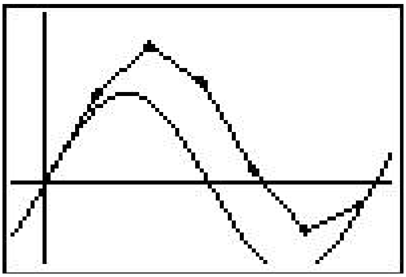
Avec un pas de 1



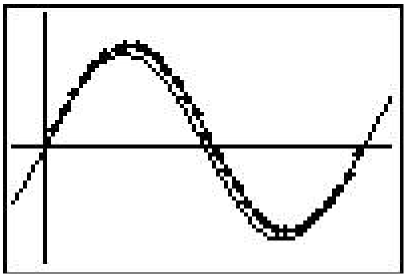
Avec un pas de 0,2

• $y' = \cos(x)$ sur $[0\ ;\ 2\pi]$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

La courbe est la solution exacte (sinus).



Avec un pas de 1



Avec un pas de 0,2

Remarquons qu'ici, pas à pas, l'erreur grandit … pour se réduire ensuite !

Dans le programme de terminale S

Au programme de mathématiques, la méthode d'Euler permet d'introduire la résolution des équations différentielles du type :

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec $f(y(t)) = a\,y(t) + b$, a et b réels.

Appliquons le principe précédent :

• Premier point : $A_0(t_0,y_0)$ (seul point exact).

• Deuxième point : $A_1(t_1,y_1)$ avec $t_1 = t_0 + h$ et $y_1 = y_0 + h \times y'(t_0)$.

Cette fois l'équation différentielle nous permet de remplacer $y'(t_0)$ par $a\,y(t_0) + b$, d'où :

$$y_1 = y_0 + h \times (a\,y(t_0) + b).$$

Les valeurs initiales $y(t_0) = y_0$ nous donnent :

$$y_1 = y_0 + h \times (a\,y_0 + b).$$

Comme précédemment, sur $[t_0 ; t_1]$, on approche la courbe solution par le segment $[A_0 ; A_1]$ de coefficient directeur $y'(t_0)$, c'est-à-dire par la tangente à la courbe solution au point A_0.

• Troisième point : $A_2(t_2,y_2)$ avec $t_2 = t_1 + h$ et $y_2 = y_1 + h \times y'(t_1)$, c'est-à-dire

$$y_2 = y_1 + h \times (a\,y(t_1) + b).$$

Là on est obligé **d'introduire une deuxième approximation** en utilisant $y(t_1) \approx y_1$:

$$y_2 = y_1 + h \times (a\,y_1 + b).$$

Cette fois, sur l'intervalle $[t_1 ; t_2]$, on approche la courbe solution par le segment $[A_1 ; A_2]$ qui est **« presque » parallèle à la tangente** à la courbe solution au point A_1.

À chaque étape, il y a donc deux sources d'erreur :

☞ on part d'un point qui (à part le premier) n'est pas exactement sur la courbe.

☞ on confond la courbe avec un bout de tangente qui n'a pas exactement la bonne pente.

Est-ce que ça marche ? avec quelle erreur ?

Intuitivement, on devine que réduire le pas va réduire l'erreur commise à chaque étape, mais aussi augmenter le nombre de pas, donc augmenter le nombre d'étapes … donc le nombre d'erreurs. Vaut-il mieux peu de grosses erreurs ou beaucoup de petites ?

En 1820(3), Cauchy répond à la question : il démontre que, dans le cas général des équations différentielles de la forme $y' = f(t,y)$, avec f, f'_t, et f'_y continues dans l'intervalle utile, la méthode d'Euler converge. En effet, si l'équation admet une solution (notons-la F), et si l'on applique la méthode d'Euler sur l'intervalle $[t_0 ; \mathrm{T}]$, l'erreur commise au point final d'abscisse T et d'ordonnée Y, vérifie :

$$|\mathrm{Y} - \mathrm{F}(\mathrm{T})| < \mathrm{K}h$$

où K est une constante ne dépendant que de T, de f, et des valeurs initiales t_0, y_0. Pour une valeur de T donnée, il est donc théoriquement possible d'approcher F(T) d'aussi près que l'on veut : il suffit de prendre h suffisamment petit.

Mais il reste à prouver que F existe. C'est encore Cauchy qui le fait en 1824. Sous les mêmes conditions de continuité que précédemment, étant donné T fixé, il démontre par majorations que la valeur de Y obtenue avec la méthode d'Euler, tend vers une limite finie lorsque h vers 0. Il définit ainsi une fonction F par :

$$\mathrm{F}(\mathrm{T}) = \lim_{h \to 0} \mathrm{Y},$$

et démontre que F est solution de l'équation différentielle. En 1868, Lipschitz améliore le résultat en réduisant les conditions. En 1890, Picard propose une autre démonstration de l'existence de F par une méthode globale.

(3) Voir « Histoires d'algorithmes, du caillou à la puce », Collectif IREM-M:A.T.H., BELIN.

Dans la classe de terminale S : dans le cours de mathématiques, on étudie le cas particulier $y' = y$, avec $y(0) = 1$. On démontre l'unicité de la solution (l'existence est admise dans un premier temps). Après l'introduction de la fonction Ln, on démontre l'existence des solutions de toutes les équations de la forme $y' = ay + b$.
Dans le cours de physique, **c'est cette preuve qui légitime que l'on fasse une régression exponentielle** lorsque l'on a obtenu expérimentalement des points à partir d'une situation modélisée par une équation différentielle du type $y' = ay + b$.

Remarque : Dans le cas de l'équation $y' = ay$, avec $y(t_0) = y_0$, la suite récurrente obtenue par la méthode d'Euler, est définie par :

$$y_{i+1} = y_i + h \times y'(t_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + h \times ay(t_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + h \times ay_i$$
$$y_{i+1} = y_i \times (1 + ha)$$

C'est la **suite géométrique** de premier terme y_0 et de raison $1 + ha$. D'où :

$$\boxed{y_n = y_0 \times (1 + ha)^n}$$

Il s'agit de la situation fondamentale d'une croissance exponentielle. On peut percevoir la solution comme la fonction continue correspondant aux termes d'une suite géométrique, comme les fonctions affines le sont pour les suites arithmétiques.

Programmation sur une calculatrice

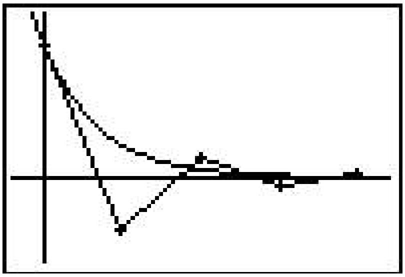
Ce programme (identique au précédent à deux lignes près, celles qui sont soulignées) calcule la suite de points approchant la solution de l'équation y' = Ay + B par la méthode d'Euler. À l'exécution du programme, on doit saisir les valeurs des coefficients A et B, les valeurs initiales, la borne supérieure, et le pas de résolution.

EULER2	
Efface l'écran	ClrHome
Saisie des coefficients A et B,	<u>Prompt A,B</u>
des valeurs initiales, de la borne supérieure du pas.	Input "X INIT :",U
	Input "Y INIT :",Z
	Input "X MAX :",V
	Input "PAS :",H
Initialisation des valeurs de X et de Y	U→X
	Z→Y
Initialisation des listes L1 et L2	{X}→L1
	{Y}→L2
Tant que X est inférieure à la borne supérieure :	While X<V
Calcul de la valeur suivante de X	X+H→X
Calcul de la valeur suivante de Y	<u>Y+(A*Y+B)*H→Y</u>
Augmentation des listes L1 et L2 des nouvelles valeurs de X et de Y	augment(L1,{X})→L1
	augment(L2,{Y})L2
Fin de la boucle Tant que	End

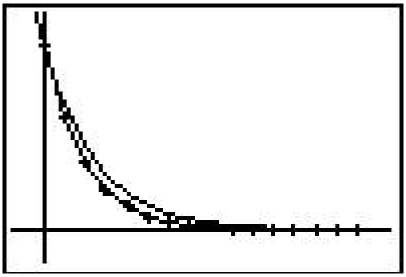
Da la même façon, on peut obtenir le graphique manuellement ou automatiquement en ajoutant les mêmes lignes de programmes que précédemment.

Exemple

$y' = -2y$ sur $[0 ; 3]$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.
La courbe est la solution exacte ($x \to \exp(-2x)$).



Avec un pas de 0,7



Avec un pas de 0,2

Remarque : Si le pas est trop grand (graphique de gauche), on obtient des valeurs de y négatives … et donc de y' positives ! L'erreur de pente du point suivant est … grossière.

Comment améliorer la méthode d'Euler ?

En théorie, comme on l'a vu précédemment, réduire le pas fait gagner en précision. Dans la pratique cela n'est pas aussi simple : si les calculs sont faits à la main, réduire le pas, c'est augmenter le nombre de calculs, ce qui peut être rédhibitoire. Si les calculs sont faits par une machine, un très grand nombre de calculs génère une erreur due aux arrondis inévitables. Si bien qu'à force d'augmenter le nombre de pas, on peut observer un seuil à partir duquel la précision n'augmente pas mais diminue.
Améliorer la méthode d'Euler, c'est gagner en précision pour un même nombre de pas, mais aussi obtenir la même précision en moins d'étapes (donc avec beaucoup moins d'opérations).
De nombreux mathématiciens ont proposé des méthodes plus performantes. Parmi eux, on retiendra Runge, puis Kutta (allemands de la fin du 19^{e} siècle).
La faiblesse de la méthode d'Euler est la suivante : l'équation différentielle étant $y' = f(t,y)$, on fait comme si, sur tout l'intervalle $[t_i ; t_{i+1}]$, la fonction f est constante et égale à $f(t_i,y_i)$. Il s'ensuit que la « courbe d'Euler » ainsi obtenue est toujours « en retard » sur la courbe exacte. Dans le cas particulier des équations du type $y' = f(t)$, l'intégrale obtenue par la méthode d'Euler correspond au calcul d'une intégrale par la méthode des rectangles, en utilisant la borne **inférieure** de chaque intervalle, d'où le retard. Remplacer la borne inférieure par la borne supérieure n'arrangera rien : d'un retard excessif on passerait à une avance excessive.
La démarche de Runge consiste corriger ce défaut en **anticipant raisonnablement** sur la valeur de $f(t_i,y_i)$: il propose de prendre la valeur médiane de l'intervalle $[t_i ; t_{i+1}]$, c'est-à-dire qu'il remplace t_i par $t_i + \dfrac{h}{2}$ dans la formule d'Euler.

- Cas général d'équations différentielles $y' = f(t, y(t))$:

  Méthode d'Euler : $y_{i+1} = y_i + h\,f(t_i, y_i)$.

  Méthode de Runge : $y_{i+1} = y_i + h\,f\left(t_i + \frac{h}{2}, y\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right)$.

  Pour trouver $y\left(t_i + \frac{h}{2}\right)$, Runge applique sur l'intervalle $\left[t_i\,;\,t_i + \frac{h}{2}\right]$ … la méthode d'Euler : $y\left(t_i + \frac{h}{2}\right) = y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i)$.

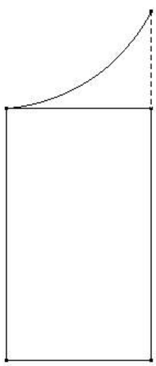
  D'où la formule : $y_{i+1} = y_i + h\,f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i)\right)$.

- Cas particulier des équations différentielles $y' = f(t)$ (première S) :

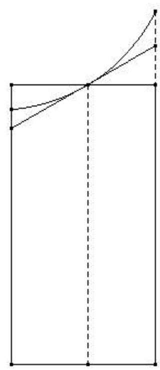
  Méthode d'Euler : $y_{i+1} = y_i + h\,f(t_i)$.

  Méthode de Runge : $y_{i+1} = y_i + h\,f\left(t_i + \frac{h}{2}\right)$.

  Le fait de prendre la valeur de f en $t_i + \frac{h}{2}$ et non en t_i comme valeur constante de f sur l'intervalle $[t_i\,;\,t_{i+1}]$, correspond à prendre $f\left(t_i + \frac{h}{2}\right)$ comme hauteur des rectangles. L'aire du rectangle ainsi obtenu est la même que celle du trapèze dont le côté supérieur est tangent à la courbe de f au « point milieu » (d'abscisse médiane $t_i + \frac{h}{2}$). La méthode de Runge revient donc à calculer une intégrale par **la méthode dite des « trapèzes tangents »**.



Euler sur $[t_i\,;\,t_{i+1}]$ (rectangle)

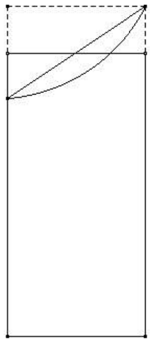


Runge sur $[t_i\,;\,t_{i+1}]$ (trapèze tangent)

- Cas particulier d'équations différentielles $y' = f(y) = ay + b$ (terminale S) :
  Méthode d'Euler : $y_{i+1} = y_i + h\,f(y_i) = y_i + h\,f(ay_i + b)$.
  Méthode de Runge :

$$y_{i+1} = y_i + h\,f\left(y_i + \frac{h}{2}f(t_i, y_i)\right)$$
$$= y_i + h\left(a\left(y_i + \frac{h}{2}(ay_i + b)\right) + b\right).$$
$$y_{i+1} = y_i + h(ay_i + b) + \frac{h^2}{2}a(ay_i + b).$$

  On voit bien apparaître dans ce cas, **un développement d'ordre 2**.
  En utilisant les développements de Taylor à l'ordre 3, puis 4, Runge améliore encore la précision.



Remarque : Runge propose également une variante. Au lieu de s'inspirer de la méthode des « trapèzes tangents », il s'inspire de la méthode des « trapèzes cordes ». C'est-à-dire qu'il remplace $f(t_i,y_i)$ par la moyenne des deux valeurs $f(t_i,y_i)$ et $f(t_{i+1},y_{i+1})$ (c'est l'ordonnée médiane).
Or $f(t_{i+1},y_{i+1}) = f(t_i + h, y_i + h\,f(t_i,y_i))$.
D'où la formule :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big(f(t_i, y_i) + f\big(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i)\big)\Big).$$

Pour les équations du type $y' = f(t)$, on a :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big(f(t_i) + f\big(t_i + h\big)\Big).$$

Pour les équations du type $y' = ay + b$, la linéarité de la fonction $y \to ay + b$ fait que l'on aboutit exactement à la même formule que précédemment.

Quelques exemples avec un tableur :

Le tableur, tout comme la calculatrice, est évidemment un outil particulièrement pertinent pour expérimenter les calculs précédents.

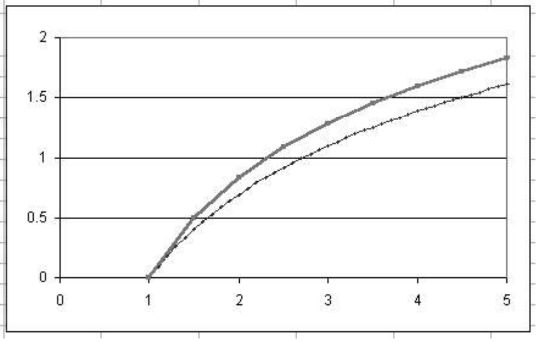
Exemple 1 : équation : y′ = 1/x sur [0 ; 5]

D2=5/B2, B4= Ln(A4), C5=C4+D$2, D4=1/C4

Méthode d'Euler

E5=E4+D4*D$2

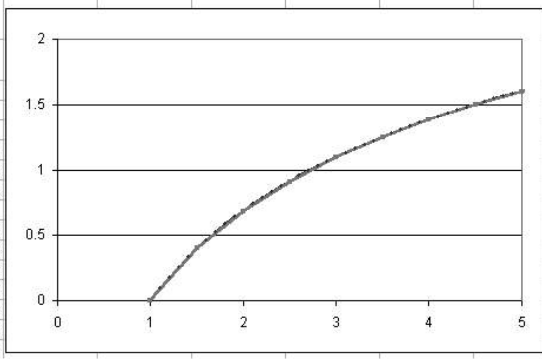
	A	B	C	D	E
1	y' = 1/x				
2	Nombre de pas	10	Pas	0.5	
3	x	F(x)	xn	y'	y
4	1	0	1	1	0
5	1.1	0.09531	1.5	0.66667	0.5
6	1.2	0.18232	2	0.5	0.83333
7	1.3	0.26236	2.5	0.4	1.08333
8	1.4	0.33647	3	0.33333	1.28333
9	1.5	0.40547	3.5	0.28571	1.45
10	1.6	0.47	4	0.25	1.59286
11	1.7	0.53063	4.5	0.22222	1.71786
12	1.8	0.58779	5	0.2	1.82897
13	1.9	0.64185	5.5	0.18182	1.92897
14	2	0.69315	6	0.16667	2.01988
15	2.1	0.74194	6.5	0.15385	2.10321
16	2.2	0.78846	7	0.14286	2.18013



Méthode de Runge

E5=E4+D4*D$2+(D$2^2)/2*D4

	A	B	C	D	E
1	y' = 1/x				
2	Nombre de pas	10	Pas	0.5	
3	x	F(x)	xn	y'	y
4	1	0	1	1	0
5	1.1	0.09531	1.5	0.66667	0.4
6	1.2	0.18232	2	0.5	0.68571
7	1.3	0.26236	2.5	0.4	0.90794
8	1.4	0.33647	3	0.33333	1.08975
9	1.5	0.40547	3.5	0.28571	1.2436
10	1.6	0.47	4	0.25	1.37693
11	1.7	0.53063	4.5	0.22222	1.49458
12	1.8	0.58779	5	0.2	1.59984
13	1.9	0.64185	5.5	0.18182	1.69508
14	2	0.69315	6	0.16667	1.78204
15	2.1	0.74194	6.5	0.15385	1.86204
16	2.2	0.78846	7	0.14286	1.93611



Avec le même nombre de pas, on peut constater l'amélioration spectaculaire !

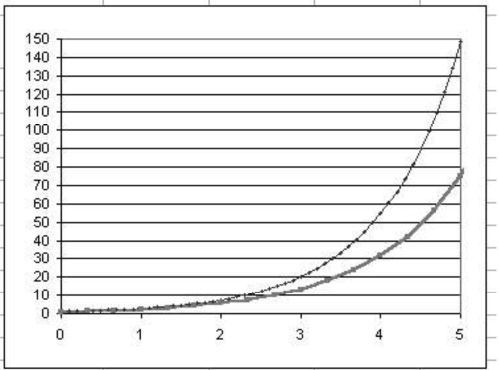
Exemple 2 : équation : y′ = x sur [0 ; 5]

D2=5/B2, B4= exp(A4), C5=C4+D$2, D4=E4

Méthode d'Euler

B4= exp(A4), E5=E4+D4*D$2

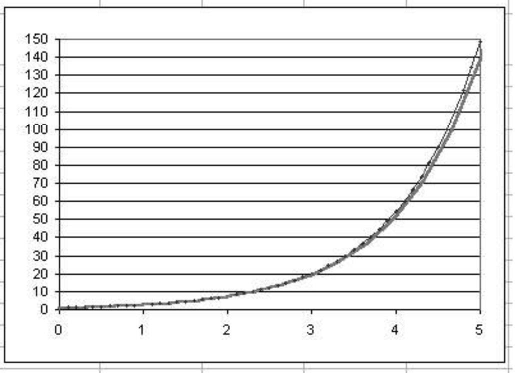
	A	B	C	D	E
1	y' = y				
2	Nombre de pas	15	Pas	0.33333	
3	x	F(x)	xn	y'	y
4	0	1	0	1	1
5	0.1	1.10517	0.33333	1.33333	1.33333
6	0.2	1.2214	0.66667	1.77778	1.77778
7	0.3	1.34986	1	2.37037	2.37037
8	0.4	1.49182	1.33333	3.16049	3.16049
9	0.5	1.64872	1.66667	4.21399	4.21399
10	0.6	1.82212	2	5.61866	5.61866
11	0.7	2.01375	2.33333	7.49154	7.49154
12	0.8	2.22554	2.66667	9.98872	9.98872
13	0.9	2.4596	3	13.3183	13.3183
14	1	2.71828	3.33333	17.7577	17.7577
15	1.1	3.00417	3.66667	23.677	23.677
16	1.2	3.32012	4	31.5693	31.5693



Méthode de Runge

E5=E4+D4*D$2+(D$2^2)/2*D4

	A	B	C	D	E
1	y' = y				
2	Nombre de pas	15	Pas	0.33333	
3	x	F(x)	xn	y'	y
4	0	1	0	1	1
5	0.1	1.10517	0.33333	1.38889	1.38889
6	0.2	1.2214	0.66667	1.92901	1.92901
7	0.3	1.34986	1	2.67918	2.67918
8	0.4	1.49182	1.33333	3.72109	3.72109
9	0.5	1.64872	1.66667	5.16818	5.16818
10	0.6	1.82212	2	7.17803	7.17803
11	0.7	2.01375	2.33333	9.96948	9.96948
12	0.8	2.22554	2.66667	13.8465	13.8465
13	0.9	2.4596	3	19.2313	19.2313
14	1	2.71828	3.33333	26.7101	26.7101
15	1.1	3.00417	3.66667	37.0973	37.0973
16	1.2	3.32012	4	51.5241	51.5241



Et les équations différentielles du second ordre ?

La méthode d'Euler permet de résoudre les équations de second ordre dès que l'on peut se ramener à un système de deux équations du premier ordre sur lesquelles on peut … appliquer la méthode d'Euler.

Prenons l'exemple de l'équation : $y'' = -y$ avec $t_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y'_0 = 1$.

Cette équation permet de générer la fonction sinus sans qu'une fonction trigonométrique n'apparaisse dans l'équation, comme c'était le cas dans l'équation $y' = \cos(t)$.

Principe : on remplace $y'' = -y$ par le système :

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -y \end{cases}$$

Les conditions initiales $t_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y'_0 = 1$ deviennent $t_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 1$.

Appliquons la méthode d'Euler à l'équation $y' = z$:

$y_{n+1} = y_n + h \times y'_n$ avec $y'_n = z_n$.

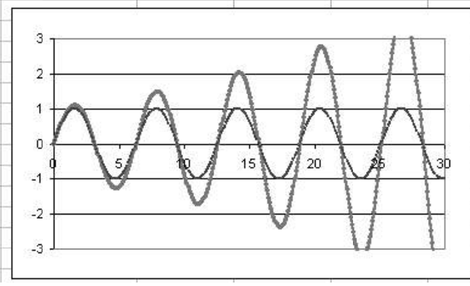
Pour évaluer z_n, appliquons la méthode d'Euler à l'équation $z' = -y$:

$z_n = z_{n-1} + h \times z'_{n-1}$ avec $z'_{n-1} = -y_{n-1}$.

Expérimentons avec le tableur sur [0 ; 30] :

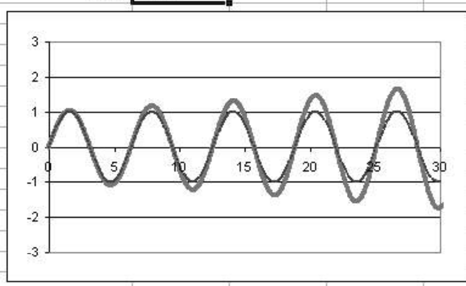
I2=30/I1, G3= –E3, D4=D3+I$2, E4=E3+I$2*F3, F4=F3+I$2*G3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1								Nombre de pas	300
2	x	sinus	n	xn	yn	y'n=zn	z'n= - yn	Pas =	0.1
3	0	0	0	0	0	1	0		
4	0.1	0.09983	1	0.1	0.1	1	-0.1		
5	0.2	0.19867	2	0.2	0.2	0.99	-0.2		
6	0.3	0.29552	3	0.3	0.299	0.97	-0.299		
7	0.4	0.38942	4	0.4	0.396	0.9401	-0.396		
8	0.5	0.47943	5	0.5	0.49001	0.9005	-0.49		
9	0.6	0.56464	6	0.6	0.58006	0.8515	-0.5801		
10	0.7	0.64422	7	0.7	0.66521	0.79349	-0.6652		
11	0.8	0.71736	8	0.8	0.74456	0.72697	-0.7446		
12	0.9	0.78333	9	0.9	0.81726	0.65252	-0.8173		
13	1	0.84147	10	1	0.88251	0.57079	-0.8825		
14	1.1	0.89121	11	1.1	0.93959	0.48254	-0.9396		
15	1.2	0.93204	12	1.2	0.98784	0.38858	-0.9878		
16	1.3	0.96356	13	1.3	1.0267	0.2898	-1.0267		



Avec un pas de 0,1, le résultat est assez vite catastrophique !

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1								Nombre de pas	800
2	x	sinus	n	xn	yn	y'n=zn	z'n= - yn	Pas =	0.0375
3	0	0	0	0	0	1	0		
4	0.1	0.09983	1	0.04	0.0375	1	-0.0375		
5	0.2	0.19867	2	0.08	0.075	0.99859	-0.075		
6	0.3	0.29552	3	0.11	0.11245	0.99578	-0.1124		
7	0.4	0.38942	4	0.15	0.14979	0.99156	-0.1498		
8	0.5	0.47943	5	0.19	0.18697	0.98595	-0.187		
9	0.6	0.56464	6	0.23	0.22395	0.97894	-0.2239		
10	0.7	0.64422	7	0.26	0.26066	0.97054	-0.2607		
11	0.8	0.71736	8	0.3	0.29705	0.96076	-0.2971		
12	0.9	0.78333	9	0.34	0.33308	0.94962	-0.3331		
13	1	0.84147	10	0.38	0.36869	0.93713	-0.3687		
14	1.1	0.89121	11	0.41	0.40383	0.92331	-0.4038		
15	1.2	0.93204	12	0.45	0.43846	0.90816	-0.4385		
16	1.3	0.96356	13	0.49	0.47251	0.89172	-0.4725		



Même avec un pas nettement plus réduit, on observe un phénomène d'accroissement de l'amplitude.

Comment améliorer la méthode ?

Reprenons les calculs :

$y_{n+1} = y_n + h \times y'_n$ soit $y_{n+1} = y_n + h \times z_n$.

$z_n = z_{n-1} + h \times z'_{n-1}$ soit $z_n = z_{n-1} + h \times (-y_{n-1})$.

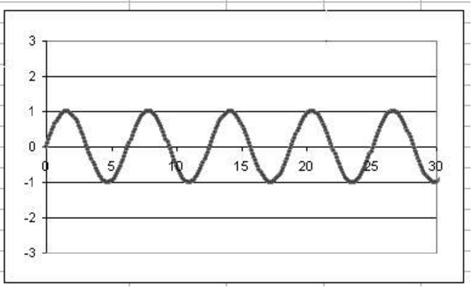
De ces deux équations, on déduit :

$$y_{n+1} = y_n + h \times \left(z_{n-1} + h \times (-y_{n-1}) \right) \text{ soit } y_{n+1} = y_n + h \times z_{n-1} - h^2 \times y_{n-1} .$$

On constate donc que, pour calculer y_{n+1}, on utilise y_n mais aussi y_{n-1}.
À nouveau on peut anticiper en remplaçant y_{n-1} par y_n (dont la valeur est disponible), ce qui revient à utiliser les formules $y_{n+1} = y_n + h \times z_n$ et $z_n = z_{n-1} + h \times (-y_n)$.

Dans notre feuille de calcul, il suffit de modifier la formule de la cellule F4 en remplaçant G3 par G4, soit : F4 = F3+I$2*G4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1								Nombre de pas	300
2	x	sinus	n	xn	yn	y'n=zn	z'n= - yn	Pas =	0.1
3	0	0	0	0	0	1	0		
4	0.1	0.09983	1	0.1	0.1	**0.99**	-0.1		
5	0.2	0.19867	2	0.2	0.199	0.9701	-0.199		
6	0.3	0.29552	3	0.3	0.29601	0.9405	-0.296		
7	0.4	0.38942	4	0.4	0.39006	0.90149	-0.3901		
8	0.5	0.47943	5	0.5	0.48021	0.85347	-0.4802		
9	0.6	0.56464	6	0.6	0.56556	0.79692	-0.5656		
10	0.7	0.64422	7	0.7	0.64525	0.73239	-0.6452		
11	0.8	0.71736	8	0.8	0.71849	0.66054	-0.7185		
12	0.9	0.78333	9	0.9	0.78454	0.58209	-0.7845		
13	1	0.84147	10	1	0.84275	0.49781	-0.8428		
14	1.1	0.89121	11	1.1	0.89253	0.40856	-0.8925		
15	1.2	0.93204	12	1.2	0.93339	0.31522	-0.9334		
16	1.3	0.96356	13	1.3	0.96491	0.21873	-0.9649		



Même avec un pas de 0,1 le résultat est spectaculaire !

Bibliographie :

• Histoires d'algorithmes, du caillou à la puce, Édition Belin.

• Initiation à l'analyse numérique, R. Théodor, Édition Masson

• Analyse numérique et équations différentielles, J.-P. Demailly, PUF 1992.