Les équations différentielles en terminale scientifique :
un thème d'étude commun aux sciences physiques et aux mathématiques favorisant un travail interdisciplinaire

Jean Winther(*) & Rémy Coste(**)

Résumé. Les équations différentielles figurent à la fois dans les programmes de physique, de chimie et de mathématiques de la classe de terminale S. Les commentaires des programmes des deux disciplines incitent explicitement les deux professeurs de la classe à travailler en concertation sur ce sujet. Ce premier article et les deux qui suivront(1) ont pour but de proposer quelques pistes facilitant la mise en œuvre de cette interdisciplinarité. Celle-ci ne peut atteindre sa pleine efficacité que si les professeurs des deux disciplines sont informés des activités que réalisent les élèves dans chacune d'elles. Nous présenterons également quelques exemples d'activités à mettre en œuvre conjointement en physique et en mathématiques.
Tous les élèves possèdent une calculatrice qu'ils utilisent aussi bien en mathématiques qu'en sciences physiques mais généralement dans des contextes différents. L'étude et l'utilisation des équations différentielles est sans doute l'occasion d'exploiter des possibilités souvent méconnues de cet instrument.

Ce que disent les programmes officiels

1. En physique : Les points forts du programme

• L'évolution temporelle des systèmes
En terminale est mise en place une compréhension plus fine de l'évolution des systèmes ; on introduit le paramètre temps et le taux de variation de certaines grandeurs physiques. Un taux de variation instantané est représenté par une dérivée, notion introduite dans le cours de mathématiques en classe de première S. S'interroger sur les paramètres qui influent sur la dérivée d'une grandeur physique, c'est chercher à établir **une équation différentielle**.

• L'idée du déterminisme et de la causalité
L'état d'un système à un instant donné dépend de son état aux instants antérieurs et des actions qui s'exercent sur lui. L'équation différentielle est l'objet mathématique qui va permettre de formaliser cette idée de déterminisme.

(*) Professeur de physique et chimie.
(**) Professeur de mathématiques.
(1) Le second de ces deux-là, en phase finale de rédaction, ne figurera que dans un prochain Bulletin.

• Confronter les prédictions d'un modèle théorique à des résultats expérimentaux

On va initier les élèves **au double mouvement qui caractérise l'activité scientifique : confronter les prédictions d'un modèle théorique à des résultats expérimentaux, utiliser des résultats expérimentaux pour affiner un modèle théorique.**

• L'interaction mathématique – physique

Les mathématiques ne sont pas un outil pour la physique, elles en sont constitutives. L'objet mathématique qui décrit la façon dont les actions déterminent l'évolution d'un système est une **équation différentielle**.

La notion d'équation différentielle est détaillée dans le cours de mathématiques, mais l'interaction physique-mathématique est ici cruciale pour les deux disciplines.

C'est un concept nouveau pour les élèves. Dans les équations qu'ils ont vues précédemment, il s'agit de trouver un **nombre**. En terminale S, l'inconnue est **une fonction**.

(voir en annexe 1, les extraits du programme de sciences physiques de terminale S)

2. En mathématiques : Les points forts du programme

• cohérence des connaissances transmises aux élèves dans leur cursus scolaire.
• ouverture à des horizons neufs et variés.
• école de rigueur qui exige une pensée claire.
• extension du champ des suites et des fonctions vues en classe de première à quelques nouvelles fonctions classiques : exponentielles, logarithmes, trigonométriques.
• initiation au calcul intégral et à la problématique des équations différentielles.
• travail conjoint avec les autres disciplines.

(voir en annexe 2, les extraits du programme de mathématiques de terminale S)

Où rencontre-t-on des équations différentielles dans le programme de physique ?

PHYSIQUE	MATHEMATIQUES
Décharge d'un condensateur $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{-q}{\mathrm{CR}}$ **Charge d'un condensateur** $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}} \frac{-q}{\mathrm{CR}}$	

Établissement d'un courant à travers un circuit RL (L = dipôle inducteur) $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}}-\frac{\mathrm{R}i}{\mathrm{L}}$	$\mathbf{Y'=AX+B}$
Disparition du courant dans un circuit RL $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{-\mathrm{R}i}{\mathrm{L}}$ **La décroissance radioactive** $\frac{\mathrm{d}\mathrm{N}}{\mathrm{d}t}=-\lambda\mathrm{N}$ **Chute verticale** Faibles vitesses $\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-g-\frac{\lambda}{m}v_y$	$\mathbf{Y'=AY+B}$
Vitesses importantes $\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-g+\frac{\mathrm{K}}{m}v_y^2$	$\mathbf{Y'=AY^2+B}$
Action de l'air négligée $\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-g$ **Mouvement avec vitesse initiale** $\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}+\frac{kS}{m}\times v\times v_x=0$ $\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}+\frac{kS}{m}\times v\times v_y=-g$	

La démarche dans le cours de mathématiques

En mathématiques, le professeur va introduire et développer les principes de la méthode d'Euler, les incertitudes qu'elle induit selon la variation des paramètres. Lorsqu'on la connaît, il fera des comparaisons avec la solution exacte.
L'étude du problème pourra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique, ou bien par la recherche des fonctions dérivables f telles que $f(x+y)=f(x)\,f(y)$. On construira avec la méthode d'Euler introduite en Première des représentations graphiques approchées de f dans le cas $k=1$; on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits.
L'unicité sera démontrée ; l'existence sera admise dans un premier temps.

La démarche dans le cours de physique

Soit à étudier un phénomène physique. La plupart du temps on obtient un ensemble de données expérimentales recueillies manuellement ou de façon automatique.
Le physicien veut déterminer un modèle mathématique qui puisse lui permettre ensuite de faire **des prévisions** sur le phénomène. Différentes méthodes s'offrent à lui. **L'établissement d'une équation différentielle** en utilisant les lois de la physique en est une parmi d'autres.
Une difficulté se présente : les élèves n'ont pas encore les connaissances mathématiques suffisantes pour faire la résolution des équations différentielles ou celles-ci n'ont pas de solutions littérales. La méthode d'Euler est une méthode numérique simple qui permet de les résoudre.
Mais il y a un certain nombre d'écueils à surmonter.
En effet on va utiliser un algorithme de résolution à l'aide d'un programme et la façon la plus simple pour évaluer la performance du modèle « équation différentielle » mis en jeu est la superposition de la courbe des données expérimentales et de la courbe des valeurs calculées.
Quel critère retenir pour juger de la « bonne » ou « mauvaise » superposition ?
En supposant qu'on soit satisfait d'une superposition et qu'on retienne l'équation différentielle correspondante, cette dernière n'est pas vraiment opérationnelle pour des actes de prévision.
Tout au plus semble-t-elle valider la mise en équation.
Si on veut une équation utilisable pour des calculs ultérieurs, on doit utiliser d'autres méthodes : régressions, identification à un modèle, anamorphose, etc.
Ce n'est pas aux mathématiciens et aux physiciens que l'on apprendra que l'on peut toujours trouver un grand nombre d'équations dont les courbes vont se superposer « exactement ! » à la courbe des valeurs expérimentales.
Ces modèles sont-ils à rejeter ? Non à la condition d'être conscients de leur validité : ce sont des modèles de conduite ou de comportement du phénomène, qui ne sont valables que pour le phénomène pris dans les mêmes conditions et dans le même domaine. Exemple : le modèle de comportement obtenu pendant la charge d'un condensateur n'est valable *a priori* que pour ce condensateur, placé dans les mêmes conditions.
Il reste une bouée de sauvetage pour le physicien : le modèle théorique élaboré par des générations de physiciens.
Il va pouvoir comparer la courbe correspondant à cette équation théorique à la courbe des données expérimentales et à la courbe des valeurs calculées.
Si tout marche bien il pourra mettre en parallèle l'équation différentielle et l'équation théorique et tout ira pour le mieux dans le meilleur des mondes.
Mais la superposition des trois courbes est rarement parfaite. Beaucoup de paramètres interviennent dans l'affaire : incertitudes sur l'acquisition des mesures, incertitudes sur la résolution de l'équation différentielle, incertitudes sur l'affichage des courbes, etc.
Si on a réussi à minimiser tout cela et que l'on s'aperçoit que la superposition a des défauts, il reste à envisager que le modèle différentiel et/ou le modèle théorique

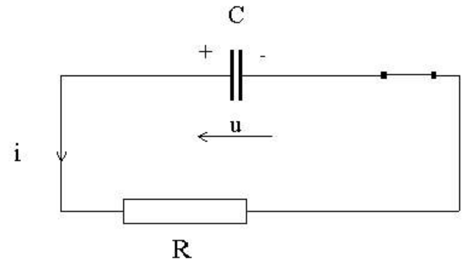
retenu ne convient pas ou est trop simplifié. Il faut alors s'interroger sur les différents paramètres qui interviennent sur le phénomène : en a-t-on négligé, en a-t-on oublié ? On peut alors compliquer le modèle retenu et se rapprocher de la réalité. Mais les élèves ont-ils les compétences physiques et mathématiques pour nous suivre ?

Devant tant de difficultés, on serait tenter de renoncer et de se rabattre vers le cours théorique bien ficelé sans embûche. On aurait tort : ce sont justement ces difficultés qui font l'intérêt de la physique.
L'objectif n'est pas de faire des élèves des physiciens, mais de les initier aux méthodes de la physique. Ce n'est pas qu'ils « trouvent » des modèles explicatifs qui est intéressant pour leur formation intellectuelle mais bien « comment » on les trouve et « combien » ils sont discutables.

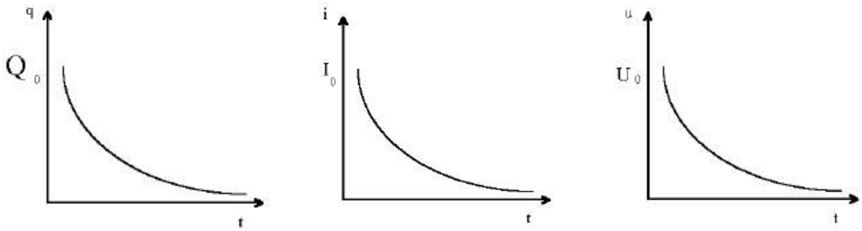
Les travaux menés en commun entre les professeurs des deux spécialités ont permis de mettre en évidence une deuxième difficulté si l'on veut que l'esprit des programmes de TS soit respecté, c'est-à-dire que les élèves acquièrent le concept ce qui au cœur du programme de physique : l'idée du déterminisme et de la causalité.
L'état d'un système à un instant donné dépend de son état aux instants antérieurs et des actions qui s'exercent sur lui. S'interroger sur les paramètres qui influent sur la dérivée d'une grandeur physique, c'est chercher à établir **une équation différentielle**. La résoudre permet d'anticiper l'évolution d'un système. La mise en place d'une méthode numérique itérative permet de mieux ancrer l'idée du déterminisme et de la causalité.
Ceci entraîne qu'il faut **impérativement** que ce soit l'élève qui rédige les programmes permettant de résoudre une équation différentielle, quitte, ceci étant acquis, qu'il utilise ensuite des programmes ou les logiciels dans lesquels cette méthode ou d'autres méthodes sont mises en œuvre.
Cette compétence ne pourra être acquise par les élèves si leurs professeurs ne l'ont déjà acquise.
Les algorithmes de résolution d'équations différentielles par la méthode d'Euler sont simples. Les écrire dans un langage approprié ne présente pas une difficulté insurmontable. L'écriture nécessite au plus dans le pire des cas une dizaine d'instructions.
Il appartient aux professeurs de mathématiques et de physique de se concerter pour savoir qui va initier les élèves d'une part aux algorithmes, d'autre part à l'écriture des programmes.

Les différents phénomènes en physique rencontrés en terminale S où apparaissent des équations différentielles, que l'on peut résoudre par la méthode d'Euler

• Décharge d'un condensateur

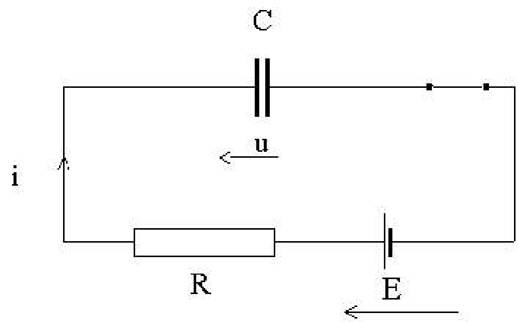


Évolution expérimentale des paramètres du phénomène

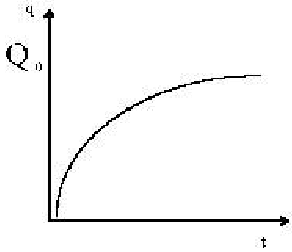


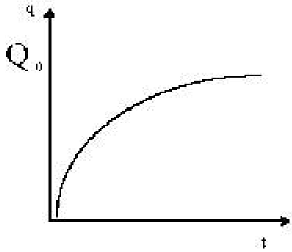
Modèle différentiel	Modèle analytique
$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{-q}{\mathrm{CR}}$	$q = \mathrm{Q}_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{CR}}}$ $\quad i = \mathrm{I}_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{CR}}}$ $u = \mathrm{U}_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{CR}}}$

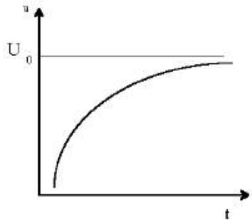
• Charge d'un condensateur



Évolution expérimentale des paramètres du phénomène (q est la charge restante, i l'intensité du courant, u la tension aux bornes du condensateur) :

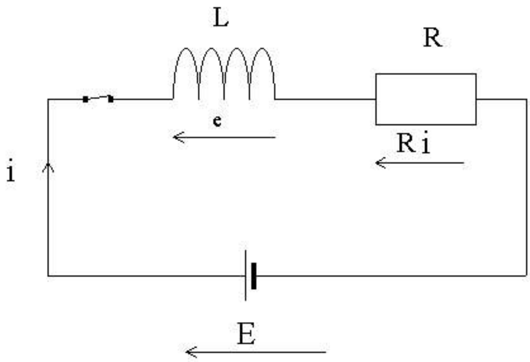




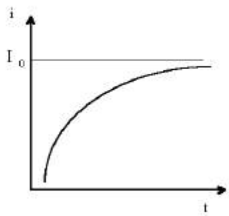


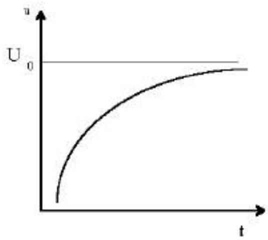
Modèle différentiel	Modèle analytique
$\frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} \frac{-q}{CR}$	$q = Q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{CR}}\right)$ $i = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{CR}}\right)$ $u = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{CR}}\right)$

• Établissement d'un courant à travers un dipôle inducteur



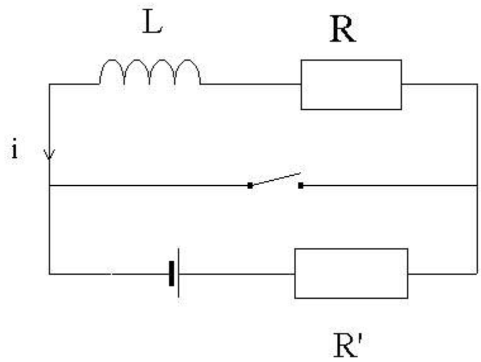
Évolution expérimentale des paramètres du phénomène



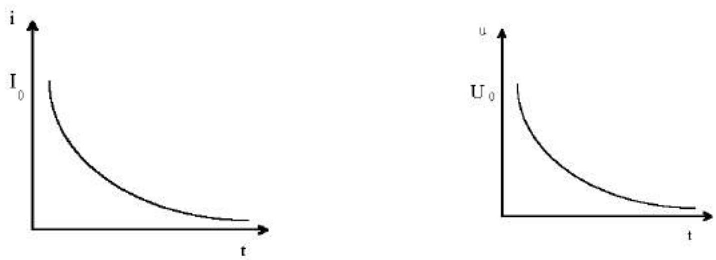


Modèle différentiel	Modèle analytique
$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{Ri}{L}$	$i = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$ $\quad u = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$

• **Disparition du courant dans un circuit inducteur**



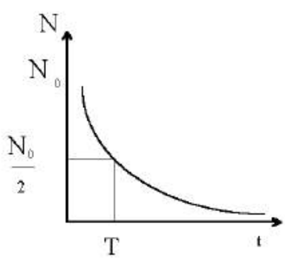
Évolution expérimentale des paramètres du phénomène



Modèle différentiel	Modèle analytique
$\frac{di}{dt} = \frac{-Ri}{L}$	$i = I_0 \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$ $\quad u = E \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$

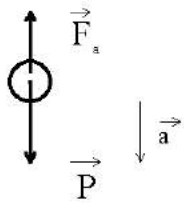
• **La décroissance radioactive**

Évolution expérimentale des paramètres du phénomène (N est le nombre de particules restantes)



Modèle différentiel	Modèle analytique
$\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$	$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$

• Mouvement de projectiles dans un champ de pesanteur uniforme : chute verticale



$$\vec{P} + \vec{F_a} = m\vec{a}.$$

$$P_y + F_{ay} = ma_y \qquad \text{avec } a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

Faibles vitesses

$$\vec{F_a} = -\lambda\vec{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g - \frac{\lambda}{m}v_y$$

Vitesses importantes

$$\vec{F_a} = -Kv^2\frac{\vec{v}}{v}$$

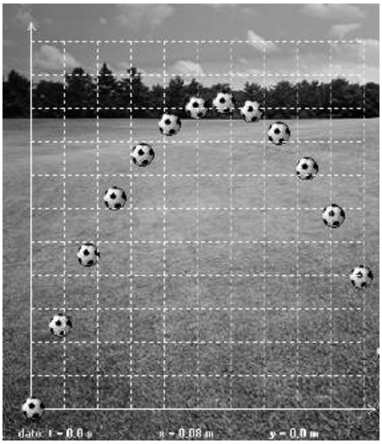
$$K = C_x\rho_{air}\pi R^2$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g + \frac{K}{m}v_y^2$$

Action de l'air négligée

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g$$

• **Mouvement avec vitesse initiale**



$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\frac{k\mathrm{S}}{m}v\vec{v}=\vec{g} \quad \text{avec } v^2=v_x^2+v_y^2$$

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}+\frac{kS}{m}\times v\times v_x=0$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}+\frac{kS}{m}\times v\times v_y=-g$$

Comment introduire les équations différentielles ?

Plusieurs stratégies pédagogiques peuvent être envisagées :

- les équations différentielles sont introduites en mathématiques puis utilisées en sciences physiques.
- les expérimentations réalisées en sciences physiques induisent l'existence des équations différentielles, les mathématiques formalisent leurs structures et élaborent les méthodes qui permettront leurs résolutions et fournissent ainsi des outils au physicien.
- etc.

De toute façon, quelle que soit la stratégie adoptée, la définition, les propriétés des équations différentielles et leur résolution par la méthode d'Euler restent des activités à réaliser en mathématiques par les élèves, même si le professeur de physique doit savoir ce qui a été fait par ses élèves en mathématiques.

ANNEXE 1 : EXTRAITS DU PROGRAMMES DE PHYSIQUE

Terminale S : BO Hors série n° 4 du 30 août 2001 – Volume 9 - page 74

Un condensé des commentaires

Le programme de sciences physiques de terminale S a pour **trame l'évolution temporelle des systèmes**.
En classe de terminale est mise en place une compréhension plus fine de l'évolution des systèmes, en étudiant celle-ci quantitativement, tant sur le plan expérimental que théorique.
Sur le plan expérimental, observer une évolution c'est mesurer **le taux de variation** de certaines grandeurs physiques. Qu'il s'agisse de la propagation d'une perturbation dans un milieu, du taux de désintégration d'un noyau radioactif, de l'établissement du courant dans un circuit électrique, du mouvement d'un mobile ou d'un satellite, c'est à des taux de variation que l'on s'intéresse. L'accélération d'un mobile, notion nouvelle pour les élèves dans le cours de physique, est également un taux de variation, si on la comprend comme la vitesse de la vitesse. On s'interrogera sur les paramètres qui pilotent ces évolutions.
Du point de vue théorique, un taux de variation instantané est représenté par **une dérivée**, notion introduite dans le cours de mathématiques en classe de première S. Étudier les variations temporelles nécessite d'introduire la variable temps dans le formalisme. Le temps, disait Henri Poincaré s'interrogeant sur sa nature, est défini de sorte que les équations de la mécanique soient aussi simples que possible. **S'interroger sur les paramètres qui influent sur la dérivée d'une grandeur physique, c'est chercher à établir *une équation différentielle***. La résoudre permet d'anticiper l'évolution d'un système. **La mise en place d'une méthode numérique itérative permet de mieux ancrer l'idée du déterminisme et de la causalité : l'état d'un système à un instant donné dépend de son état aux instants antérieurs et des actions qui s'exercent sur lui**.
Ainsi, au cours de leur dernière année de lycée, les élèves ont pour la première fois la possibilité de toucher du doigt **le double mouvement de l'activité scientifique dans le domaine de la physique : confronter les prédictions d'un modèle théorique à des résultats expérimentaux, utiliser des résultats expérimentaux pour affiner un modèle théorique**.

Du point de vue formel, **l'objet mathématique qui décrit la façon dont les actions déterminent l'évolution d'un système est une équation différentielle**. C'est un concept nouveau pour les élèves. Dans les équations qu'ils ont vues précédemment, il s'agit de trouver **un nombre**. **Là, l'inconnue est une fonction**. La notion d'équation différentielle est détaillée dans le cours de mathématiques, mais ***l'interaction physique-mathématique est ici cruciale*** pour les deux disciplines. Les mathématiques ne sont pas un outil pour la physique, elles en sont constitutives. Leur pertinence pour la description du monde physique peut être l'objet d'une interrogation permanente : comment la manipulation de symboles sur une feuille de papier permet-elle de mettre en place un monde abstrait qui se comporte de façon analogue au monde réel, processus clef de notre compréhension de la nature et d'une action aux effets prévisibles ?

Le cadre théorique le plus achevé de ce programme de terminale S est la mécanique (partie D du programme). Les élèves ont été initiés au principe d'inertie en classe de seconde, à divers types de force en seconde et en première S. Au cours de ces deux années s'est précisée l'idée que **ce n'est pas la vitesse qui est le signe d'une interaction entre un mobile et son environnement, mais le changement de la vitesse**. En terminale, on introduit le taux de variation de la vitesse, et la formalisation des lois d'évolution peut ainsi être complète. La nouveauté réside dans la possibilité de calculer et prévoir l'évolution temporelle d'un système mécanique, une fois connues les forces en jeu et les conditions initiales. La méthode d'Euler pour la résolution d'une équation d'évolution du premier ordre est mise en œuvre. L'étude expérimentale du mouvement de projectiles dans le champ de pesanteur, d'objets divers dans des liquides, de systèmes oscillants mécaniques, ainsi que la connaissance du mouvement des satellites et des planètes montrent que tous ces mouvements peuvent être formalisés dans un même cadre théorique.

La physique du noyau atomique (partie B du programme) sera l'occasion de placer des ordres de grandeur sur le phénomène et **d'étudier une décroissance radioactive**. Comprendre l'échelle à laquelle la radioactivité naturelle se place est un objectif essentiel pour la formation scientifique du citoyen. L'occasion est donnée, en outre, de montrer comment on met en place, lorsque c'est nécessaire, une approche statistique : **le comportement d'un noyau est aléatoire, mais celui d'une population de noyaux, en moyenne, est parfaitement déterminé, et régi par une équation différentielle simple**. Le programme de mathématiques se charge d'opérer le passage du caractère aléatoire de la désintégration d'un noyau individuel au caractère déterministe de l'évolution d'une population de noyaux radioactifs.

Concernant les systèmes électriques (partie C du programme), les élèves se sont intéressés en classe de Première à certains effets propres au courant continu. Il s'agit en Terminale d'aborder des phénomènes liés à la variation du courant électrique. On signale l'intérêt de pouvoir réaliser des signaux électriques dont la variation temporelle peut être réglée en fonction de besoins spécifiques. La formalisation de ces systèmes fait apparaître des analogies avec les systèmes mécaniques, puisqu'on y trouve les notions de régime asymptotique, de temps caractéristique d'évolution, de période propre et de résonance. C'est une première approche de l'idée profonde selon laquelle les mathématiques sont un outil idéal pour fabriquer des métaphores : **si deux systèmes différents sont régis par des équations formellement identiques, chaque caractéristique du comportement de l'un se retrouve dans l'autre, et les deux systèmes s'éclairent mutuellement**.

Extraits des colonnes contenus :

CONTENUS		
Évolution des systèmes électriques	**Transformations nucléaires**	**Évolution temporelle des systèmes mécaniques**
Cas d'un dipôle RC *1. Le condensateur* Description sommaire, symbole. Charges des armatures. Intensité : débit de charges. Algébrisation en convention récepteur i, u, q. Relation charge-intensité pour un condensateur $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, q charge du condensateur en convention récepteur. Relation charge-tension $q = \mathrm{C}u$; capacité, son unité le farad (F). *2. Dipôle RC* Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension : tension aux bornes du condensateur, intensité du courant ; étude expérimentale et étude théorique (résolution analytique). Énergie emmagasinée dans un condensateur. Continuité de la tension aux bornes du condensateur. Connaître la représentation symbolique d'un condensateur. **Cas du dipôle RL** *1. La bobine* Description sommaire d'une bobine, symbole. Tension aux bornes d'une bobine en convention récepteur : $u = ri + \mathrm{L}\ \mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ Inductance : son unité le henry (H). *2. Dipôle RL* Réponse en courant d'une bobine à un échelon de tension : étude expérimentale et étude théorique Résolution analytique. Énergie emmagasinée dans une bobine. Continuité de l'intensité du courant dans un circuit qui contient une bobine.	**Décroissance radioactive** *1. Stabilité et instabilité des noyaux :* Composition, isotopie, notation ${}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}$. Diagramme (N,Z). *2. La radioactivité :* La radioactivité α, β, β^{+}, émission γ. Lois de conservation de la charge électrique et du nombre de nucléons. *3. Loi de décroissance :* Évolution de la population moyenne d'un ensemble de noyaux radioactifs. $\Delta\mathrm{N} = -\lambda\mathrm{N}\Delta t$; $\mathrm{N} = \mathrm{N}_0\ \mathrm{e}^{-\lambda t}$. Importance de l'activité $\lvert\Delta\mathrm{N}\rvert/\Delta t$, le becquerel. Constante de temps $\tau = 1/\lambda$. Demi-vie $t_{1/2} = \tau \ln 2$. Application à la datation.	**Étude de cas** *1. Chute verticale d'un solide* Force de pesanteur, notion de champ de pesanteur uniforme. **– Chute verticale avec frottement** Application de la deuxième loi de Newton à un mouvement de chute verticale : forces appliquées au solide (poids, poussée d'Archimède, force de frottement fluide) ; équation différentielle du mouvement ; résolution par une méthode numérique itérative, régime initial et régime asymptotique (dit « permanent »), vitesse limite ; notion de temps caractéristique. **– Chute verticale libre** Mouvement rectiligne uniformément accéléré ; accélération indépendante de la masse de l'objet. Résolution analytique de l'équation différentielle du mouvement ; importance des conditions initiales.

ANNEXE 2 : EXTRAITS DES PROGRAMMES DE MATHÉMATIQUES

Première S : BO Hors série n °7 du 31 août 2000 – Volume 7 - page 167

Terminale S : BO Hors série n °4 du 30 août 2001 – Volume 9 - page 64

Première S :

Dans le paragraphe **Dérivation** :
On construira point par point un ou deux exemples d'approximations de courbe intégrale définie par $y' = f(t)$ *et* $y(t_0) = y_0$ *, en utilisant l'approximation* $\Delta f \approx f'(a)\Delta t$.

Terminale S : les points essentiels sur les équations différentielles

Un extrait des commentaires

Introduction
Le programme de Terminale S s'inscrit dans la continuité de celui de Première et il en reprend de ce fait les éléments.
La classe terminale signe la fin des études secondaires ; son contenu doit donc répondre à une double exigence :
– s'inscrire dans **la cohérence des connaissances transmises** aux élèves dans leur cursus scolaire,
– **ouvrir à des horizons neufs et variés**. […]
Les élèves à qui ce programme est destiné ont grandi dans un environnement technologique, qui façonne leur comportement et leurs valeurs et crée des centres d'intérêt profondément nouveaux. La puissance d'investigation des outils informatiques et l'existence de calculatrices performantes dont la plupart des élèves disposent sont des progrès bienvenus, et leur l'impact sur la pédagogie des mathématiques est considérable. Il faut accompagner cette évolution, notamment en utilisant ces outils dans les phases de découverte et d'observation par les élèves. **Certains éléments (par exemple les équations différentielles ou la statistique) apparaissent immédiatement utiles aux autres disciplines scientifiques**. Mais utile ne signifie pas utilitaire. Les mathématiques, science du calcul, ne sont pas que cela, et il est important que les élèves comprennent **qu'elles sont aussi une école de rigueur qui exige une pensée claire**. […]

II.1 Analyse
Deux objectifs majeurs fédèrent les éléments de ce chapitre :
– l'extension du champ des suites et des fonctions vues en classe de première à quelques nouvelles fonctions classiques :
exponentielles, **logarithmes**, **trigonométriques** (telle la fonction tangente) ou faisant intervenir des radicaux ;
– l'initiation au calcul intégral et à la problématique des équations différentielles : la présence de ces dernières, bien que modeste dans le libellé du programme, est fondamentale pour amener à la compréhension de la puissance des mathématiques

pour la modélisation ; **un travail conjoint avec les autres disciplines favorisera cet objectif**.
L'étude des suites et fonctions sera motivée par la résolution de problèmes : elle n'est pas une fin en soi. Ces problèmes pourront être d'origine mathématique, **physique**, biologique, économique ou autre et amèneront à des recherches d'extrema, des comparaisons de fonctions, des résolutions graphiques d'équations ou d'inéquations, etc. On privilégiera les problèmes mettant en jeu des liens entre une fonction et sa dérivée première ou seconde. On pourra remarquer en particulier que certains phénomènes peuvent être étudiés soit en temps discret – à l'aide d'une suite –, soit en temps continu – à l'aide d'une fonction – (évolution d'un capital par exemple).
Une bonne maîtrise des fonctions classiques (dérivées, extrema, comportements asymptotiques, courbes représentatives) est nécessaire ; elle doit permettre une certaine aisance dans les problèmes qui les mettent en jeu.
La notion de continuité est introduite et permet de disposer du langage nécessaire pour énoncer les théorèmes de façon satisfaisante. L'étude théorique de la continuité des fonctions classiques est exclue.
Dans le cadre de la résolution de problèmes, l'étude d'une fonction se limitera le plus souvent à un intervalle.

Extraits des programmes

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Introduction de la fonction exponentielle		
Étude de l'équation $f' = kf$. Théorème : il existe une unique fonction f dérivable sur R telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Relation fonctionnelle caractéristique. Introduction du nombre e. Notation e^x. Extension du théorème pour l'équation $f' = kf$.	L'étude de ce problème pourra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique, ou par la recherche de fonctions dérivables f telles que $f(x + y) = f(x)f(y)$. On construira avec la méthode d'Euler introduite en Première des représentations graphiques approchées de f dans le cas $k = 1$; on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits.	Ce travail sera fait très tôt dans l'année car il est central dans le programme de mathématiques et de physique. Il fournit un premier contact avec la notion d'équation différentielle et montre comment étudier une fonction dont on ne connaît pas une formule explicite. La méthode d'Euler fait apparaître une suite géométrique et donne l'idée que la fonction exponentielle est l'analogue continu de la notion de suite géométrique, ce que l'équation fonctionnelle confirme.

Équations différentielles $y' = ay + b$.		
	On démontrera l'existence et l'unicité de la solution passant par un point donné. On étudiera quelques problèmes où interviennent des équations différentielles se ramenant à $y' = ay + b$.	Ce paragraphe, déjà abordé lors de l'introduction de la fonction exponentielle, pourra être réparti sur l'ensemble de l'année. On fera le lien avec l'étude de ces équations en physique ; on définira le temps caractéristique $\tau = -1/a$ pour $a < 0$. Les indications utiles pour se ramener à $y' = ay + b$ doivent être données. Des solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ seront introduites en cours de physique.