Problèmes de lieux - Problèmes de construction(*)

Bernard Destainville(**)

L'apparition d'un paragraphe concernant les lieux géométriques dans le nouveau programme de la classe de Première S nous a incité, davantage encore, à en approfondir la démarche ; de plus les problèmes de construction sont liés à ceux de lieux.

Pour chacun de ces deux types d'activités, après découverte d'un ensemble E qui contient les solutions, et lorsque cet ensemble n'est pas vide, une seconde partie, réciproque de la précédente, est indispensable : tout élément de l'ensemble E est-il solution du problème ?

• *Dans un problème de lieu géométrique de points*, et lorsque la réponse n'est pas immédiate, il est préférable de construire une figure, éventuellement avec plusieurs positions du point variable, pour conjecturer ce lieu.
– **Dans la recherche éventuelle d'une conjecture à l'aide d'un logiciel dynamique, cette construction n'est efficace** que si la séquence de construction des points est correcte. Surtout, avec un tel logiciel, le point P du lieu doit être déclaré après celui qui a été choisi comme point variable M.
Le mouvement de ce point variable M sur l'écran est très utile pour observer celui de P ; cela aidera beaucoup pour l'étude réciproque (voir IV).
– **En ce qui concerne les démonstrations de lieux**, une fois obtenu un support E du lieu (et dans la mesure où E n'est pas vide), une *étude réciproque* est indispensable pour voir si tous les points de cet ensemble E conviennent : à partir d'un point P quelconque de E peut-on faire correspondre dans l'ensemble de départ au moins un point M dont P est l'image ? Les points P de E qui n'ont pas d'antécédent sont à rejeter (voir III et IV).
Il est préférable de construire une nouvelle figure pour mieux cerner les étapes de la réciproque ; la séquence de construction des points est nécessairement différente de celle de la première partie.

À l'issue de cette étude, nous avons donc trouvé le lieu géométrique par double inclusion ; c'est l'ensemble des points de E qui ont un antécédent.
On retrouve évidemment cette démarche lorsqu'on entreprend de justifier les divers « ensembles-images », en général admis dans les programmes actuels pour les transformations.
Dire que l'ensemble B est l'image de l'ensemble A par une transformation T *signifie* que B est le lieu des images des éléments de A par T : tout élément de A a son image

(*) Article rédigé à partir du compte rendu d'un atelier du colloque de la commission inter-Irem de géométrie à Liège (15-16-17 mai 2003). Je remercie très vivement Henri Bareil et Jean-Pierre Friedelmeyer pour leurs participations judicieuses à la rédaction de cet article.
(**) Irem de Toulouse.

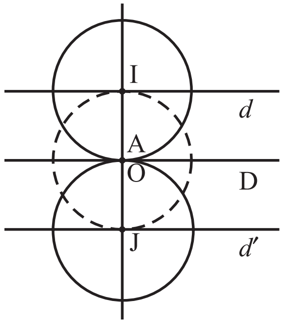
dans B et, réciproquement, tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A.
Pour les transformations des différents programmes de Collège et de Lycée, l'image d'un segment est un segment, celle d'un cercle est un cercle, … Mais ce n'est pas toujours le cas (penser à l'inversion) ; une recherche complète de lieu avec étude directe et étude réciproque peut alors davantage se justifier.

• *Dans un problème de construction géométrique d'un point*, on est souvent conduit à privilégier parmi les hypothèses *deux conditions nécessaires* qui se traduisent par l'apparition du point sur deux lieux géométriques dont on recherche l'intersection(1).
Lorsque ces deux lieux sont sécants, il reste à faire une *réciproque* : les éventuels points communs à ces lieux satisfont-ils à toutes les propriétés imposées ?
Un exemple : le centre du cercle circonscrit à un triangle est *nécessairement* à l'intersection de deux des trois médiatrices des côtés de ce triangle ; pour prouver que c'est *suffisant*, il faut démontrer que le point d'intersection de ces deux médiatrices est effectivement équidistant des trois sommets du triangle.
Dans certains problèmes de construction, un point M peut être l'image d'un autre point M′ par une transformation connue ; mais, d'une part, il faut souvent construire d'abord ce point M′, d'autre part, pour la réciproque, le passage de M′ à M nécessite lui-même une nouvelle construction, en général aussi par intersection de deux lieux (voir II).

Dans les activités qui suivent, on peut en particulier observer les liens entre les deux types de problèmes.

– ***Énoncé I*** *: soient un point* A *et une droite* D *du plan.*
Construire un cercle de rayon r passant par A *et tangent à* D.

• *S'il existe une solution*, soit I le centre du cercle :
– la distance de I à D est r ; I appartient donc à l'une ou l'autre des droites d et d' parallèles à D à la distance r, lieu des points situés à la distance r de D ;
– la distance de I à A est r ; I appartient donc au cercle (A,r) (second lieu).
Si le point I existe, il appartient donc à l'intersection de d ou d' et du cercle (A,r).
Appelons O la projection de A sur D et supposons, sans nuire à la généralité de l'exercice, que le point A et la droite d sont d'un même côté de D.



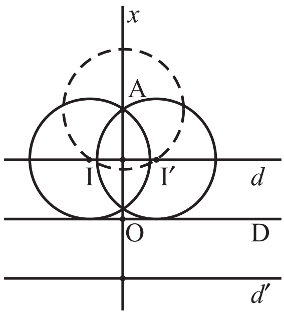
• *On peut traiter à part le cas particulier où* A *est en* O, c'est-à-dire où OA = 0 : dans ce cas, le cercle (A,r) est tangent à d en un point I et à d' en un point J.

Réciproque : dans ce cas, il y a deux cercles solutions : les cercles de centre I et J qui passent par A, c'est-à-dire O, et qui sont par conséquent tangents à D.

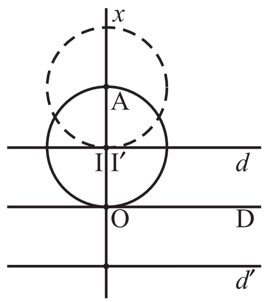
• *Dans tous les autres cas*, avec l'hypothèse ci-dessus (le point A et la droite d d'un même côté de D), les points I, s'ils existent, appartiennent à d et au cercle (A,r). Une

(1) Georges Polya - *La découverte des mathématiques*, DUNOD & Georges Glaeser - *Analyse-Synthèse*, Brochure APMEP.

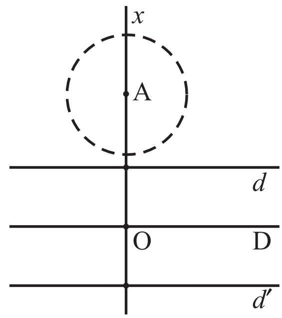
fois ces deux ensembles construits, on obtient les trois cas ci-dessous, avec deux, une ou zéro intersections.



Si $0 < \mathrm{OA} < 2r$, il y a deux intersections I et I′.



Si $\mathrm{OA} = 2r$, il y a une intersection I.



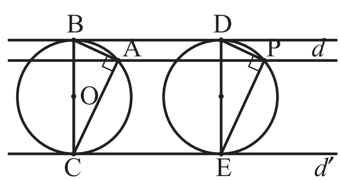
Si $\mathrm{OA} > 2r$, il y a zéro intersection.

Réciproque :
– Construisons les cercles de centre I (ou I′) et de rayon r, lorsqu'ils existent.
– Ils passent par A, et comme la distance de I (ou I′) à D est égale à r, ces cercles sont aussi tangents à D.

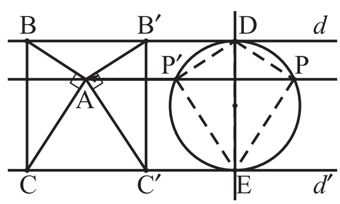
• ***Bilan complet*** :
si $0 \leq \mathrm{OA} < 2r$, il y a deux cercles solutions ;
si $\mathrm{OA} = 2r$, il y a un cercle solution ;
si $\mathrm{OA} > 2r$, il y a zéro cercle solution.

– ***Énoncé II*** : *d et d' sont deux droites parallèles et* A *un point du plan entre d et d'. Construire un triangle* ABC*, rectangle en* A*, avec* B *sur d et* C *sur d', de telle sorte que la droite* (BC) *soit perpendiculaire à d.*

ANALYSE.
Le couple de droites (d,d') est *invariant* par toute translation de vecteur de même direction qu'elles.
D'où l'idée de construire la figure demandée, abstraction faite de la position du point A sur la parallèle à d qui passe par A, puis de relier cette figure réalisée à la figure demandée au moyen d'une translation.
Si ABC existe, soit D un point de d et t la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$; soient $\mathrm{E} = t(\mathrm{C})$ et $\mathrm{P} = t(\mathrm{A})$.



D étant fixé, P appartient à deux lieux : le cercle de diamètre [DE] et la droite parallèle à d qui passe par A.



RÉCIPROQUE.
On part de d, d', A et de [DE] perpendiculaire à d. La parallèle à d en A coupe le cercle de diamètre [DE] en deux points P et P′. Alors,

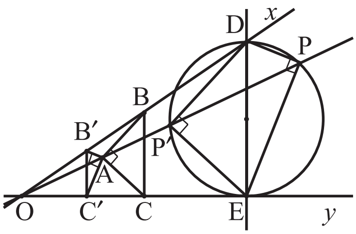
• Avec t', translation de vecteur $\overrightarrow{PA}$, $t'(D) = B$ et $t'(E) = C$, le triangle ABC est rectangle en A. Il convient.

• Même travail avec t'', translation de vecteur $\overrightarrow{P'A}$. D'où AB′C′.

CONCLUSION : le problème admet deux solutions.

Nous avons choisi cette méthode dynamique parce qu'elle fait provisoirement disparaître la contrainte sur A, en déplaçant la figure, dans le même esprit que la construction d'un carré inscrit dans un triangle, plusieurs méthodes faisant intervenir un homothétie étant possibles.
Note – Une autre méthode consiste à construire d'abord le milieu O de [BC] ; si l'on appelle D la droite des milieux de la bande de plan et $2a$ la largeur de cette bande, O est dans l'intersection de D et du cercle de centre A et de rayon a. On retrouve les deux solutions.

– ***Un énoncé dans le même esprit*** :
A est un point situé à l'intérieur d'un angle aigu de côtés [Ox) et [Oy). Construire un triangle ABC rectangle en A, avec B sur [Ox) et C sur [Oy), et tel que la droite (BC) soit perpendiculaire à la droite [Oy).
Ici les droites (Ox) et (Oy) sont *invariantes* dans les homothéties de centre O.



Nous laissons au lecteur le plaisir de mettre en œuvre une homothétie pour l'analyse, et de réaliser la construction ci-dessus pour obtenir les deux solutions à l'aide de deux nouvelles homothéties.

– ***Énoncé III*** : *Soit un segment* [AB] *et* M *un point quelconque du plan. Tracer la perpendiculaire à* (MA) *en* A *et la perpendiculaire à* (MB) *en* B. *Lorsque ces deux droites sont sécantes, on appelle* P *leur point d'intersection et* I *le milieu du segment* [MP].
1) Pour quelles positions de M *le point* P *existe-t-il ?*
2) Quel est le lieu géométrique de I *?*
3) Quel est le lieu géométrique de P *lorsque* M *décrit une droite d perpendiculaire à* (AB) *?*

1) P existe si et seulement si les perpendiculaires aux droites (MA) et (MB) ne sont pas parallèles, c'est-à-dire si les points A, M et B ne sont pas alignés.
P existe donc si et seulement si M n'appartient pas à la droite (AB).

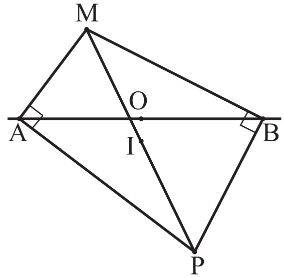
2) <u>Lieu géométrique de I.</u>
M n'étant pas déclaré sur un sous-ensemble du plan, une conjecture avec CABRI n'est pas possible(*).

(*) N.D.L.R. Ceci n'est pas exact : il suffit de tracer la figure et de demander la trace du point I. Lorsque l'on déplace M de manière quelconque, on voit apparaître des points dont on peut conjecturer qu'ils se trouvent sur la médiatrice de [AB].

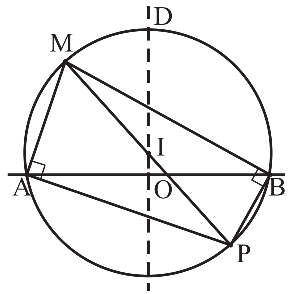
• LE SUPPORT DU LIEU (analyse)
En considérant les deux triangles rectangles AMP et BMP, l'hypoténuse commune est [MP] et :

IA = IM = IP = IB ;

donc I appartient à la médiatrice D de [AB].



• RÉCIPROQUE (synthèse)
Soit I un point quelconque de D.
– *Construction* : le cercle (I) de centre I qui passe par A, passe aussi par B. Soit un point M quelconque de (I) et P le point diamétralement opposé.
– I *convient-il ?*
Les triangles MAP et MBP, inscrits dans des demi-cercles, sont rectangles.
Donc I convient et il lui correspond une infinité de couples de points (M,P).



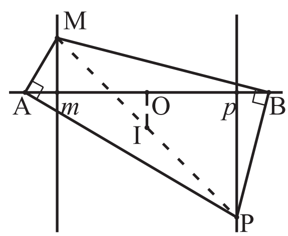
• CONCLUSION : le lieu géométrique de I est la droite D en entier.

3) Lieu géométrique de P.

• La FIGURE.
– *En séquence*, construction d'une droite d perpendiculaire à (AB), de M sur d, puis P, puis I.
Notons m l'intersection de d et de (AB) ; d'après le 1°, P existe si et seulement si M ≠ m. Notons p la projection de P sur (AB).

• CONJECTURE.
Le logiciel CABRI propose comme lieu géométrique de P une perpendiculaire d' à (AB) privée de son intersection p avec (AB).
L'observation de plusieurs positions de d nous incite à penser que p est le point symétrique de m par rapport au milieu O de [AB] (voir la figure ci-dessous).
Note : une erreur consisterait à utiliser le fait que d′ est la droite symétrique de d par rapport à I *pour obtenir directement le lieu ; en effet,* I *est variable.*

• LE SUPPORT DU LIEU (analyse)
La projection orthogonale de I sur la droite (AB) est O (voir le 2°), celle de M est m et celle de P est p ; or I est le milieu du segment [MP] ; ainsi, par projection, O est le milieu de [mp].
Conclusion : P appartient à d', droite perpendiculaire à (AB) en p, point symétrique de m par rapport à O.



• RÉCIPROQUE (synthèse)
Soit P un point quelconque de d'.
– *Construction* : Traçons les perpendiculaires en A à (PA) et en B à (PB).

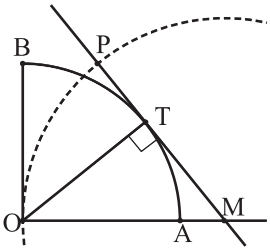
Si P = p, ces droites sont parallèles ; M n'existe pas.
Si P ≠ p, ces droites sont sécantes en un point M.
Soit I le milieu du segment [PM].
En séquence, nous avons donc construit P, puis M, puis I.
– P *convient-il* ? pour tout point P de d', distinct de p, en inversant les rôles de P et M dans l'étude qui précède (c'est-à-dire l'analyse), on démontre que M appartient à la droite d. Donc P convient.

CONCLUSION : le lieu géométrique de P est la droite d' privée du point p (voir l'annexe pour un complément).

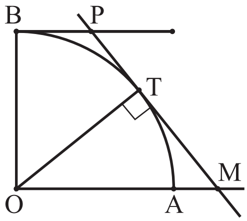
– ***Énoncé IV*** *:* (O) *est un quart de cercle de centre* O *et d'extrémités* A *et* B. *Pour tout point* T *de* (O) *distinct de* B, *la tangente en* T *à* (O) *coupe la demi-droite* [OA) *en* M. P *est le point de la demi-droite* [MT) *tel que* MP = MO. *Trouver le lieu géométrique de* P *lorsque* T *décrit* (O).

LA FIGURE
Après la mise en place de (O), la séquence de construction est T, M, P.

CONJECTURE (avec CABRI)
En déplaçant T sur (O), on peut observer les comportements limites de P aux extrémités d'un segment qui pourrait être le côté]BI] du carré AOBI.

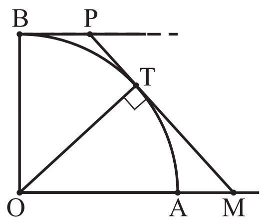


construction

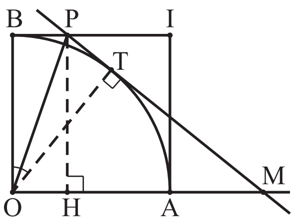


conjecture

Note : la figure réalisée en commençant par construire M sur [OA), puis T, puis P apporte une information originale pour B qui semble exclu du lieu.
Explication : CABRI n'utilise pas de point à l'infini dans le tracé de lieux.



LE SUPPORT DU LIEU (analyse)
Soit I le quatrième sommet du carré AOBI et H la projection de P sur (OA).
Montrons d'abord que le point P appartient à la demi-droite [BI).
Démonstration
• Par hypothèse, P est dans le demi-plan de frontière (OM) qui contient T.



• D'une part, P appartient à la droite (BI) ; en effet :
Une première méthode : dans le triangle OMP isocèle en M, les hauteurs [PH] et [OT] sont isométriques, donc PH = OT.
Par suite, PH = OB, donc, avec (PH) et (OB) parallèles et HP et OB de même sens, $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{OB}$. P est l'image de H par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$. Donc P appartient à (BI) transformée de (OA).
Une deuxième méthode : avec des considérations angulaires, les triangles OBP et OTP sont isométriques (deuxième cas), donc le triangle OBP est rectangle en B ; donc les droites (BP) et (BI) sont confondues.
• D'autre part, dans la construction de P, le cercle (M ; MO) est dans le demi- plan de frontière (BO) qui contient M.
Ainsi, P appartient à la demi-droite [BI) qui est située dans ce demi-plan.

RÉCIPROQUE (synthèse)
• *Construction* : Soit P un point de la demi-droite [BI) et T le point symétrique de B par rapport à (OP). Alors $\widehat{TOB} = 2\,\widehat{POB}$.
. Si P = B, T = B et M n'existe pas.
. Si P ≠ B et P extérieur à]BI], comme $\widehat{POB} > 45°$, $\widehat{TOB} > 90°$; donc P ne convient pas.
Ainsi, **il faut** que P appartienne au segment]BI] : *le lieu de* P *est donc inclus dans*]BI]. **Est-ce suffisant** ?
Soit P un point de]BI] ; par symétrie par rapport à (OP), la droite (PT), tangente en T au quart de cercle (O), coupe (OA) en M.
En séquence, nous avons donc construit P, puis T, puis M.
• P *convient-il* :
Méthode 1 : On établit que OT = OB (symétrie) et que PH = OB (rectangle BPOH). De ce fait, dans le triangle MPO, MO = MP (on peut, entre autres, utiliser deux calculs de l'aire du triangle).
Méthode 2 : Les angles en O et P du triangle MOP sont égaux (symétrie par rapport à (OP) et angles alternes-internes en P et en O) ; donc MO = MP.

CONCLUSION : P convient, donc]BI] est inclus dans le lieu de P.
Ainsi le lieu géométrique de P est le segment]BI].

ANNEXE

(d'après une suggestion – étoffée – de Jean-Pierre Friedelmeyer)

Notre étude se proposait d'insister sur les deux aspects complémentaires (étude directe - étude réciproque ; analyse - synthèse) des problèmes de lieux et de constructions.
Indépendamment de ce thème, revenons sur l'Exercice III pour en souligner la richesse.

• Une étude analytique dans un repère orthonormal, à partir de $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ par exemple, permet de la deviner :
Soit M (x,y) et P (X,Y). Alors $\mathrm{X} = -x$, puis, (MA) ayant pour équation $y = m(x + 1)$ (avec (MA) non perpendiculaire à (AB)), une équation de (PA) est $\mathrm{Y} = -\frac{1}{m}(\mathrm{X}+1)$, d'où $\mathrm{Y} = \frac{x^2 - 1}{y}$.
On conçoit, dès lors, que, Γ étant le lieu de M et Γ′ celui de P, le choix de Γ puisse poser problème pour identifier Γ′.

• *Ainsi lorsque* Γ *est une droite* Δ *sécante à* (AB) *:*
– si Δ passe par A (resp. B), Γ′ a pour support la droite fixe perpendiculaire à Δ en A (resp. B) ;
– si Δ est perpendiculaire à (AB), nous avons déjà traité le problème ;
– mais, hors de ces deux cas, Γ ayant pour équation $y = m(x + a)$, avec $a \neq 1$ et $a \neq -1$ et m constant, Γ′ relève de l'équation $\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{X}^2 - 1}{m(a - \mathrm{X})}$.

• *Lorsque* Γ *est un cercle de centre* O *:*
– si son diamètre est AB, la réponse pour Γ′ est quasi-immédiate puisque P est sur le même cercle ;
– sinon, avec un rayon a ($a \neq 1$), Γ′ relève de l'équation $\mathrm{Y}^2(a^2 - \mathrm{X}^2) = (\mathrm{X}^2 - 1)^2$.

• *Lorsque* Γ *est une parallèle à* (AB)*, distincte de* (AB) *:*
$y = a$, constant, et Γ′ relève de l'équation $\mathrm{Y} = \frac{1}{a}(\mathrm{X}^2 - 1)$, qui est une équation de parabole…
Réciproquement, la relation entre les deux points étant involutive…

• On conçoit qu'un **logiciel dynamique**, comme CABRI, peut alors être d'un grand secours pour explorer **à plaisir** des situations, simples pour le choix de Γ, donnant pour Γ′ des identités de plus en plus complexes… *Un feu d'artifice de courbes !*