Sur les fonctions vues comme « boîtes noires »

Alain Busser(*)

Le programme de seconde propose de présenter « une fonction comme un dispositif capable de produire une valeur numérique quand on introduit un nombre (c'est-à-dire comme une “ boîte noire ”) » [2]. Dans le présent article, je vais relater une expérience menée avec deux classes de seconde, utilisant un logiciel gratuit [1] pour manipuler de telles « boîtes noires », dans le but de faire mieux saisir la notion de fonction d'une variable réelle à des élèves qui, souvent, estiment ne rien comprendre à ce qu'ils appellent les « fonctions affines », et ce depuis la classe de troisième.

Un logiciel de musique contre les fausses notes en maths

Le logiciel utilisé s'appelle « Sync Modular », et une version d'évaluation est téléchargeable gratuitement sur le site éponyme (http://www.mtu-net.ru/syncmodular). Je connais ce logiciel parce que je suis mélomane et musicien amateur, et l'avais déjà utilisé pour produire quelques cacophonies numériques. Et comme mon merveilleux IPR (pléonasme ?) m'avait conseillé de ne pas hésiter à investir dans mon cours des exemples issus de mes loisirs, je me suis demandé s'il n'y avait pas moyen d'illustrer mon cours avec des maths musicales. Que mon sublime IPR (re-pléonasme) en soit donc ici remercié, et puisse cet article échouer entre ses mains ! J'ai donc commencé par installer ledit logiciel sur tous les postes d'une salle informatique. « Sync Modular » est un logiciel de synthèse et de traitement de signal audio destiné à des applications musicales, et la construction d'un instrument de musique virtuel ressemble beaucoup à de la programmation objet, en plus graphique, d'où l'intérêt pour des élèves ayant des problèmes avec la syntaxe…

Au lancer du logiciel, on voit un écran noir avec des boîtes que l'on peut ranger dans un coin (en les tirant avec la souris), puisqu'on ne les utilise pas en maths. Un clic droit au milieu de cet écran fait apparaître un menu contextuel, au sein duquel on choisit « basic » puis « macro ». Un clic droit sur ladite macro nous permet de la rebaptiser « f(x) » et de voir ce qu'il y a dedans (par « go to structure »).

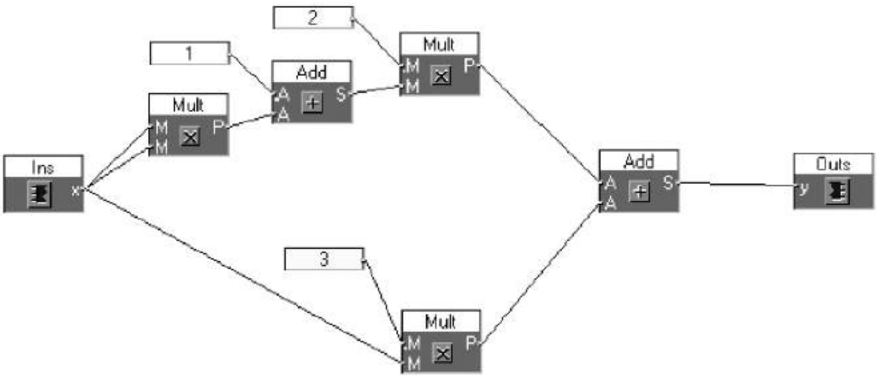
Dans l'antre de la bête

Au départ, il n'y a que deux prises baptisées « Ins » (les éventuelles entrées) et « Outs » (les sorties, qui l'eût cru ?). On commence par créer une entrée (clic droit sur « Ins », puis « Add ») que l'on nomme « x », et une sortie, qui répondra au doux nom de « y ». Pour le premier exercice, on va programmer la fonction :

$$f(x) = (x^2 + 1) \times 2 + 3x.$$

(*) LPO Boisjoly-Potier, 14ème Km, Le Tampon, La Réunion

Par un clic droit dans la zone noire, on peut ajouter les différents objets, et par un tirer avec la souris, on peut les brancher entre eux de la manière adéquate, pour obtenir l'écran :



En route vers la magie

Ensuite, on clique avec le bouton droit sur la zone noire, puis dans le menu contextuel désormais familier, on opte pour « Go to Parent ». On retrouve alors la boîte noire, mais avec des prises nommées « x » et « y ». Il reste à créer une commande pour entrer x, et un affichage pour y :

Un clic droit nous mène au fameux menu contextuel, où on choisit « Basic>Controller ». Encore un clic droit, sur le « Knob » apparu, et dans les paramètres, on modifie tout ce qui suit :

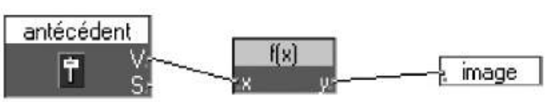
– le nom (« Caption ») devient « antécédent » ;
– l'apparence est remplacée par « fader » (plus maniable, d'après les élèves) ;
– la taille est remplacée par « large » ;
– le « show value », initialement sur « no », passe à « yes » ;
– le minimum et le maximum sont mis à –2 et 3 (arbitrairement) ;
– enfin, le « step » est mis sur 0,05.

Après avoir cliqué sur « done », on branche la sortie « V » du contrôleur « antécédent » sur l'entrée « x » de la boîte noire $f(x)$.

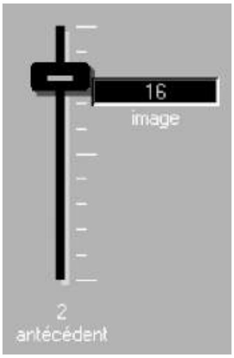
Idem pour l'affichage : clic droit, « Basic>Num Display », et on remplace :

– le nom par « image » ;
– la taille par « large ».

Après le branchement de y sur l'affichage « image », on obtient l'écran ci-dessous :



Le temps de cliquer sur « play », et un clic droit nous mène à « show panel », qui donne le panneau ci-dessous :



Commentaire des élèves : « C'est magique ! »

En réglant le curseur avec la souris, on modifie simultanément x et y suit le mouvement : Certains élèves ont vu d'eux-mêmes que la fonction est d'abord décroissante, puis croissante, alors que ces notions n'avaient pas encore été vues en cours. De plus, très peu d'élèves ont cherché à remplacer x par 3 lorsque je demandais une valeur approchée d'un *antécédent* de 3.

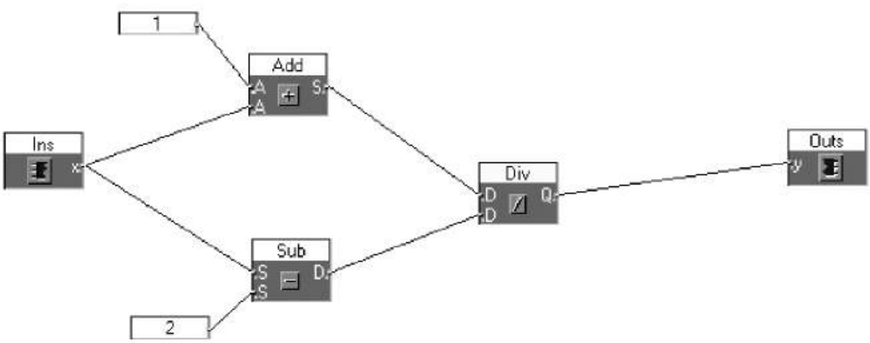
Deuxième séance

La deuxième séance fut plus variée, puisque les élèves savaient mieux programmer des fonctions, et que celles-ci étaient plus simples que celles de la première séance.

Tout d'abord, nous avons refait l'exercice avec une fonction homographique :

$$g(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

dont le schéma est ci-dessous :



En fait, le choix de cette fonction n'est pas si judicieux que cela, puisque sur les trois quarts des postes, l'image de 2 était affichée $-2^{\mathrm{E}}007$, ce qui est dû à une protection du logiciel contre les arrêts intempestifs de calcul (rappelons qu'il est censé produire des sons en temps réel). C'est là un des inconvénients de ce logiciel, qui est un peu trop indulgent avec les sorties du domaine de définition ; dans le même registre, la fonction A^x, que la plupart des élèves voulaient utiliser pour calculer x^2, ne tolère pas les x négatifs (elle est basée sur la formule $\mathrm{A}^x = \mathrm{e}^{x\,\mathrm{Ln(A)}}$). Toutefois, sur environ le quart des postes, l'image de 2 par f est affichée « #IND », ce qui est assez mystérieux puisque la même version de SyncModular a été installée sur tous les postes, qui ont le même système d'exploitation… Toujours est-il que ce genre d'inconvénients n'est pas sans rappeler la façon un peu cavalière dont les tableurs représentent les fonctions homographiques.

Ensuite, j'ai profité de l'occasion pour faire découvrir la notation Abs(x) (le cours sur la valeur absolue n'ayant pas encore été fait) : Une boîte noire avec juste Abs(x) entre l'entrée x et la sortie y ; la remarque selon laquelle

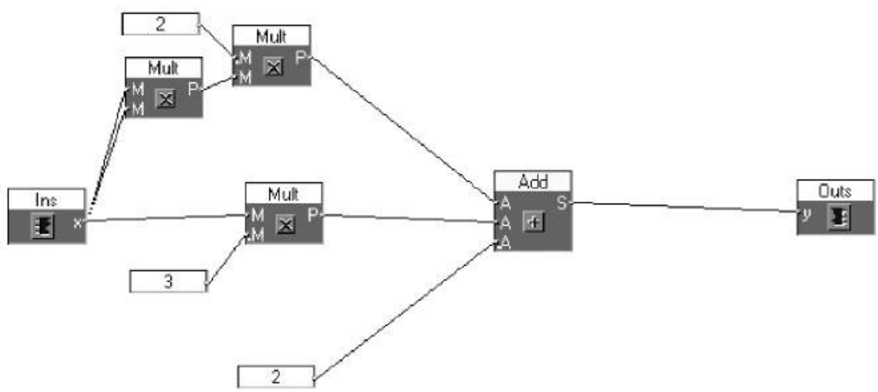
$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

est venue naturellement à pratiquement tous les élèves présents (après avoir remarqué que l'image d'un nombre est toujours égale à celui-ci, puis constaté que finalement, ceci n'est vrai que pour les x positifs).

Enfin, nous avons modifié le fichier de la première séance, qui avait été sauvegardé à cet effet, le but de ce nouvel exercice étant de comparer $f(x)$ et une nouvelle fonction $g(x)$ définie par :

$$g(x) = 2x^2 + 3x + 2,$$

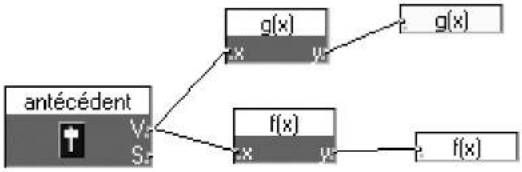
bien entendu obtenue en développant $f(x)$, mais sans en avertir les élèves. Un clic droit un peu plus haut que f(x) nous a permis de créer une nouvelle boîte g(x), avec le contenu représenté ci-dessous :



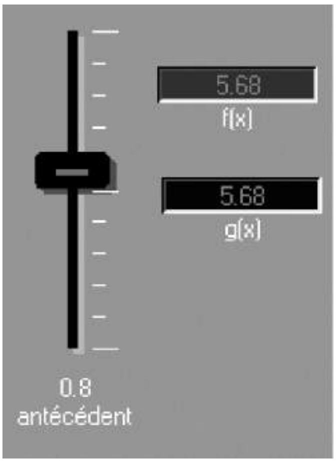
(pour l'additionneur, un clic droit sur celui-ci permet de modifier le « input count » à volonté ; voir à ce sujet la remarque en fin d'article).

Le retour de la magie

Ensuite le classique clic-droit suivi de « Go to Parent » nous révèle la nouvelle boîte noire « g(x) », pour laquelle on crée un nouvel affichage, à l'entrée duquel le y de g(x) est branché. Quant au contrôleur, on utilise celui de f(x), comme le montre la copie d'écran ci-dessous :



Après cela il ne reste qu'à faire un peu de rangement : Clic droit, « show panel », et clic sur le bouton le plus à droite de la barre d'outils, puis on tire avec la souris l'affichage g(x) en-dessous de celui de f(x) (rebaptisé ainsi ; avant il s'appelait « image »). On reclique sur le bouton de droite pour rendre le glisseur à nouveau utilisable, et, après avoir cliqué sur « play » (bouton en forme de triangle), on voit le merveilleux affichage ci-dessous :



qui confirme que, pour tout x, f(x) = g(x). Que signifie ce résultat ? Que, pour tout x,

$$(x^2 + 1) \times 2 + 3x = 2x^2 + 3x + 2,$$

ce qui n'a rien d'étonnant pour celui qui sait développer, mais il y a, en seconde, des élèves qui ne savent pas développer, si, si ! Et surtout, beaucoup d'élèves croient que, si $f(3) = g(3)$, alors $f(x) = g(x)$, ce qui semble dû à une confusion entre une preuve et une vérification (pour vérifier un développement, on remplace x par une valeur quelconque, en général 0, dans $f(x)$ et $g(x)$).

Bilan

Comment peut-on évaluer ce genre d’activité ? Si mes élèves réussissent mieux les exercices sur les fonctions et sur les valeurs absolues que le faisaient leurs prédécesseurs, est-ce que cela prouve que cette activité était utile, ou seulement que les élèves sont meilleurs que leurs prédécesseurs ? Pour l’instant, je me suis borné à leur demander s’ils trouvaient que cette activité les avait aidés à comprendre ce que c’est qu’une fonction, et les réponses ont été variées, allant du oui au non en passant par le « oui, un peu ». L’impression d’avoir été aidé est bien sûr plus répandue chez ceux qui disaient ne rien comprendre aux fonctions…

L’activité de la deuxième séance semble un bon exercice sur le sens des expressions littérales, et de l’égalité entre expressions dépendant de x. Dans cette optique, l’activité est aisément généralisable au collège ; de surcroît, des notions comme la somme et la composition de fonctions sont présentables « d’un clic de mulot », et donc les Premières ES pourraient aussi être intéressés par ce genre de manip…

Parmi les avantages de ce logiciel, je dirais qu’il est très graphique (d’où mon choix initial), et qu’il montre une utilisation possible des fonctions dans le domaine de l’audio, qui intéresse plusieurs élèves (avec des exemples fournis, qui sont parfois très complexes, et qu’on peut facilement examiner avec « show structure »).

Pour ce qui est des inconvénients, on voit que les sorties du domaine de définition ne sont pas gérées, et qu’on ne peut pas utiliser ce logiciel pour la suite du cours : on peut faire des représentations graphiques avec l’« oscilloscope », mais le moins qu’on puisse dire est que le résultat n’est guère exploitable…

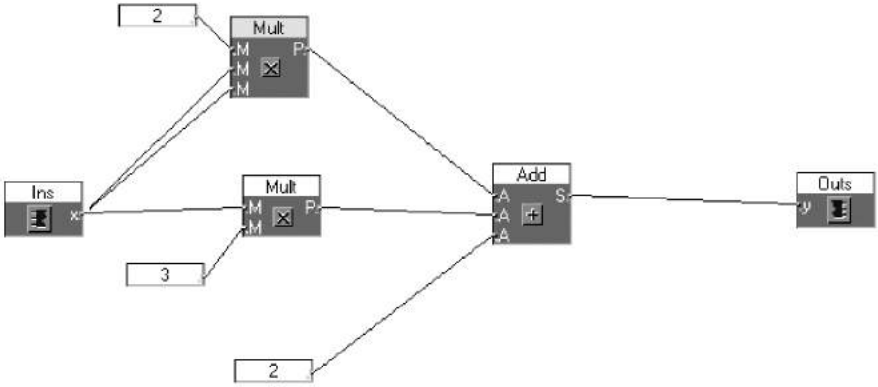
Enfin mes élèves ont rarement été aussi attentifs, et j’ai observé, pour une fois, très peu de confusion entre antécédent et image lors du contrôle qui a suivi. J’ai même obtenu un taux élevé de réussite sur les exercices concernant les tableaux de variations ! Je compte donc utiliser le langage de ce logiciel pour définir les fonctions affines (quelque chose du genre : « s’il y a un additionneur, un multiplicateur, et deux constantes, on dit que la fonction est affine ; la constante branchée à l’entrée du multiplicateur s’appelle le coefficient directeur, et l’autre, l’ordonnée à l’origine »).

Remarques

Le mot « macro » a beaucoup amusé mes élèves créoles, ce mot ayant dans leur langue maternelle un sens très différent de celui auquel je suis habitué… D’ailleurs, l’usage de l’Anglais ne les a guère rebutés, malgré l’aversion de beaucoup d’entre eux pour cette langue ; l’adresse Internet du logiciel suggère que son concepteur est russe, et les problèmes linguistiques eussent pu être bien pires qu’une incursion dans la langue dite « de Shakespeare »…

Le fait d’obtenir x^2 en multipliant x par lui-même est une révision pas complètement inutile, dans une des classes où de trop nombreux élèves multiplient x par 2 pour obtenir son carré, et donc le divisent par 2 pour calculer mentalement sa racine carrée (erreur que j’attribue personnellement à une confusion entre l’addition et la multiplication)…

Quelques élèves ont préféré au schéma montré plus haut pour la fonction g(x), le suivant :



Pour ce faire, il faut cliquer-droit sur le multiplicateur ou l'additionneur, et remplacer le « input count », initialement de 2, par 3 ; je leur ai fait remarquer que ceci n'était pas possible avec une différence ou un quotient, et demandé s'ils savaient pourquoi. De même, plusieurs élèves m'ont demandé s'il était grave d'échanger l'ordre des branchements à l'entrée d'un additionneur, ce qui ne m'a surpris qu'à moitié…

Bibliographie

[1] le site de SyncModular est : http://www.mtu-net.ru/syncmodular

[2] les programmes de seconde sont ceux du B.O. hors-série nº 6 du 12 août 1999.

[3] « Deux questions » in « Faire des mathématiques avec un système de calcul formel », brochure du ministère disponible au http://www.univ-lyon1.fr/IREM/CF/ et au http://www.ac-reims.fr/datice/broc_men/

[4] Nonlinear Elements, de J.O. Smith III, Department of Music, Stanford University

Stanford, California 94305, disponible au format pdf sur le site du CCRMA : jos@ccrma.stanford.edu