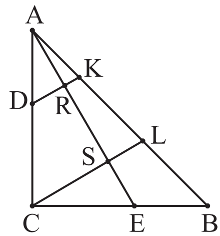
À propos des Olympiades 2002 sujet de la Guadeloupe(*)

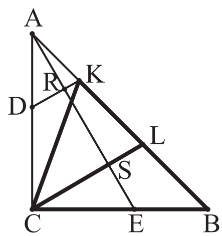
Dixième solution : par les aires (auteur : Bruno Alaplantive)

Rappel de l'énoncé :

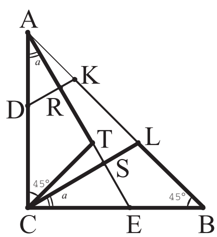


Soit ABC un triangle rectangle en C et isocèle. D ∈ [AC] et E ∈ [BC] sont tels que CD = CE. Les perpendiculaires à (AE) passant par D et C coupent (AB) en K et L.
Montrer que KL = LB.

Solution par les aires de Bruno Alaplantive

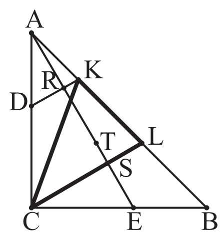


Il s'agit de prouver que les triangles KLC et BCL sont de même aire.
Plaçons sur [AE] le point T tel que AT = LC.
$\widehat{CAT}$ (= $\widehat{CAE}$) et $\widehat{LCB}$ (= $\widehat{SAE}$) ont le même complément, par exemple $\widehat{CAS}$. Ils sont donc égaux. Soit *a* leur valeur.



Les triangles BLC et ACT sont isométriques (AT = LC, AC = CB et $\widehat{CAT}$ = $\widehat{LCB}$) d'aire égale au demi-produit de AT par SC.

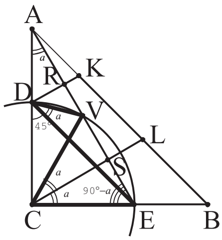
L'aire de KLC vaut, elle, le demi-produit de LC par RS.

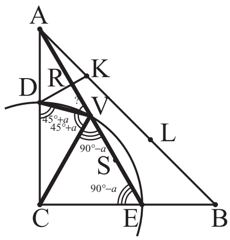


Le problème revient donc à justifier l'égalité de RS et SC.
Traçons le cercle (C ; CD), qui coupe (AE) en E et V. Comme CVE est isocèle de sommet C, la hauteur (CS) est aussi bissectrice et, donc, $\widehat{VCE}$ = $2a$.

(*) Cf. Brochure APMEP n° 146 : « Les Olympiades académiques de mathématiques 2002 ». On y trouve, pages 67 à 73, neuf solutions de ce problème.
N.D.L.R. Nous ne saurions trop recommander nos trois brochures Olympiades (2001, 2002, 2003)…

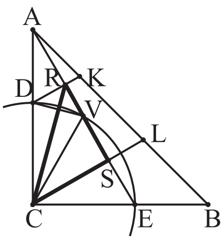
Pour la corde [VE], l'angle au centre vaut $2a$ et donc l'angle inscrit $\widehat{VDE}$ vaut a.





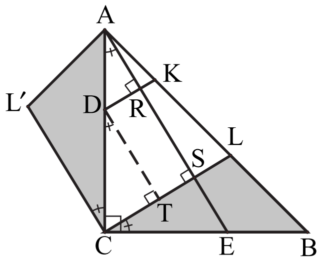
Les angles au sommet V des triangles isocèles VEC et VDC valent respectivement $90° - a$ et $45° + a$, donc $\widehat{DVR} = 45°$. Le triangle rectangle RDV est donc isocèle et R est, comme C, sur la médiatrice de [DV].

Par suite (RC), médiatrice de [DV], fait également un angle de 45° avec [RS] et le triangle RSC est rectangle et isocèle.



Variante pour prouver l'égalité des aires de KLC et BCL (Henri Bareil)

- La rotation R, d'angle 90°, qui envoie B sur A envoie L sur L′ tel que (CL′) ⊥ (CL),
donc (CL) // (AE)
et
aire CBL = aire CAL′ = CS × CL′ = CS × CL.
Or CS = CE cos α
(avec $\alpha = \widehat{LCB} = \widehat{ACL'} = \widehat{CAE}$). D'où :
aire CBL = CL × CE cos α.



- D'autre part :
aire CKL = CL × DT = CL × CD cos α.

- Or CD = CE, donc aire CBL = aire CKL