Dès le demi-verre, tracas !

Bruno Alaplantive

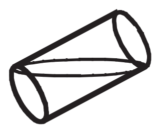
« Dan’ fond la rivière Langevin » ou Balade à Grand Place[1]

J’étais alors en proie à la « rando » réunionnaise comme d’aucun, récemment bi-centenarisé, le fut un temps à la mathématique[2]. Nous étions alors quelques-uns à faire découvrir à des lycéens volontaires les charmes de la marche en pleine nature dans les coins les plus reculés de l’île, un week-end ou deux par trimestre. À l’effort physique succédait bien évidemment le réconfort : repos au gîte, petit cari[3] de derrière les fagots auquel chacun prenait soin d’apporter sa touche personnelle… ; puis vaisselle sans trop rechigner par contentement de trouver le prochain gîte aussi net que nous laisserions celui-ci.

C’est donc au détour de cette fameuse vaisselle qu’un élève de Première me demanda tout à coup : « Monsieur, savez-vous comment on fait pour remplir ce verre à moitié ? »

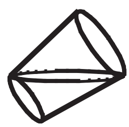
Eh bien non, Monsieur ne savait pas. Et l’élève de m’expliquer que le verre étant plein, il suffisait de le vider jusqu’à ce que le niveau arase le haut du disque du fond et le bord de versement, manipulation à l’appui :

(plus facile à montrer qu’à expliquer)



Simple, il suffisait d’y penser. J’en étais presque penaud. Mais je tenais malgré tout le petit élément qui me permettrait sinon de sortir victorieux, tout du moins de rehausser un peu les couleurs de mon blason : le verre n’était pas cylindrique ! Légèrement évasé vers le haut ; deux « demi-verres » précédemment définis ne suffirent pas à en remplir un seul, parachevant ainsi de convaincre le petit auditoire qui avait prêté une oreille à mes arguments de symétrie.

Bonjour tronc de cône,



au-revoir symétrie…

Heureusement, aucun « marmaille »[4] ne me posa la question qui découla très vite, si vite que l’on peut même dire qu’en fait elle déboula : si dans la position indiquée, le volume restant n’est pas égal à la moitié, combien vaut-il ?

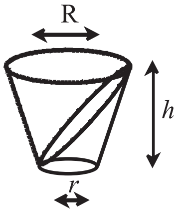
Question qui m’envahit, m’obnubila. Je fus alors en proie à la mathématique…

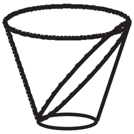
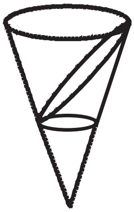
---

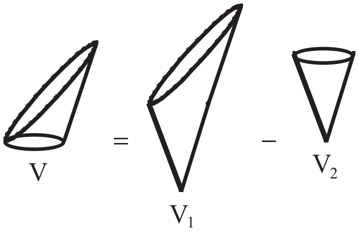
(1) Ile de la Réunion, descente depuis le chemin d’accès au volcan du Piton de la Fournaise.
(2) Victor Hugo : Les contemplations.
(3) « Le » plat typique local (un singulier qui se conjugue au pluriel !).
(4) enfant, en créole réunionnais.

Voilà. L'historique est raconté, posons donc le problème :

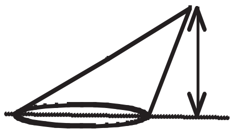
Calculer le volume ci-contre en fonction des rayons R, r et de la hauteur h du tronc de cône initial.



Regardant  dans , on conçoit assez vite l'égalité suivante :

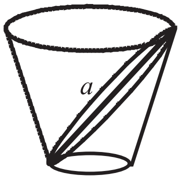


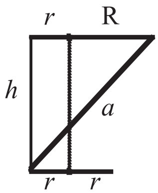
mais la perception de V_1 comme cône oblique à base elliptique demande un peu plus d'imagination.



Calcul des axes de l'ellipse

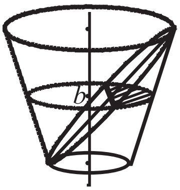
<u>grand axe</u>

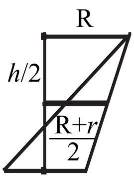


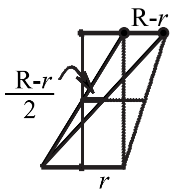


$$\boxed{a = \sqrt{(\mathrm{R}+r)^2 + h^2}}$$

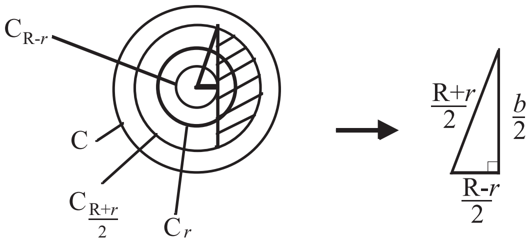
<u>petit axe</u>





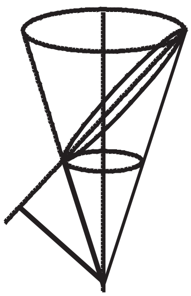


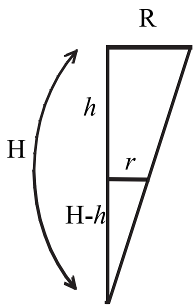
vue de dessus



et $\quad b = 2\sqrt{Rr}$

Calcul de la hauteur du cône elliptique

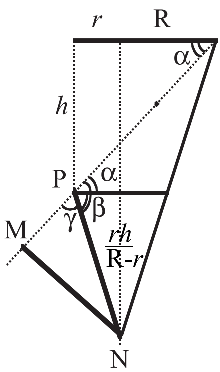




De l'égalité $\dfrac{H-h}{H} = \dfrac{r}{R}$,

il vient $H = \dfrac{Rh}{R-r}$

et $H\text{ - h} = \dfrac{rh}{R-r}$.



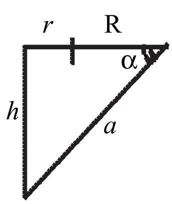
Calcul de MN

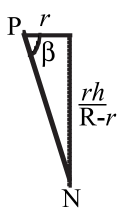
On se propose d'utiliser directement la trigonométrie.
(une autre vision serait celle des calculs d'aires de triangles)

$$\begin{aligned} MN &= PN \sin\gamma \\ &= PN \sin(\pi - \gamma) \\ &= PN \sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

d'où

$$MN = PN(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \qquad (1)$$





Les calculs amènent tout d'abord

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{2hrR}{a(R-r)PN},$$

puis de (1) il vient finalement

$$\boxed{\text{hauteur du cône elliptique} = \frac{2hrR}{a(R-r)}}$$

Calcul des volumes

cône elliptique

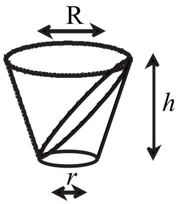
L'aire de l'ellipse de base est $\pi\frac{a}{2}\frac{b}{2}$ soit $\pi\frac{a}{2}\sqrt{\mathrm{R}r}$, et $\frac{1}{3}\mathrm{B}h$ donnent

$$V_1 = \frac{\pi r h}{3(\mathrm{R}-r)} \times \mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}r}$$

cône du dessous

$$V_2 = \frac{\pi r h}{3(\mathrm{R}-r)} \times r^2$$

Et enfin



$$\boxed{V = \frac{\pi r h\left(R\sqrt{Rr} - r^2\right)}{3(\mathrm{R}-r)}}$$

La belle formule !

Je fus alors en proie à sa validation…

Dans l'ordre des question que l'on peut se poser après l'obtention d'une telle formule.

1. Grandeur exprimée par cette formule

$$\begin{cases} rh \text{ s'exprime en } \mathrm{m}^2, \\ \sqrt{\mathrm{R}r} \text{ en m et donc } \mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}r} - r^2 \text{ en } \mathrm{m}^2, \\ \mathrm{R}-r \text{ en m} \end{cases} \qquad \text{on a donc bien } \frac{rh\left(\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}r} - r^2\right)}{\mathrm{R}-r} \text{ en } \mathrm{m}^3.$$

2. Pertinence dans les cas limites

a) Si $r = 0$? (si le verre est un cône), on obtient bien $V = 0$.

b) Si $\mathrm{R} = r$? (si le verre est cylindrique), on peut calculer $\lim\limits_{\mathrm{R}\to r} \frac{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}r} - r^2}{\mathrm{R}-r}$.

En posant $f(\mathrm{R}) = \mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}r}$, la limite cherchée est égale à $f'(r)$ et vaut $\dfrac{3r}{2}$ (5).

Ainsi $\lim\limits_{\mathrm{R}\to r} \mathrm{V} = \dfrac{\pi rh}{3} \times \dfrac{3r}{2} = \dfrac{\pi r^2 h}{2}$. C'est bien la moitié du cylindre.

3. Symétrie de la formule

En permutant R et r, on doit normalement obtenir le volume complémentaire.

$$\mathrm{V}' = \frac{\pi \mathrm{R}h\left(r\sqrt{r\mathrm{R}} - \mathrm{R}^2\right)}{3(r-\mathrm{R})} = \frac{\pi \mathrm{R}h\left(\mathrm{R}^2 - r\sqrt{r\mathrm{R}}\right)}{3(\mathrm{R}-r)}.$$

Alors

$$\mathrm{V} + \mathrm{V}' = \frac{\pi h\left(\mathrm{R}^3 - r^3\right)}{3(\mathrm{R}-r)} = \frac{\pi h\left(\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}r + r^2\right)}{3},$$

qui est bien le volume du tronc de cône.

4. Et la validation des faits

Matériel : un seau, le compteur d'eau, de l'eau et de quoi mesurer les longueurs.
Les données : D = 27,5 cm ; d = 21 cm ; h = 26 cm.
Volume du seau, calculé : 12,08 l (volume affiché au compteur : 12 l).
Le seau étant alors vidé comme il faut, le volume restant – selon le calcul de la formule – serait d'environ 4,8 l et il faudrait 7,2 l pour re-remplir le seau. Le compteur m'a indiqué : 7,4 l.

Moyennant les aléas de forme (pour le seau), de mesures et de manipulation, ce n'est pas si mal. Tout de même, 20 cl cela semble beaucoup (surtout si c'est du Bourgogne !).

(5) À vouloir aller trop vite, j'avais d'abord écrit : si R $\to r$, alors

$$\frac{\pi rh\left(\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}r} - r^2\right)}{3(\mathrm{R}-r)} \to \frac{\pi rh\left(r\sqrt{rr} - r^2\right)}{3(r-r)}$$
$$= \frac{\pi rh(r^2 - r^2)}{3(r-r)} = \frac{\pi rh(r-r)(r+r)}{3(r-r)} = \frac{\pi rh(r+r)}{3} = \frac{2\pi r^2 h}{3}\ldots$$

dommage, ou même

$$\frac{\pi rh(r^2 - r^2)}{3(r-r)} = \frac{\pi h(r^3 - r^3)}{3(r-r)} = \frac{\pi h(r-r)(r^2 + rr + r^2)}{3(r-r)} = \frac{3\pi r^2 h}{3} = \pi r^2 h\ldots$$

encore pire !

Calcul de la hauteur d'eau λ, restant dans le seau une fois qu'on l'a redressé

On a

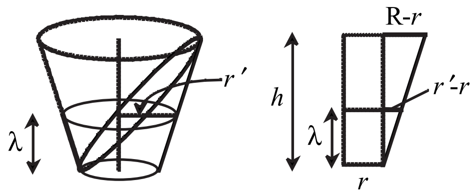
$$V = \frac{\pi}{3}\lambda(r^2 + rr' + r'^2),$$

et aussi

$$V = \frac{\pi}{3}\frac{rh}{R-r}\left(R\sqrt{Rr} - r^2\right),$$

ainsi que

$$r' - r = \frac{R-r}{h}\lambda.$$



$$\frac{\pi}{3}\lambda(r^2 + rr' + r'^2) = \frac{\pi}{3}\frac{rh}{R-r}\left(R\sqrt{Rr} - r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{R-r}{h}\lambda(r^2 + rr' + r'^2) = r\left(R\sqrt{Rr} - r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (r' - r)(r^2 + rr' + r'^2) = r\left(R\sqrt{Rr} - r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow r'^3 - r^3 = rR\sqrt{Rr} - r^3$$

$$\Leftrightarrow r' = \sqrt{Rr}$$

et finalement

$$\boxed{\lambda = \frac{h\left(\sqrt{Rr} - r\right)}{R-r}}$$

Pour mon seau, λ calculé : environ 12,1 cm ; et λ mesuré : … 12,1 cm !!!

Je fus alors en proie à la satisfaction …