Les problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.
Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes », … si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice. La rubrique s'efforce de rendre compte de la pluralité des méthodes proposées par les lecteurs, des généralisations des problèmes…
Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Solutions et énoncés sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,
9 quai de la Seine,
75019 Paris.

Nouveaux énoncés

Énoncé n° 297 (Jacques BOUTELOUP, 76-Rouen)

On considère quatre cercles du plan tangents deux à deux en des points distincts.
1) Démontrer que trois d'entre eux sont tangents extérieurement deux à deux, le quatrième étant soit tangent extérieurement, soit tangent intérieurement à chacun des trois autres.
2) On désigne par z_i les affixes des centres dans une représentation complexe du plan euclidien, par r_i leurs rayons et l'on pose $c_i = -\frac{1}{r_i}$ lorsque le cercle correspondant est tangent intérieurement aux trois autres, $c_i = \frac{1}{r_i}$ dans les autres cas. Démontrer les relations :

$$2\sum c_i^2 = \left(\sum c_i\right)^2 \qquad (1)$$

$$2\sum c_i^2 z_i = \left(\sum c_i\right)\left(\sum c_i z_i\right) \qquad (2)$$

$$2\sum (c_i z_i)^2 = \left(\sum c_i z_i\right)^2 \qquad (3)$$

Énoncé n° 298 (Pierre BORNSZTEIN, 78-Maisons-Laffitte)

Soit $n \geq 7$ un entier, et S un ensemble de n points du plan tels que, parmi cinq quelconques de ces points, on puisse toujours en trouver quatre qui soient cocycliques. Montrer qu'au moins $n - 1$ de ces points sont cocycliques.

Solutions

Énoncé n° 289 (François LO JACOMO, 75 - Paris)

a) Soient a_1, a_2, ..., a_n n entiers en progression arithmétique. Montrer que pour tout entier naturel k impair, $a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k$ est divisible par $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

b) Soient a_1, a_2, ..., a_n n entiers en progression géométrique. Montrer que pour tout entier naturel k premier avec n, $a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k$ est divisible par $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

SOLUTION

Vous avez été plusieurs à me signaler, très vite, que le premier résultat annoncé est faux, et j'ai eu le temps de faire passer un erratum dans le bulletin 429 de mai-juin 2000 :
« La première partie de l'énoncé proposé dans le bulletin 427 sous le numéro 289 est erronée : sous les hypothèses annoncées, la somme $a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k$ (a_1, a_2, ..., a_n entiers en progression arithmétique) n'est pas divisible par $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. D'où la question : peut-on modifier ces hypothèses pour rendre l'énoncé juste ? Toutes les suggestions des lecteurs seront les bienvenues ! ».

Globalement, j'ai reçu des réactions de Alain BAILLE (38-Grenoble), Jacques BOUTELOUP (76-Rouen), Pierre BORNSZTEIN (95-Pontoise), Alain BESSON (74-St Julien en Genevois), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Edgard DELPLANCHE (94-Créteil), René MANZONI (76-Le Havre), Alain PICHEREAU (16-Angoulème) et Pierre SAMUEL (40-Hossegor).

Toutes mes excuses pour cette grossière erreur. En fait, si a_1, a_2, …, a_n sont n entiers en progression arithmétique,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Peut-on affirmer que $a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k$ est divisible par n si n impair, par $\frac{n}{2}$ si n pair ? Oui si la raison $r = 1$. En tout cas, il est divisible par $\frac{a_1 + a_n}{2}$ si n impair, par $a_1 + a_n$ si n pair. Mais même cela ne prouve pas pas qu'il est divisible par le produit des deux, hormis si ces deux nombres sont premiers entre eux.

Le contre-exemple le plus cité est : $2^5 + 3^5 + 4^5 = 1\,299$ qui n'est pas divisible par $9 = 2 + 3 + 4$. Jacques Bouteloup constate que $1^k + 3^k + 5^k$ est divisible par 9 si $k = 1$ ou $k = 6p + 3$, alors que $1^k + 3^k + 5^k + 7^k$ est toujours divisible par 16. Alain Pichereau propose également $2^7 + 3^7 + 4^7 = 18\,699$, non multiple de 9, et Alain Besson : $5^5 + 6^5 + 7^5 = 27\,708$. Une des conditions peut porter sur n, puisque le résultat est vrai pour $n = 2$: Alain Besson prouve que pour $n = 3$, la divisibilité est vérifiée sauf si le terme central a_2 est multiple de 3 alors que k et r (raison de la progression arithmétique) ne le sont pas. Mais on peut également chercher une condition sur k. Plusieurs lecteurs prouvent que le résultat est vrai pour $k = 3$: $(a - r)^3 + a^3 + (a + r)^3 = 3a^3 + 6r^2a$ est manifestement divisible par $3a$. Alain Baille montre que, pour $k = 5$, la CNS de divisibilité est que l'une au moins des conditions suivantes soit vérifiée : a_1 divisible par 3, r divisible par 3, $a_1 - r$ divisible par 3 ou n non divisible par 3.

Mais d'autres conditions peuvent s'envisager, notamment si $a_1 = r$ (raison de la progression arithmétique) ou $a_1 = 0$, la divisibilité est vérifiée. En fait, mon résultat initial était que pour tout k impair, $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ est divisible par $1 + 2 + \ldots + n$ (ce qui est vrai car n et $n + 1$ sont premiers entre eux), et j'ai eu tort de vouloir le généraliser. On peut, en effet, prouver que $a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k$ est divisible par $a_1 + a_n$ si n pair, par $\frac{a_1 + a_n}{2}$ si n impair, et (lorsque $r = 1$) qu'il est divisible par n si n impair, par $\frac{n}{2}$ si n pair. La première partie se fait en regroupant les termes deux par deux : $a_i^k + a_{n+1-i}^k$ est divisible par $a_i + a_{n+1-i} = a_1 + a_n$. Si n impair, il reste un terme central $\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)^k$ manifestement divisible par $\frac{a_1 + a_n}{2}$. Quant à la divisibilité par n, dans le cas où $r = 1$:

– si n impair : c'est vrai si $a_1 + a_n = 0$, donc si le terme central est nul, car pour tout k impair les termes de la somme s'annulent deux à deux. Si j'ajoute $1 = r$ à tous les termes de la progression, cela revient à remplacer a_1 par a_2, a_2 par a_3, … et a_n par a_{n+1}, ou encore à remplacer seulement a_1 par $a_{n+1} = a_1 + n$. Or

$$(a_1 + n)^k \equiv a_1^k \pmod{n},$$

donc la divisibilité par n se conserve. Par récurrence, elle est donc vraie pour tout a_1.

– si, maintenant, n est pair, ce même principe de récurrence vaut encore, il suffit de prouver que pour une valeur donnée de a_1, la divisibilité est vérifiée pour prouver qu'elle l'est pour tout a_1. Or si $a_1 = 1$, $1^k + 2^k + \ldots + (n - 1)^k$ est divisible par $\frac{1 + (n - 1)}{2} = \frac{n}{2}$ et n^k est lui aussi divisible par $\frac{n}{2}$, donc $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ est divisible par $\frac{n}{2}$.

Quant à la deuxième question de l'énoncé, où a_1, a_2, ..., a_n sont en progression géométrique, elle ne pose guère de problèmes. Si l'on appelle r la raison de cette progression géométrique,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

et

$$a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k = a_1^k \frac{r^{nk} - 1}{r^k - 1}.$$

Il suffit donc de prouver que $\dfrac{r^{nk} - 1}{r^k - 1}$ est divisible par $\dfrac{r^n - 1}{r - 1}$. Ceci, dans l'hypothèse où k est premier avec n. Or si k est premier avec n, $r - 1$ est le PGCD de $r^n - 1$ et $r^k - 1$. En effet, il est clair que $r - 1$ divise $r^n - 1$ et $r^k - 1$ est ; mais en outre, d'après Bézout, il existe u et v tels que $nu - kv = 1$. $r - 1 = r^{nu} - 1 - r(r^{kv} - 1)$ est manifestement divisible par le PGCD de $r^n - 1$ et $r^k - 1$, qui divise $r^{nu} - 1$ et $r^{kv} - 1$. Il en résulte que le PPCM de $r^n - 1$ et $r^k - 1$: $\dfrac{(r^n - 1)(r^k - 1)}{r - 1}$, or ce PPCM divise $r^{nk} - 1$, donc $\dfrac{r^{nk} - 1}{r^k - 1}$ est divisible par $\dfrac{r^n - 1}{r - 1}$. On remarquera que r n'est pas nécessairement entier : si $r = \dfrac{p}{q}$, a_1 doit être divisible par q^{n-1}, donc quel que soit le polynôme $\mathrm{P}(x)$ à coefficients entiers de degré inférieur à $k\,(n - 1)$, $a_1^k\,\mathrm{P}(r)$ est entier.

Énoncé n° 290 (Philippe DELEHAM, 24 - Périgueux)

Soit ABC un triangle. Quel est le lieu des points P tels que les droites d'Euler des triangles PBC, APC et ABP soient concourantes ? Quel est le lieu des points d'intersection Q de ces droites d'Euler ?

SOLUTION

Ce problème a fait l'objet d'un abondant échange de correspondance dès février 2000, avant même sa publication dans le bulletin (mai 2000), entre Philippe DELEHAM, Jacques BOUTELOUP (76-Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Gaston BOUEZ (83-Hyères) et moi-même, et surtout, par la suite, Georges LION (98-Wallis), qui a publié sur cette question un article dans *Acta Universitatis palackianae olomucensis*, sans parler des solutions proposées par les lecteurs de la rubrique, René MANZONI (76-Le Havre), Charles NOTARI (31-Montaut) et Pierre RENFER (67-Ostwald). Sous son aspect anodin, il se révèle d'une incroyable richesse, pouvant conduire soit à des calculs inextricablement dissuasifs, soit à un nouvel objet que l'on n'a pas fini d'explorer : les **quintangles**.

Écartons tout d'abord les deux solutions triviales : si P est sur (Γ), cercle circonscrit à ABC, les droites d'Euler des trois triangles sont concourantes en O, centre du cercle circonscrit commun (Γ). De même, si P est en H, orthocentre de ABC, les trois triangles ont même cercle d'Euler et les trois droites d'Euler passent par le centre O′ de ce cercle d'Euler. Dans les deux cas, le point d'intersection Q se trouve sur la droite d'Euler de ABC.

Supposons P solution et distinct de H : par A, B, C et P passe une hyperbole équilatère et une seule. Nous nous fixerons désormais une hyperbole $(\mathcal{H})$ passant par A, B, C, de centre Ω, et c'est sur $(\mathcal{H})$ que nous chercherons des solutions P à notre problème. Pour cela, nous choisirons un repère orthonormé dans lequel $(\mathcal{H})$ ait pour équation $xy = 1$ – ce qui exclut les points P sur les côtés ou les hauteurs du triangle, pour lesquels $(\mathcal{H})$ est dégénérée en deux droites perpendiculaires – et les points A, B, C, P pour coordonnées $\left(a, \frac{1}{a}\right)$, $\left(b, \frac{1}{b}\right)$, $\left(c, \frac{1}{c}\right)$ et $\left(t, \frac{1}{t}\right)$.

Le choix d'un tel repère présente l'intérêt que, d'une part, les points A, B, C et même P jouent un rôle symétrique, d'autre part, la droite joignant deux points de l'hyperbole, par exemple B et C, a une équation particulièrement simple : $x + bcy = b + c$. Cela permet notamment de déterminer le second point d'intersection d'une droite d'équation connue avec l'hyperbole. Ainsi, la perpendiculaire à cette droite (BC) passant par A : $x - \frac{y}{bc} = a - \frac{1}{abc}$, recoupe l'hyperbole au point d'abscisse $h = -\frac{1}{abc}$ qui, si l'on permute A, B et C, appartient tout autant aux deux autres hauteurs. C'est donc l'orthocentre H de ABC, situé lui aussi sur $(\mathcal{H})$: quatre points A, B, C, H d'une hyperbole d'équation $xy = 1$ forment un quadrangle orthocentrique (chacun étant l'orthocentre du triangle formé par les trois autres) si et seulement si le produit de leurs abscisses vaut : $abch = -1$.

Si le triangle ABC n'est pas équilatéral, donc si son orthocentre H : $\left(-\frac{1}{abc}, -abc\right)$ est distinct de son centre de gravité G : $\left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)$, la droite d'Euler (Δ) de ABC a pour équation :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+3abc\right)\mathrm{X} - \left(a+b+c+\frac{3}{abc}\right)\mathrm{Y} = abc(a+b+c) - \frac{1}{abc}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \qquad (1)$$

De même, les droites d'Euler (Δ_A) de PBC, (Δ_B) de APC et (Δ_C) de ABP ont pour équations respectives :

$$\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+3tbc\right)\mathrm{X} - \left(t+b+c+\frac{3}{tbc}\right)\mathrm{Y} = tbc(t+b+c) - \frac{1}{tbc}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \qquad (1_A)$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{t}+\frac{1}{c}+3atc\right)\mathrm{X} - \left(a+t+c+\frac{3}{atc}\right)\mathrm{Y} = atc(a+t+c) - \frac{1}{atc}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{t}+\frac{1}{c}\right) \qquad (1_B)$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{t}+3abt\right)\mathrm{X} - \left(a+b+t+\frac{3}{abt}\right)\mathrm{Y} = abt(a+b+t) - \frac{1}{abt}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{t}\right) \qquad (1_C)$$

L'intersection de (Δ_A) et (Δ_B) vérifie la différence des équations (1_A) et (1_B), soit :

$$(3abct-1)\mathrm{X} + \left(\frac{3}{ct} - ab\right)\mathrm{Y} = abct(a+b+c+t) + \frac{1}{ct}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{t}\right)$$

et l'intersection de (Δ_B) et (Δ_B) vérifie :

$$(3abct-1)X+\left(\frac{3}{at}-bc\right)Y=abct(a+b+c+t)+\frac{1}{at}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{t}\right)$$

Si (Δ_A), (Δ_B) et (Δ_C) sont concourantes en Q (x,y), on doit donc avoir :

$$(3-abct)y=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{t} \qquad (2)$$

$$\left(3-\frac{1}{abct}\right)x=a+b+c+t \qquad (3)$$

En combinant ces dernières relations avec chacune des équations (1_A), (1_B) et (1_C) – et même (1) – des droites d'Euler, on peut affirmer d'une part que les droites d'Euler de PBC, APC, ABP sont concourantes en un point Q si et seulement si les coordonnées (x,y) de Q, définies par (2) et (3), vérifient en outre :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{t}\right)x-(a+b+c+t)y=-abct+\frac{1}{abct} \qquad (4)$$

d'autre part que le point d'intersection Q appartient alors à la droite d'Euler (Δ) de ABC. Qui plus est, (2), (3) et (4) entraînent :

$$\left((3-abct)-\left(3-\frac{1}{abct}\right)\right)xy=-abct+\frac{1}{abct} \qquad (5)$$

et donc, de trois choses l'une :

- soit $abct = 1$, auquel cas les quatre points A, B, C et P sont cocycliques, et Q, défini par (2) et (3) : $\left(\frac{a+b+c+t}{2},\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{t}\right)\right)$ est bien le centre O du cercle circonscrit (Γ). En effet, si $abct = 1$, les doubles produits de :
$$AQ^2=\frac{1}{4}\left[(-a+b+c+t)^2+\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{t}\right)^2\right]$$
s'annulent deux à deux, donc $AQ^2 = BQ^2 = CQ^2 = PQ^2$.
- soit $abct = -1$, P est alors l'orthocentre H de ABC et Q $\left(\frac{a+b+c+t}{4},\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{t}\right)\right)$, isobarycentre de A, B, C, H, est bien le centre O′ du cercle d'Euler de ABC.
- soit $-abct+\frac{1}{abct}$ n'est pas nul, et en simplifiant (5) par ce terme, on trouve comme condition nécessaire : $xy = 1$.

En bref, hormis les cas triviaux – P sur (Γ) ou P = H –, lorsqu'un point P de $(\mathcal{H})$ est solution, l'intersection Q des droites d'Euler est elle aussi sur $(\mathcal{H})$. Ce qui implique, en multipliant membre à membre (2) et (3),

$$(3-abct)\cdot\left(3-\frac{1}{abct}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{t}\right)\cdot(a+b+c+t) \tag{6}$$

soit :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+3abc\right)t^2+\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot(a+b+c)-9\right)t$$
$$+\left(a+b+c+\frac{3}{abc}\right)=0 \tag{7}$$

équation du second degré admettant au plus deux racines – sauf si les trois coefficients sont nuls, donc si le triangle ABC est équilatéral : tout point P du plan est alors solution, mais le point Q est quand même sur l'hyperbole équilatère ($\mathcal{H}$) passant par A, B, C et P –. Dans le cas général, il existe donc sur ($\mathcal{H}$) au maximum deux points P non triviaux solutions de notre problème : nous les appellerons désormais D et E.

Pour chacune de ces solutions P non triviales, le point d'intersection Q de (Δ_A), (Δ_B) et (Δ_C) appartient à ($\mathcal{H}$) et à (Δ). Or (Δ) coupe l'hyperbole ($\mathcal{H}$) en au plus deux points, dont l'orthocentre H. Peut-on avoir Q = H ? Certes, si (Δ) est tangente en H à l'hyperbole. Mais prouvons que c'est le seul cas. Si, pour un t quelconque, $x=-\frac{1}{abc}$, $y=-abc$ sont solutions de (2) et (3), alors :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+3abc=(abc)^2t-\frac{1}{t}=-(abc)^2\left[a+b+c+\frac{3}{abc}\right]$$

si bien que l'équation (1) de (Δ) peut s'écrire :

$$x+\frac{y}{(abc)^2}=-\frac{2}{abc}$$

(le second membre provenant du fait que H appartient à (Δ)), ce qui est précisément l'équation de la tangente en H à l'hyperbole. On peut donc affirmer que la droite d'Euler (Δ) coupe l'hyperbole ($\mathcal{H}$) en H et Q, ce qui prouve, entre autres choses, que pour les deux solutions D et E, les droites d'Euler passent par le même point Q.

Dès lors, regardons l'équation (7) : si $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+3abc\neq 0$, alors les deux racines d et e ont pour produit :

$$\frac{a+b+c+\frac{3}{abc}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+3abc}$$

et l'équation (1) de (Δ) peut s'écrire :

$$x-dey=-\frac{1}{abc}+abcde.$$

Une fois encore, c'est le fait que H appartient à (Δ) qui permet de calculer le second membre. On en déduit que le second point d'intersection Q de (Δ) avec l'hyperbole a pour coordonnées : $x = abcde$, $y = \dfrac{1}{abcde}$. Notons au passage que si l'un des termes $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+3abc$ ou $a+b+c+\dfrac{3}{abc}$ est nul, l'un des points D ou E ainsi que Q sont à l'infini.

En replaçant dans (2) et (3) ces valeurs de x et y, on peut affirmer que si P est un point de ($\mathcal{H}$) tel que les droites d'Euler de PBC, APC, ABP soient concourantes, hormis les solutions triviales, P est nécessairement l'un des points D $\left(d,\dfrac{1}{d}\right)$ et E $\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$, s'ils existent, vérifiant :

$$a+b+c+d+e = 3abcde \tag{8}$$

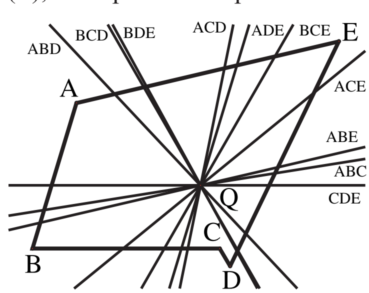
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e} = \frac{3}{abcde} \tag{9}$$

le point d'intersection Q ayant pour coordonnées : $\left(abcde,\dfrac{1}{abcde}\right)$. Pour a, b, c fixés, les relations ci-dessus fournissent un système de deux équations linéaires en $d + e$ et de permettant de calculer d et e. Réciproquement, si ces relations sont vérifiées, chacune des droites d'Euler des dix triangles de sommets dans {A, B, C, D, E} passe par Q : en effet, si $x = abcde$ et $y = \dfrac{1}{abcde}$, le calcul suivant :

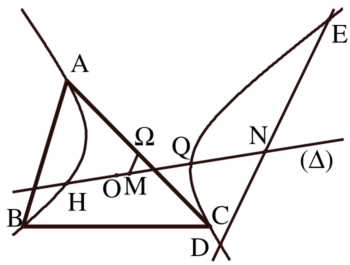
$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(x+\frac{1}{abc}\right)-(a+b+c)(y+abc)\\ &=(x+dey)\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}-\frac{a+b+c+d+e}{de}\right]\\ &=\left(\frac{3}{abc}\right)y-3abcx\end{aligned}$$

qui prouve que (x,y) vérifie l'équation (1) de (Δ), vaut pour toute permutation de $\{a,b,c,d,e\}$.

C'est à cette jolie configuration que j'ai donné le nom de **quintangle**, en septembre 2002 : cinq points A, B, C, D, E d'une hyperbole équilatère tels que les droites d'Euler des dix triangles formés se coupent en un point Q de la même hyperbole équilatère, le foyer du quintangle.



La méthode ci-dessus est probablement la seule qui mette en évidence le rôle parfaitement symétrique joué par les cinq points, et qui prouve de manière aussi simple que les dix droites d'Euler sont concourantes. Non seulement elle prouve que l'intersection Q appartient à (Δ) et que pour un point Q donné de (Δ), autre que O, il existe au plus deux points P *du plan* tels que les droites d'Euler de PBC, APC, ABP sont concourantes en Q – un tel point P appartient nécessairement à l'unique hyperbole équilatère passant par A, B, C, Q (tangente en H à (Δ) si Q = H) –, mais en outre, elle permet de construire géométriquement ces points : si Ω est le centre de l'hyperbole, appelons M le milieu de HQ et N le symétrique de O par rapport à Q. La parallèle à (ΩM) passant par N coupe l'hyperbole précisément en ces deux points D et E. En effet, la droite joignant Ω au milieu de deux points $\left(u, \frac{1}{u}\right)$ et $\left(v, \frac{1}{v}\right)$ de l'hyperbole a pour équation : $x - uvy = 0$, donc la parallèle ainsi construite a pour équation : $x + dey = k$, constante à préciser. Or O a pour coordonnées :



$$\left(\frac{1}{2}\left(a+b+c+\frac{1}{abc}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+abc\right)\right),$$

soit :

$$\left(\frac{1}{2}\left(3abcde-(d+e)+\frac{1}{abc}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{3}{abcde}-\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)+abc\right)\right).$$

Donc N a pour coordonnées :

$$\left(\frac{1}{2}\left(abcde+(d+e)-\frac{1}{abc}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{abcde}+\left(\frac{d+e}{de}\right)-abc\right)\right).$$

La droite ainsi construite a donc pour équation :

$$x + dey = d + e,$$

ce qui est précisément l'équation de la droite (DE).

En pratique, la seule difficulté de cette construction est qu'elle nécessite de déterminer l'hyperbole ($\mathcal{H}$) passant par A, B, C, Q. Mais pour les spécialistes, ce n'est pas un souci ! Si Q′ est l'isogonal de Q (Q′ décrit l'hyperbole de Jerabek), la droite (OQ′) coupe (Γ) en deux points dont les droites de Simson sont les asymptotes de ($\mathcal{H}$).

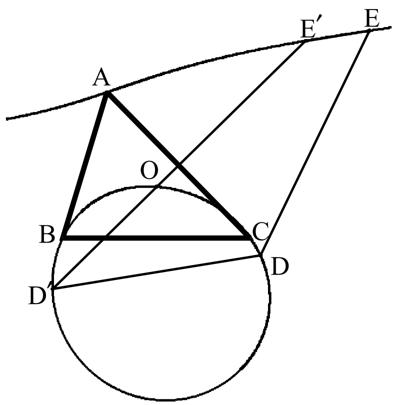
Cela dit, le principal défaut de la démonstration ci-dessus, c'est qu'elle ne répond ni à la première, ni à la deuxième question de l'énoncé. De fait, il existe une infinité d'hyperboles équilatères passant par A, B, C : lorsqu'on fait tourner ($\mathcal{H}$) ou, ce qui revient au même, lorsqu'on déplace Q sur (Δ), quel est le lieu des points D et E ? En outre, pour un Q donné, rien ne prouve que la droite de la construction ci-dessus coupe réellement l'hyperbole, donc Q ne décrit pas nécessairement toute la droite d'Euler (Δ). Pour quels triangles ABC le point d'intersection Q décrit-il tout (Δ) ? En cas contraire, quel est l'ensemble des points atteints ?

C'est Jacques Bouteloup qui, le premier, m'a fourni une réponse complète à la première question. Remarquant que l'ensemble des points P cherchés contient, outre le cercle (Γ), les points O, H, les symétriques A′, B′, C′ des sommets A, B, C par rapport aux côtés opposés, et surtout les centres I, I_A, I_B, I_C des cercles inscrit et exinscrits – c'était d'ailleurs là l'origine du problème : le point de concours Q, pour P = I, est le barycentre de O (2*r*) et G (3R), donc l'isogonal de l'orthocentre du triangle podaire de I –, et que dans ces neuf cas, le point Q appartient à la droite d'Euler de ABC, il montre que la condition de concourance des droites d'Euler de PBC, PCA et ABC, exprimée sous forme de déterminant, est l'annulation d'un polynôme du cinquième degré : le cercle circonscrit (Γ) étant solution, la courbe résiduelle est une cubique qui, outre les neuf points ci-dessus, contient les quatre points P tels que l'un des triangles PBC ou PCA soit équilatéral (points qui annulent une colonne du déterminant). Or la condition de concourance des droites d'Euler de PCA, PAB et ABC est elle aussi du cinquième degré, elle aussi vérifiée sur (Γ), en les neuf points O, H, A′, B′, C′, I, I_A, I_B, I_C et en deux des quatre autres points P ci-dessus, ceux pour lesquels le triangle PCA est équilatéral. Deux cubiques avec onze points communs étant nécessairement confondues, ces deux conditions ont même ensemble de solutions et sont équivalentes : pour quatre points quelconques du plan, la concourance de trois des droites d'Euler entraîne la concourance des quatre. En particulier, la concourance des droites d'Euler de PBC, PCA, PAB entraîne que le point de concours Q est sur la droite d'Euler (Δ) de ABC et que P est soit sur (Γ), soit sur l'unique cubique contenant tous les points ci-dessus, connue sous le nom de cubique de Hain ; ce qui résout notre problème sans passer par un déterminant du septième degré, et sans même expliciter le déterminant du cinquième degré utilisé.

Mais plusieurs lecteurs sont venus à bout de calculs explicites quelque peu redoutables. Trois jours avant Jacques Bouteloup (mars 2000), Gaston Bouez avait identifié l'ensemble solution comme réunion de (Γ) et d'une cubique circulaire dont il donne l'équation explicite, en exprimant dans le plan complexe (A, B et C sur le cercle unité) l'équation des droites (O_iG_i) et en factorisant tout de suite, dans le déterminant développé, le terme $z\bar{z}-1$. René Manzoni fait appel à Desargues : si E_1 est l'intersection de (O_2O_3) avec (G_2G_3), la concourance des (O_iG_i) équivaut à l'alignement des E_i, ce qui, par Ménélaüs, le conduit à une cubique circulaire dont il fournit un tracé par ordinateur (le cas où $O_1 = O_2 = O_3$ étant exclu *a priori*), et au fait que Q appartient à (OG). Pierre Renfer utilise les coordonnées barycentriques, écrivant l'équation du cercle circonscrit à PBC, (Γ_A), à partir de l'axe radical (BC) de (Γ) et (Γ_A), et le centre de ce cercle, pôle de la droite de l'infini $x + y + z = 0$, comme solution d'un système : l'équation de chaque droite d'Euler est alors un déterminant, et c'est à l'aide de Maple® qu'il simplifie le déterminant final (du neuvième degré, mais avec $(x+y+z)^4$ en facteur), trouvant ainsi la réunion du cercle circonscrit (Γ) et d'une cubique dont il fournit l'équation barycentrique explicite (cubique dégénérée en une droite et un cercle si le triangle ABC est isocèle). Si ABC est équilatéral, tout point P du plan est solution. Marie-Laure Chaillout va plus loin : (x,y,z) étant les coordonnées barycentriques de P, la fonction de Leibnitz

$$x \cdot \mathrm{AM}^2 + y \cdot \mathrm{BM}^2 + z \cdot \mathrm{CM}^2$$

lui donne les centres O_i des cercles circonscrits, puis l'équation des droites d'Euler (Δ_A), (Δ_B) et (Δ_C) à partir de l'équation de (Δ), de sorte que la concourance de trois droites implique la concourance des quatre. Puis, elle factorise son déterminant, faisant apparaître l'équation du cercle (Γ) et un autre déterminant qui s'annule lorsque P, son isogonal P′ et le point à l'infini de (Δ) sont alignés, ce qui identifie formellement la cubique de Hain.



C'est Philippe Deleham qui mentionne le premier cette cubique de Hain, dont Jacques Bouteloup et Marie-Laure Chaillout font une étude détaillée. Comme toute cubique passant par A, B, C, I, $\mathrm{I_A}$, $\mathrm{I_B}$, $\mathrm{I_C}$, c'est une cubique Ω-isogonale, lieu des points P tels que P, son isogonal P′ et un point Ω (ici : le point à l'infini de (Δ)) soient alignés. C'est également une cubique circulaire (passant par les points cycliques), qui à ce titre possède des anallagmaties : invariance par inversion de pôles I, $\mathrm{I_A}$, $\mathrm{I_B}$, $\mathrm{I_C}$, où la tangente est parallèle à l'asymptote réelle. Outre les points déjà cités, elle passe par les deux points isodynamiques (intersection des cercles d'Apollonius) et leurs isogonaux, les points isogones, vérifiant : (TA,TB) = (TB,TC) = (TC,TA) (dont le point de Torricelli). Elle est citée dans le tome III de Brocard et Lemoyne, *Courbes géométriques remarquables*, p. 129, sous le nom de cubique des 21 points, ainsi que dans Penguin, *Dictionnaire des curiosités géométriques*, p. 47. Hain la définit ainsi : si à tout point M on fait correspondre ses symétriques $\mathrm{M_A}$, $\mathrm{M_B}$, $\mathrm{M_C}$ par rapport à (BC), (CA) et (AB), c'est le lieu des points M tels que $\mathrm{AM_A}$, $\mathrm{BM_B}$ et $\mathrm{CM_C}$ soient concourantes. Mais elle est également connue sous le nom « cubique de Vigarié » (E. Vigarié, A.F.A.S. Toulouse 1887), définie comme ensemble des points M tels que :

$$\sum a^2 \mathrm{MA}^2 \left[\mathrm{MB}^2 - \mathrm{MC}^2 + b^2 - c^2\right] = 0.$$

On retiendra essentiellement que c'est le lieu des points P d'isogonal P′, tels que (PP′) soit parallèle à (Δ).

Une fois ce résultat connu, il est certes possible de le redémontrer par notre méthode initiale. L'isogonal d'une hyperbole équilatère passant par A, B et C est une droite passant par O, et sur cette droite, l'isogonal P′ de P $\left(t, \frac{1}{t}\right)$ est une fonction homographique de t. Si $abct = 1$, P est sur le cercle circonscrit donc P′ est à l'infini, et si $abct = -1$, P′ = O $\left(\dfrac{a+b+c-t}{2}, \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{t}\right)\right)$. On s'attend donc à ce que, dans le cas général, P′ ait pour coordonnées :

$$\left(\frac{a+b+c-t}{1-abct}, \frac{1}{1-\dfrac{1}{abct}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{t}\right)\right)$$

– c'est la symétrie de l'hyperbole par rapport à la première bissectrice qui justifie qu'en échangeant a et $\dfrac{1}{a}$, b et $\dfrac{1}{b}$, c et $\dfrac{1}{c}$, t et $\dfrac{1}{t}$, on échange x et y même pour le point P′ fonction de A, B, C, P –. Pour démontrer cette relation, utilisons les nombres complexes : les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AP'}}$ ont pour affixes : $(t-a)\left(1-\dfrac{\mathrm{i}}{at}\right)$ et $\dfrac{a^2bct}{abct-1}\left(1-\dfrac{\mathrm{i}}{ab}\right)\left(1-\dfrac{\mathrm{i}}{ac}\right)\left(1+\dfrac{\mathrm{i}}{at}\right)$. Le produit des affixes est donc colinéaire à $\left(1-\dfrac{\mathrm{i}}{ab}\right)\left(1-\dfrac{\mathrm{i}}{ac}\right)$, tout comme le produit des affixes de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, donc les droites (AP) et (AP′) ont mêmes bissectrices que (AB) et (AC). Comme ce calcul vaut pour toute permutation des points A, B et C, P′ est bien l'isogonal de P.

Dès lors, si A, B, C, P ne sont pas cocycliques, à quelle condition (PP′) est-il parallèle à la droite d'Euler de ABC, donc à

$$(u,v) = \left(a+b+c+\frac{3}{abc}, \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+3abc\right)?$$

(u,v) et (u',v') sont colinéaires si et seulement si $uv' - vu' = 0$. Or PP′ a pour composantes :

$$u' = \frac{1}{1-abct}\left(a+b+c+\frac{3}{abc}+(1+abct)\left(t-\frac{3}{abc}\right)\right)$$

$$v' = \frac{1}{1-\dfrac{1}{abct}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+3abc+\left(1+\frac{1}{abct}\right)\left(\frac{1}{t}-3abc\right)\right)$$

$$= \frac{1}{1-abct}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+3abc-(1+abct)\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)$$

donc :

$$uv' - vu'$$
$$= \frac{1+abct}{1-abct}\left[-\left(a+b+c+\frac{3}{abc}\right)\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+3abc\right)\left(t-\frac{3}{abc}\right)\right].$$

$uv' - vu'$ s'annule si et seulement si : $abct = -1$ (donc P = H), ou (en soustrayant et ajoutant $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{t}\right)\left(t-\frac{3}{abc}\right)$ aux termes entre crochets) :

$$\left(\frac{1}{t}-3abc\right)\left(t-\frac{3}{abc}\right)-(a+b+c+t)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{t}\right)=0$$

ce qui est précisément l'équation (6) dont les deux racines sont d et e, sous réserve que les coefficients soient non nuls. Ceci prouve que D et E décrivent toute la cubique de Hain sauf éventuellement quelques points, A, B, C, H, l'intersection de ladite cubique avec le cercle circonscrit à ABC, …

On remarquera également qu'un quintangle est défini par quatre points liés par une condition : A, B, C, et Q sur la droite d'Euler de ABC, ou bien A, B, C, et D sur la cubique de Hain. Mais D, E et leurs isogonaux D′, E′, liés par la seule condition (DD′) // (EE′), suffisent-ils à définir le quintangle {A, B, C, D, E} ? Peut-on construire A, B, C et le foyer Q à partir de D, E, D′, E′ ? Y a-t-il une condition d'existence ?

Quant à la deuxième question de l'énoncé, c'est Georges Lion qui, en décembre 2000, m'a fait remarquer que le point Q ne parcourait pas nécessairement toute la droite (Δ) et pouvait avoir deux antécédents P. Comme René Manzoni, il utilise Desargues et Menelaüs pour déterminer la cubique comme lieu des points P vérifiant :

$$(PC^2 - AC^2)(PA^2 - BA^2)(PB^2 - CB^2) = (PB^2 - AB^2)(PC^2 - BC^2)(PA^2 - CA^2),$$

puis il l'étudie en détails : réunion de deux composantes connexes dont l'une, bornée, contient I et deux des sommets A, B ou C, elle n'a pas de point double sauf éventuellement lorsqu'elle est décomposée en une droite et un cercle, à savoir si le triangle est isocèle (axe (AH) du triangle et cercle de centre A passant par B et C), ou s'il possède un angle de 60° ou de 120° (bissectrice extérieure ou intérieure de A suivant que A = 60° ou 120°, et cercle de diamètre II_A ou I_BI_C). Mais la principale originalité de son étude, publiée dans *Acta Universitatis palackianae olomucensis*, c'est de prouver que si l'un des angles du triangle est strictement supérieur à 120°, donc si O appartient à la branche non bornée de la cubique, le lieu de Q est la réunion disjointe d'un segment et de deux demi-droites fermées de (Δ), alors qu'en cas contraire, Q parcourt tout (Δ).

Suite à cette étude de Georges Lion, j'ai repris mes calculs utilisant la complexité des triangles – ce repère complexe privilégié où O et H ont pour affixes 0 et 1, A, B, C pour affixes α, β, γ, de module R mais de somme $\alpha + \beta + \gamma = 1$, et où l'on pose

$w = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{R^2} = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ –. Des calculs relativement simples montrent que le nombre d'antécédents de Q, d'affixe réel t, est le nombre de réels k vérifiant

$$k^2 t(t-w)(t-\overline{w}) + k(R^2 - t^2) + (1-2t) = 0.$$

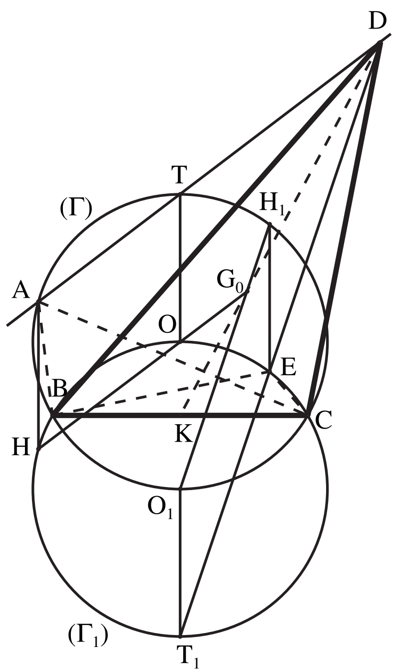
L'étude du discriminant

$$\left(R^2 - t^2\right)^2 + 4t(2t-1)(t-w)(t-\overline{w}) = \left(3t^2 - 2t + R^2\right)^2 - 4t^2(w+\overline{w}-1)(2t-1)$$

permet alors de retrouver et de préciser le résultat de Georges Lion, les deux demi-droites contenant l'une O, l'autre O′, et le segment contenant G.

Mais l'étude de Georges Lion attire l'attention sur un cas particulier tout à fait intéressant, qui donne à la notion de quintangle une certaine pertinence géométrique. On appellera quintangle isocèle, équilatéral ou isogone un quintangle contenant un triangle isocèle, un triangle équilatéral, ou un quintangle non équilatéral contenant un angle de $\pm\dfrac{\pi}{3}$. Les quintangles isogones vérifient des propriétés que ne vérifient pas les quintangles équilatéraux : si ABC est équilatéral, Q est un point quelconque du plan et tout point Q distinct de O a deux antécédents D et E qui, eux aussi, parcourent tout le plan à l'exception de O et (Γ).

Intéressons-nous donc aux quintangles isogones. Si (AB, AC) = $\pm\dfrac{\pi}{3}$, appelons O_1 et (Γ_1) les symétriques de O et (Γ) par rapport à (BC), T et T_1 les points de (Γ) et (Γ_1) formant avec BC un triangle équilatéral. Soit D un point quelconque de (AT). Rappelons que la cubique de Hain passe par les points isogones et ceux formant avec un des côtés un triangle équilatéral : lorsqu'elle est non décomposée, ce sont d'ailleurs les seuls points de la cubique qui voient l'un des côtés sous un angle $\pm\dfrac{\pi}{3}$, puisqu'un cercle et une cubique circulaire se coupent en quatre points au maximum, outre les points cycliques. Il est clair que A est point isogone de BCD, donc A appartient à la cubique de Hain de BCD, ce qui entraîne que D appartient à la cubique de Hain de ABC, puisque A, B, C, D sont quatre sommets d'un quintangle : la cubique de Hain de ABC est donc décomposée en la droite



(AT), et un cercle contenant tous les autres points B, C, O, H, A′, T_1, etc. … à savoir (Γ_1). Le cinquième sommet du quintangle, E, est nécessairement sur (Γ_1). A n'est pas point isogone de BCE, mais la cubique de Hain de BCE est décomposée en le cercle (Γ) et une droite, qui passe nécessairement par D, E et T_1 : E est l'autre point isogone de BCD. Soit K le milieu de BC. L'homothétie de centre K et de rapport 3 transforme le centre de gravité G_0 de BCD en D, et les points O et O_1 en T et T_1, donc les droites (OG_0) et (O_1G_0) en (AD) et (ED). Par ailleurs, si H et H_1 sont les orthocentres de ABC et EBC, OTAH et $O_1T_1EH_1$ sont des parallélogrammes, donc (OH) et (O_1H_1) sont eux aussi parallèles à (AD) et (ED) respectivement. On en déduit que les droites d'Euler (OH) et (O_1H_1) de ABC et EBC ne sont autres que (OG_0) et (O_1G_0), donc que G_0 est le foyer Q du quintangle ABCDE. Il en résulte que l'hyperbole de Kiepert du triangle BCD (cf. Brocard, *Journal de Math Spé*, 1884, etc.), celle qui passe par les sommets et le centre de gravité G_0 du triangle, passe par les points isogones A et E, que son centre est le milieu de AE (puisque l'abscisse de Q est $\dfrac{a+b+c+d+e}{3}$: si $Q = G_0$, $a + e = 0$) et que les tangentes en A et E à cette hyperbole sont parallèles à la droite d'Euler de BCD (puisque celle-ci est antiparallèle à (AE), tout comme la tangente en A est antiparallèle à (ΩA)). Ces tangentes passent donc par les isogonaux des points isogones, à savoir les points isodynamiques de BCD. En outre, si H_B, H_C, H_D sont les orthocentres de BAE, CAE, DAE, et H_0 l'orthocentre de BCD, tous ces points sont sur l'hyperbole de Kiepert de BCD et, dans le repère où elle a pour équation $xy = 1$, le produit des abscisses de B, H_B, H_0 et G_0 vaut 1, ce qui prouve que ces quatre points sont cocycliques, tout comme C, H_C, H_0 et G_0 ou D, H_D, H_0 et G_0.

Et ce n'est qu'un début ! Espérons que l'étude des quintangles se révélera fructueuse dans les prochaines années…