# Des inégalités dangereuses

Georges Lion(*)

## 1. Introduction

Ces dernières années, la correction des copies de préparation au CAPES m'a réservé quelques surprises. L'une d'elles fut causée par l'énoncé suivant :

« Si l'on a $OO' < R + R'$, les cercles $\Gamma$ et $\Gamma'$ de centres O et O′ et de rayons R et R′ sont sécants ».

La lecture du livre de Marc Rogalski (Carrefours, page 300) m'a permis de comprendre la raison de cette erreur et dans ce qui suit je voudrais mettre en évidence les confusions qui peuvent survenir entre les trois questions suivantes : inégalité triangulaire, condition d'alignement, condition pour que deux cercles soient sécants.

Puis je proposerai de modifier les formulations en vigueur afin de réduire les risques d'erreurs. Enfin, par une réflexion sur les démonstrations des théorèmes concernés, je m'efforcerai d'exposer ce qui les différencie et le caractère simpliste de tout excès dans leur rapprochement.

Cet article est écrit en direction des enseignants ; j'userai donc librement d'expressions telles que « il faut et il suffit » ou « contraposition » … et, dans la section 4, je ferai référence à des notions se situant au delà des programmes du secondaire. N'ayant que fort peu enseigné ces programmes, mon expérience se situe plutôt du côté des candidats au CAPES dont les réactions témoignent assez bien, je crois, de l'enseignement qu'ils ont reçu comme de celui qu'ils comptent donner lorsqu'ils seront eux-mêmes professeurs.

## 2. Les causes de la confusion

Il semble que l'énoncé suivant soit souvent formulé :

*Pour que trois points* A, B, C *ne soient pas alignés, il faut et il suffit que, si* [AC] *est le plus grand côté du triangle* ABC*, on ait :* $AC < AB + BC$.

L'expérience montre que, dans cet énoncé (exact), sont réunis plusieurs ingrédients qui rendent délicat son usage par les élèves

1) La condition énoncée est formée de deux parties ; l'une est formulée en français, l'autre en langage mathématique. Dans l'esprit de l'élève comme dans sa lecture, une hiérarchie s'installe au détriment de la première qui échappe ainsi à la mémorisation.

2) L'inégalité $AC < AB + BC$ est nécessaire pour que A, B, C ne soient pas alignés ; en revanche, cette inégalité n'est suffisante que si [AC] est le plus grand côté

(*) B.P. 133 Mata Utu 98600 WALLIS.

de ABC. La belle symétrie que l'on apprécie dans l'énoncé des résultats d'équivalence n'est pas respectée et l'élève cherche plus ou moins consciemment à la rétablir.

3) La première partie de la condition étant oubliée, la seule inégalité $AC < AB + BC$ se trouve immanquablement rapprochée des énoncés exacts suivants :

– *Quels que soient* A, B, C*, on a :* $AC < AB + BC$.
Il est alors tentant d'affirmer : pour que A, B, C soient alignés il faut et il suffit que $AC = AB + BC$. C'est vrai pour il suffit et faux pour il faut.

– *Si les cercles* $\Gamma$ *et* $\Gamma'$ (voir 1) *sont sécants, alors on a :* $OO' < R + R'$.
Là aussi la tentation est grande de transformer cette condition seulement nécessaire en une condition nécessaire et suffisante évidemment contredite par deux cercles concentriques.

Tirons les leçons de ce qui précède :
Toutes les situations ne se prêtent pas forcément à l'énoncé d'une condition nécessaire et suffisante bien équilibrée.
Les distances ne sont pas forcément le meilleur outil pour caractériser l'alignement.
Des problématiques voisines et même enchevêtrées doivent faire l'objet d'énoncés assez distincts pour que l'élève ne risque pas de tout mélanger.

## 3. Des formulations confortables

En premier lieu, il doit être bien entendu que ce qui suit n'a rien d'original ; mon seul rôle est d'en montrer l'intérêt.

1) Le premier énoncé indiscutable est celui de l'inégalité triangulaire :

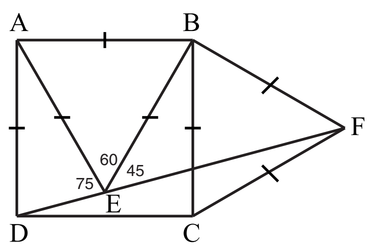
**Théorème 1.** *Quels que soient* A, B, C*, on a :* $AC \leq AB + BC$

Cet énoncé peut être illustré par de nombreux exercices ; il reste clair pourvu qu'on ne cherche pas à le mêler à une CNS quelconque.

2) Au sujet de la condition d'alignement, on peut regretter que les angles ne soient pas plus souvent utilisés par le biais de la propriété suivante :

*Les points* A, B, C *sont alignés si et seulement si* $\widehat{ABC}$ *est nul ou plat.*

Par exemple, dans l'exercice évoqué ci-contre, l'usage des angles est d'une simplicité biblique pour prouver l'alignement de D, E, F et la plupart des manuels de cinquième procèdent ainsi. Néanmoins je n'ai jamais vu un candidat au CAPES penser aux angles spontanément (et pas plus d'ailleurs penser aux distances). Pour ces étudiants, cet exercice est du ressort de notions moins élémentaires (rotation ou même coordonnées).



Par ailleurs les distances peuvent jouer un rôle intéressant et sans danger grâce à la propriété suivante :

**Théorème 2.** P*our que* B *appartienne au segment* [AC], *il faut et il suffit que l'on ait :* AC = AB + BC.

Enfin on aura intérêt à conforter l'acquisition de ces propriétés par l'énoncé « antique » :
*Le segment* [AC] *est le plus court chemin pour aller de* A *à* C.
Ici les mots « plus court » traduisent l'inégalité triangulaire et l'article défini « le » placé devant traduit la condition suffisante du théorème 2.

3) À propos de la condition assurant que deux cercles sont sécants, je ne vois rien d'autre que la double inégalité stricte :

**Théorème 3.** *Pour que* Γ *et* Γ′ *soient sécants, il faut et il suffit que l'on ait :*

$$|R - R'| < OO' < R + R'. \qquad (*)$$

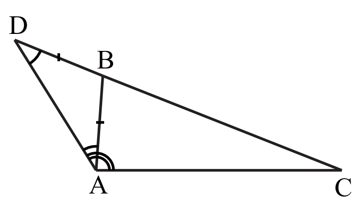
Le problème est que les valeurs absolues ne sont pas au programme du collège. Aussi, on préférera remplacer la double inégalité par l'énoncé : … *que la distance des centres soit comprise entre la somme et la différence des rayons* (on peut penser que l'élève fera intervenir la différence positive).

## 4. Quelques repères en vue des démonstrations

Sans entrer dans les détails, je voudrais faire voir à quel point les démonstrations peuvent participer à l'enchevêtrement des questions qui nous occupent.

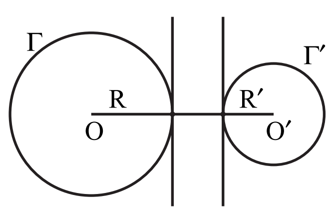
1) L'inégalité triangulaire est considérée par certains comme un point de départ (on dit parfois un axiome). Sinon on peut la déduire d'autres postulats concernant les longueurs et les angles et dont il serait trop long de dresser ici la liste ; dans ce cheminement, on utilise notamment la propriété suivante (oubliée aujourd'hui) :
*Dans un triangle, les angles sont dans le même ordre strict que les côtés qui leur sont opposés.*
On applique cela au triangle ADC ci-contre et, sachant $\widehat{ACD} < \widehat{DAC}$, on en déduit :

$$AC < DC = DB + BC = AB + BC.$$




C'est la méthode exposée par Euclide et reprise dans quelques ouvrages récents (1, 3, 5).

Mais l'inégalité triangulaire peut aussi être déduite par contraposition de la propriété suivante :
*Si* OO′ > R + R′, *alors* Γ *et* Γ′ *sont disjoints*,
et pour obtenir cette dernière on fait appel à la position d'un cercle par rapport à ses tangentes.



2) Dans le théorème 2, la condition AC = AB + BC est évidemment nécessaire pour que B ∈ [AC]. Pour la réciproque, les deux pistes décrites en 1) peuvent également être suivies :

– La première procède par contraposition : supposons B ∉ [AC]. Alors on a : AC < AB + BC d'abord pour B aligné avec A et C et ensuite en général par le raisonnement vu en 1).

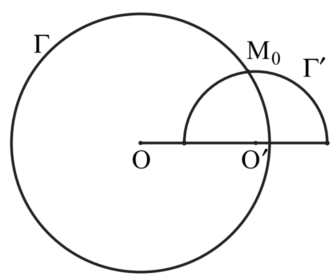
– La deuxième utilise la propriété : *Si* OO′ = R + R′*, alors les deux cercles sont tangents extérieurement et leur seul point commun appartient à* [OO′].

Notons que la deuxième piste présente l'inconvénient de « mettre le pied » dans le problème de la position relative de deux cercles avec le risque de mélange déjà signalé.

3) Attaquons-nous maintenant au théorème 3. Dans cet énoncé, le « il suffit » est beaucoup plus difficile que le « il faut », mais on ne peut disjoindre les deux conditions.

La nécessité de (*) pour que deux cercles soient sécants découle de l'inégalité triangulaire stricte, c'est à dire des théorèmes 1 et 2. Dans l'optique de la deuxième piste distinguée ci-dessus, on peut expliciter ce qu'entraînent les propriétés OO′ = |R – R′| et OO′ < |R – R′| et raisonner par contraposition ; en fait cela signifie qu'on a totalement étudié la position relative de deux cercles.

Pour prouver que (*) est une condition suffisante, une première approche consiste à faire appel aux propriétés du corps **R**.
Pour O′M = R′, l'application M ↦ OM est continue sur chaque demi-cercle de Γ′ et prend aux extrémités deux valeurs encadrant R.
D'où l'existence de $M_0$ ∈ Γ′ tel que $OM_0$ = R par le théorème des valeurs intermédiaires.




Il y a quelques années cette démonstration fut bien reçue à l'oral du CAPES et cela semble logique de la part d'un jury qui impose aux candidats le niveau Bac+1. Mais que faire au niveau du collège ? J'ai déjà signalé mon ignorance en la matière ; en toute modestie, je propose d'adapter la même idée en fonction des capacités d'intuition des élèves : on expliquera donc que le tracé de Γ′, sans lever le crayon de la feuille, va nécessairement croiser Γ en un point commun aux deux cercles.

Ce faisant nous venons d'introduire l'analyse en géométrie. Ce n'est pas la seule façon d'aborder le problème, mais on doit noter que les autres approches nécessitent aussi autre chose que de la géométrie élémentaire :
– Algébriquement, on peut se placer dans un plan K × K où K est un corps pour lequel tout élément positif est un carré.
– Axiomatiquement, on peut postuler que, pour toute droite D telle que d(O,D) < R, alors D ∩ Γ est non vide.

## 5. Conclusion

En dépit de la concision de mon exposé, le lecteur aura pu mesurer la difficulté des questions que nous nous étions proposé d'étudier et qui l'ont entraîné au delà des programmes du secondaire. N'est il pas utile et intéressant de constater que, sous le masque des prétendues évidences, la géométrie peut faire l'objet d'études riches et approfondies ?

## Références

1. A. Cousin-Fauconnet : *Enseigner la géométrie au Collège* (Armand Colin).

2. Euclide : *Les éléments*.

3. J. Ferrand : *Fondements de la Géométrie* (P.U.F. ).

4. D. Hilbert : *Les fondements de la Géométrie* (Réédition Gabay).

5. G. Lion : *Géométrie du Plan* (Vuibert).

6. M. Rogalski : *Carrefours entre l'Algèbre, l'Analyse et la Géométrie* ( Ellipses ).